

Спиральность тороидального вихря с закруткой

Е.Ю.Банникова^{1,2}, В.М.Конторович^{1,2} и С.А.Пославский²

¹Радиоастрономический институт национальной академии наук Украины
ул. Краснознаменная, 4, Харьков, 61002, Украина

²Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61022, Украина

На основе решения уравнений Брэгга-Хоторна обсуждается спиральность тонкого тороидального вихря при наличии закрутки – орбитального движения вдоль направляющей тора. Показано, что связь спиральности с циркуляциями вдоль малой и большой зацеплённых окружностей – направляющей и образующей тора – зависит от распределения азимутальной скорости в ядре закрученного кольцевого вихря. В случае неоднородной закрутки эта связь отличается от известного соотношения Моффата – удвоенного произведения таких циркуляций. Результаты могут найти применение при исследовании вихрей в атмосферах планет и движений в окрестности ядер активных галактик.

В природе тороидальные вихри часто обладают «закруткой» [1] – орбитальным движением вдоль направляющей тора. Такими, по-видимому, являются присоединённые кольцевые вихри тропических циклонов, ураганов и торнадо [2], а также солнечные тороидальные вихри [3], ответственные за 11-летний цикл активности, и многие другие. При наличии закрутки возникает топологический интеграл спиральности [4]. Это может увеличивать устойчивость вихря, что подтверждается в лабораторных экспериментах [5].

Как известно, для двух зацеплённых вихревых контуров спиральность должна быть равна произведению циркуляций, умноженному на число зацеплений [1, 4]. Мы покажем на допускающем гидродинамическое решение примере, что для тороидального вихря с закруткой это соотношение имеет несколько отличный вид, отражающий пространственное распределение завихренности.

1. Уравнение Брэгга-Хоторна и его решение для тороидального вихря

Рассмотрим осесимметричное стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости в отсутствие массовых сил. Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид

$(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla p / \rho$. Учитывая, что $(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = \text{grad} V^2 - \mathbf{V} \times \text{rot}\mathbf{V}$, переписываем его следующим образом:

$$\mathbf{V} \times \text{rot}\mathbf{V} = \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right), \quad (1.1)$$

где в цилиндрических координатах (r, φ, z)

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot}\mathbf{V} = \begin{cases} -\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \mathbf{i}_r \\ \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \mathbf{i}_\varphi \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r} \mathbf{i}_z \end{cases}. \quad (1.2)$$

Введём функцию тока Стокса ψ , определённую согласно

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (1.3)$$

При этом уравнение неразрывности $\text{div}\mathbf{V} = 0$ удовлетворяется тождественно. Орбитальную компоненту скорости теперь можно представить в виде

$$V_\varphi = \frac{f(\psi)}{r}, \quad (1.4)$$

где $f(\psi)$ – известная функция. Подставляя выражения (1.3) и (1.4) в (1.2), получаем

$$\text{rot}\mathbf{V} = \begin{cases} -\frac{1}{r} f' \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{i}_r \\ -\frac{\tilde{\Delta} \psi}{r} \mathbf{i}_\varphi \\ \frac{1}{r} f' \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{i}_z \end{cases} \quad (1.5)$$

где $\tilde{\Delta} \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$, $f' \equiv \frac{df}{d\psi}$. Подставляя (1.5) в уравнение Эйлера (1.1), после

несложных преобразований получаем для φ -ой компоненты завихренности:

$$\operatorname{rot}_{\varphi} \mathbf{V} = -\frac{f \cdot f'}{r} + \frac{r}{\psi'_r} \frac{\partial \Pi}{\partial r}, \quad (1.6)$$

где $\Pi = p/\rho + V^2/2$ – интеграл Бернулли. Приравнявая два выражения (1.5) и (1.6) для азимутальной составляющей завихренности, получаем для ψ уравнение Брэгга-Хотторна [1] (или, что то же, Грэда-Шафранова в МГД случае [6]):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = r^2 \frac{d\Pi}{d\psi} - f \frac{df}{d\psi}. \quad (1.7)$$

Решения уравнения (1.7) при $f \neq 0$ описывают стационарные осесимметричные течения с закруткой. Одно из таких решений можно получить для случая

$$\frac{d\Pi}{d\psi} = \text{Const} = \alpha \psi_0; \quad f \frac{df}{d\psi} = \text{Const} = -\beta R^2 \phi_0 \quad (1.8)$$

(α и β безразмерные константы, ϕ_0 – размерный нормировочный множитель).

Тогда решение уравнения (1.7) для функции тока Стокса имеет вид [6]:

$$\psi = \phi_0 \left[\frac{1}{2} (\beta R^2 + r^2) z^2 + \frac{\alpha - 1}{8} (r^2 - R^2)^2 \right] \quad (1.9)$$

По нему находим с помощью (1.3) V_r и V_z , а с помощью (1.8) – скорость закрутки V_{φ} (и давление p). Вблизи от окружности $r = R$; $z = 0$ (т.е. при $\frac{|r - R|}{R} \ll 1$ и малых z)

выражение (1.9) для функции тока переходит в

$$\psi \approx \frac{1}{2} \phi_0 R^2 \left[(\beta + 1) z^2 + (\alpha - 1) (r - R)^2 \right] \quad (1.10)$$

В данном решении при $\beta + 1 > 0$ и $\alpha > 1$ поверхности $\psi(r, z) = \text{Const}$ представляют собой вложенные торы с общей круговой осью – направляющей $r = R$, $z = 0$, а их меридиональные сечения представляют собой эллипсы.

Интегрируя уравнения (1.8), получаем:

$$\Pi = \alpha \phi_0 \psi + \Pi_0 \quad f^2 = f_0^2 - 2\beta R^2 \phi_0 \psi, \quad (1.11)$$

где Π_0 и f_0 – постоянные интегрирования, параметризующие данное решение.

2. Спиральность

Ниже мы найдём топологический интеграл спиральности

$$S = \int \mathbf{V} \cdot \text{rot} \mathbf{V} dV \quad (2.1)$$

для решения (1.10). Ограничимся частным случаем $\beta + 1 = \alpha - 1$, когда сечениями поверхностей тока меридиональной плоскостью являются окружности:

$$\psi \approx \frac{1}{2} \phi_0 R^2 (\alpha - 1) \left[z^2 + (r - R)^2 \right]. \quad (2.2)$$

Любой из торов $\psi(r, z) = \text{Const}$ может быть принят за границу области, занятую **закрученным вихревым течением**. Будем считать его поперечное меридиональное сечение окружностью радиуса a (см Рис.1). Вне тора течение будем считать потенциальным.

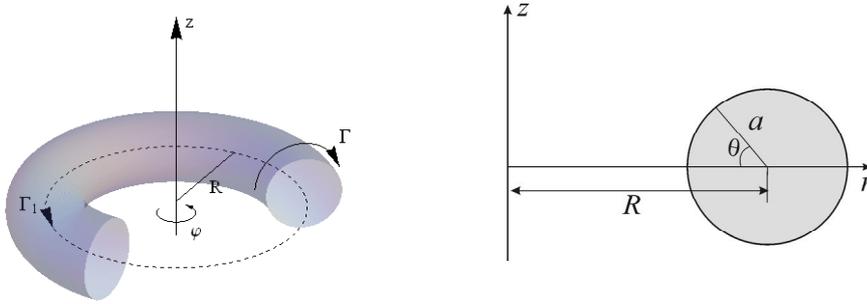


Рис.1 Слева: 3D-схема тороидального вихря; справа – сечение в меридиональной плоскости.

Учитывая (1.3), получаем выражения для компонент скорости:

$$\begin{aligned} V_r &= -R^2 \psi_0 (\alpha - 1) \frac{z}{r}; \\ V_z &= -R^2 \psi_0 (\alpha - 1) \frac{r - R}{r}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В случае тонкого кольцевого вихря это движение в меридиональной плоскости имеет характер «твердотельного вращения», поскольку линейная скорость вращения пропорциональна расстоянию до круговой направляющей вихревого кольца:

$$V_r \approx -R \phi_0 (\alpha - 1) z, \quad V_z \approx R \phi_0 (\alpha - 1) (r - R). \quad (2.3a)$$

При этом азимутальная компонента завихренности в тонком кольце практически постоянна:

$$\omega_\phi \approx -2R \phi_0 (\alpha - 1) \quad (2.4)$$

3. Случай однородной закрутки кольцевого вихря

Рассмотрим сначала случай $\beta = 0$, $\alpha = 2$. При этом $f(\psi) \equiv f_0 = \text{Const}$. Это означает, что закрутка внутри тора распределена однородно: $V_\varphi = \frac{f_0}{r} \approx \frac{f_0}{R}$. Две другие компоненты скорости и азимутальная компонента ротора записываются в виде

$$V_r \approx -R\phi_0 z, \quad V_z \approx -R\phi_0(r - R), \quad \omega_\varphi \approx -2R\phi_0. \quad (3.1)$$

Перейдем в полярную систему координат в меридиональной плоскости с началом в точке $r = R$, $z = 0$: $R - r = \eta \cos \theta$, $z = \eta \sin \theta$ (η – координата, отсчитываемая от круговой оси тора вдоль радиуса его поперечного сечения).

На границе $\eta = a$ имеем вихревой слой $\omega_\theta = -V_\varphi \delta(\eta - a)$, поскольку азимутальная скорость здесь претерпевает разрыв (считаем, что вне тора она обращается в нуль).

При наличии внутри тора закрутки – орбитального движения (по углу φ) – и вихревого движения в меридиональном сечении вдоль малого контура (по углу θ) спиральность удобно представить в виде суммы двух составляющих

$$S = S_\varphi + S_\theta; \quad S_\varphi = \int V_\varphi \omega_\varphi dV, \quad S_\theta = \int (V_r \omega_r + V_z \omega_z) dV. \quad (3.2)$$

Вычисляя составляющие S_φ , S_θ спиральности, имеем ($V_\theta^2 = V_r^2 + V_z^2$):

$$S_\varphi = \int V_\varphi \omega_\varphi dV \approx -4\pi^2 R a^2 f_0 \phi_0; \quad (3.3)$$

$$S_\theta = \int (V_r \omega_r + V_z \omega_z) dV = \int V_\theta \omega_\theta dV = - \int_\Sigma V_\theta V_\varphi dS,$$

В последнем выражении интегрирование ведется по поверхности вихревого кольца Σ .

Поскольку на этой поверхности $V_\theta \approx Ra\phi_0$, $V_\varphi \approx \frac{f_0}{R}$, то $S_\theta \approx -4\pi^2 R a^2 f_0 \phi_0$. Отсюда следует, $S_\theta = S_\varphi$ и, соответственно, для данного решения $S = 2S_\varphi$. (Ниже увидим, что соотношение $S = 2S_\varphi$ является весьма общим). Отсюда получаем

$$S = -8\pi^2 R a^2 f_0 \phi_0 \quad (3.4)$$

Свяжем полученное значение спиральности со значениями циркуляции скорости Γ по малому контуру, охватывающему вихревое кольцо один раз, и Γ_1 по большому контуру, совпадающему с круговой направляющей тора.

$$\Gamma = a \int_0^{2\pi} V_\theta d\theta \approx 2\pi a^2 R \phi_0, \quad \Gamma_1 = R \int_0^{2\pi} V_\varphi d\varphi = 2\pi f_0. \quad (3.5)$$

Для спиральности в этом случае получаем привычное выражение

$$S = -2\Gamma\Gamma_1. \quad (3.6)$$

4. Случай неоднородной закрутки

Рассмотрим теперь случай неоднородной закрутки. Ограничимся рассмотрением специального случая, когда максимум азимутальной скорости достигается на круговой направляющей вихревого кольца: $\beta = \alpha - 2 > 0$, а на поверхности кольца закрутка исчезает.

Из выражения (2.2) для функции тока получаем на границе тора $\psi \approx \frac{\alpha - 1}{2} \phi_0 R^2 a^2$, где a – малый радиус тороидального вихря (радиус меридионального сечения). Полагая на этой границе $V_\varphi = 0$, т.е. $f|_a = 0$, находим постоянную интегрирования f_0 в выражении (1.11):

$$f_0 = \sqrt{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} \phi_0 R^2 a. \quad (4.1)$$

Тогда внутри вихревого кольца $a^2 \geq (z^2 + (r - R)^2)$ и азимутальная скорость равна

$$V_\varphi = \sqrt{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} \phi_0 R^2 \frac{\sqrt{a^2 - (z^2 + (r - R)^2)}}{r} \quad (4.2)$$

Азимутальная компонента завихренности выражается в виде

$$\omega_\varphi = -\phi_0 (\alpha - 1) R^2 \frac{r + R}{r^2} \approx -2\phi_0 R (\alpha - 1). \quad (4.3)$$

Т.о. в рассматриваемом приближении $\frac{|r - R|}{R} \ll 1$ для тонкого вихря получаем

$$V_\varphi \omega_\varphi \approx -2\phi_0^2 (\alpha - 1)^{3/2} (\alpha - 2) R^2 \sqrt{a^2 - (z^2 + (r - R)^2)}. \quad (4.4)$$

Для нахождения φ -ой составляющей спиральности интегрируем (4.4) по объему тора:

$$S_\varphi = -2\phi_0^2 (\alpha - 1)^{3/2} (\alpha - 2) R^2 \cdot 2\pi R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a d\eta \sqrt{a^2 - \eta^2}. \quad (4.5)$$

Окончательно получаем, что

$$S_\varphi = -\frac{8}{3} \pi^2 a^3 R^3 \phi_0^2 (\alpha - 1) \sqrt{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} \quad (4.6)$$

Для вывода выражения S_θ найдём соответствующие компоненты скорости и завихренности:

$$\begin{aligned} V_r &\simeq -(\alpha - 1)R\phi_0 \cdot z, \quad V_z \simeq (\alpha - 1)R\phi_0 \cdot (r - R) \\ \omega_r &\simeq \phi_0 R z \sqrt{\frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{a^2 - (z^2 + (r - R)^2)}}; \\ \omega_z &\simeq -\phi_0 R (r - R) \sqrt{\frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{a^2 - (z^2 + (r - R)^2)}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тогда, интегрируя по объёму кольцевого вихря, находим

$$S_\theta = \int (V_r \omega_r + V_z \omega_z) dV = -(\alpha - 1)^{3/2} (\alpha - 2)^{1/2} \phi_0^2 R^2 \int \frac{z^2 + (r - R)^2}{\sqrt{a^2 - (z^2 + (r - R)^2)}} dV.$$

Используя ту же, что и ранее замену переменных, получаем

$$\begin{aligned} S_\theta &= -(\alpha - 1)^{3/2} (\alpha - 2)^{1/2} \cdot 4\pi^2 \phi_0^2 R^3 \int_0^a \frac{\eta^3}{\sqrt{a^2 - \eta^2}} d\eta = \\ &= -\frac{8}{3} \pi^2 a^3 R^3 \phi_0^2 (\alpha - 1) \sqrt{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

и, следовательно, сравнивая с (4.6), видим, что, как и выше, $S_\theta = S_\varphi$, и $S = 2S_\varphi$.

Выразим спиральность через циркуляции скорости по малому (Γ) и большому (Γ_1) контурам (см. рис.1). Для циркуляции по малому контуру (окружности радиуса a), используя формулу Стокса, получаем:

$$\Gamma = a \int_0^{2\pi} V_\theta d\theta \simeq -\pi a^2 \omega_\varphi = 2\pi a^2 R \phi_0 (\alpha - 1). \quad (4.9)$$

Циркуляция по большому контуру (по круговой направляющей тора) равна

$$\Gamma_1 = R \int_0^{2\pi} V_\varphi d\varphi = 2\pi R^2 a \phi_0 \sqrt{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}. \quad (4.10)$$

Выражая спиральность через циркуляции, получаем для рассматриваемого случая неоднородной закрутки с максимумом ее скорости на круговой оси и нулём на границе:

$$S = -\frac{4}{3} \Gamma \Gamma_1. \quad (4.11)$$

Мы видим, что в случае неоднородной закрутки модуль коэффициента k при произведении циркуляций в выражении для спиральности $S = -k\Gamma\Gamma_1$ может отличаться от двойки.

5. Спиральность кольцевого вихря. Общий случай

Вернемся к общему представлению (3.2) спиральности в виде суммы двух составляющих $S = S_\varphi + S_\theta$ – продольной S_φ и поперечной S_θ .

В случае осевой симметрии течения компоненты завихренности представляем в виде

$$\boldsymbol{\omega}_\theta = \text{rot} \mathbf{V}_\varphi \equiv [\nabla, \mathbf{V}_\varphi], \quad \boldsymbol{\omega}_\varphi = \text{rot}_\varphi \mathbf{V}_\theta. \quad (5.1)$$

Рассмотрим разность

$$S_\theta - S_\varphi = \int (\mathbf{V}_\theta \cdot \boldsymbol{\omega}_\theta - \mathbf{V}_\varphi \cdot \boldsymbol{\omega}_\varphi) dV = \int (\mathbf{V}_\theta \cdot [\nabla, \mathbf{V}_\varphi] - \mathbf{V}_\varphi \cdot [\nabla, \mathbf{V}_\theta]) dV \quad (5.2)$$

и воспользуемся тождеством $\text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \equiv \nabla \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b} \cdot [\nabla, \mathbf{a}] - \mathbf{a} \cdot [\nabla, \mathbf{b}]$ применительно к векторам $\mathbf{V}_\varphi, \mathbf{V}_\theta$. Тогда получим

$$S_\theta - S_\varphi = \int \nabla \cdot [\mathbf{V}_\varphi, \mathbf{V}_\theta] dV = \int_{\Sigma} [\mathbf{V}_\varphi, \mathbf{V}_\theta] \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (5.3)$$

если на границе Σ области интегрирования азимутальная составляющая скорости обращается в ноль.

Таким образом, и в общем случае осесимметричного течения в кольцевом вихре

$$S_\theta = S_\varphi; \quad S = 2S_\varphi. \quad (5.4)$$

В то же время выражение спиральности через циркуляции

$$S = -k\Gamma\Gamma_1 \quad (5.5)$$

для тороидального вихря не носит универсального характера: коэффициент k при произведении циркуляций может быть отличен от двойки. Действительно, рассмотрим тонкий кольцевой вихрь с закруткой некоего общего вида $rV_\varphi = f(\psi) \neq \text{const}$. На рассматриваемом решении (2.2) $\psi = \psi(\eta)$ и $f = g(\eta)$, где $g(\eta)$ равна:

$$g(\eta) \approx \sqrt{f_0^2 - (\alpha - 1)(\alpha - 2)\phi_0^2 R^4 \eta^2}. \quad (5.6)$$

Тогда с учетом (3.2), (4.3) и (5.4) для спиральности получим

$$S = 2S_\varphi = -16\pi^2(\alpha - 1)R\phi_0 \int_0^a \eta \cdot g(\eta) d\eta, \quad (5.7)$$

или

$$S = -\Gamma\Gamma', \quad (5.8)$$

где Γ определяется в соответствии с (4.9), а

$$\Gamma' = \frac{8\pi}{a^2} \int_0^a \eta \cdot g(\eta) d\eta. \quad (5.9)$$

Если закрутка однородна ($\alpha = 2$), то мы должны положить $g(\eta) \equiv f_0$, что дает $\Gamma' = 2\Gamma_1$, и в соответствии с (5.5) получаем $k = 2$.

Для случая неоднородной закрутки имеем

$$\Gamma' = k\Gamma_1, \text{ где } k = \frac{4}{f_0 a^2} \int_0^a \eta \cdot g(\eta) d\eta. \quad (5.10)$$

Отличие k от значения $k = 2$ связано с тем, что в случае закрученного вихря зацепленные контуры принадлежат одному и тому же тороидальному вихрю и не являются независимыми. По-прежнему существует топологический интеграл спиральности, который может быть выражен через произведения циркуляций двух зацепленных контуров. Но коэффициент k здесь является функционалом распределения закрутки по сечению тора, а также зависит от выбора контуров, по которым вычисляется циркуляция скорости.

Литература

1. **Ф.Дж. Сэффмэн.** Динамика вихрей. М.: «Научный мир» (2000).
2. **Г.В. Левина, М.Т. Монгомери.** О первом исследовании спиральной природы тропического циклогенеза. *Доклады РАН* **434**, № 3, с. 401–406 (2010)
3. **V. Bjerknes.** Solar hydrodynamics. *Astrophys.J.* **64**, p. 93-121, (1926)
4. **Н.К. Moffatt & А. Tsinober.** Helicity in laminar and turbulent flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **24**: 281-312 (1992)
5. **Takashi Naitoh, Nobuyuki Okura, Toshiyuki Gotoh, and Yusuke Kato.** On the evolution of vortex rings with swirl. *Physics of fluids* **26**, 067101 (2014)
6. **Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц.** Электродинамика сплошных сред. М.: Наука (1982)