

Квантование электромагнитного смерча и происхождение полос в спектре гигантских импульсов пульсара в Крабе

В. М. Конторович^{1,2}

¹Радиоастрономический институт НАН Украины, Харьков 61002

²Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков 61077

vkont1001@yahoo.com,

Аннотация

При ускорении электронов до релятивистских энергий во внутреннем зазоре пульсара существенно квантование их движения во внешнем магнитном поле и электрическом поле пространственного заряда вращающегося электронного пучка – электромагнитного смерча, возникающего при пробое в полярном зазоре пульсара. Квантование позволяет предложить естественное объяснение наблюдаемым полосам в частотном спектре интеримпульсного излучения пульсара PSR J0534+22 в Крабовидной туманности и определить физические параметры смерча. Обсуждается различие в спектрах главных импульсов и интеримпульсов.

Введение

Гигантские электромагнитные импульсы пульсаров [1] обладают круговой поляризацией и характерными полосами в частотном спектре интеримпульсов [2], адекватное объяснение которых в настоящее время отсутствует. К настоящему времени высказано несколько предположений о природе полос. Одно из них состоит в интерпретации их как размытых уровней (аномального) циклотронного резонанса [3] или аналога солнечной зебраструктуры (или мод Бернштейна) [4], но при этом магнитное поле должно быть достаточно слабым. Т.е. формирование полос приходится связывать со специально вводимым уплотнением вдали от звезды (вблизи от светового цилиндра на периферии магнитосферы), что само по себе проблематично. Другая идея состоит в использовании эффектов, сопровождающих сверхсветовое вращение, и также локализует источник излучения вдали от поверхности звезды в области светового цилиндра [5].

Объяснение, которое мы обсуждаем ниже, использует квантование электромагнитных смерчей, введенных для объяснения круговой поляризации гигантских импульсов пульсаров. Смерчи могут возникать при пробое в полярном зазоре пульсара [6] – области ускорения частиц, расположенной вблизи магнитных полюсов. Они представляют собой вращающийся вокруг своей оси цилиндрический поток электронов (или позитронов) в скрещенных полях про-

пространственного заряда пучка и сверхсильного магнитного поля пульсара и могут быть ответственны за генерацию гигантских импульсов [7]. Колоссальные значения магнитного поля $B \sim 10^{12}$ Гс приводят к квантованию движения электрона в смерче [6]. Следствием является квантование тока в зазоре $I = n \cdot 2\pi\hbar B / m$, причем квант тока определяется только магнитным полем (n – целое число, m – масса электрона).

Квантование позволяет предложить естественное объяснение полосам, наблюдавшимся Хенкинсом и Айлеком [2] в частотном спектре интеримпульсного излучения пульсара PSR J0534+22 в Крабовидной туманности. Как следствие, по виду спектра определены физические параметры смерча, а также обсуждается различие в спектрах главных импульсов и интеримпульсов.

Энергетические спектры электронов и частоты вращений в смерче

В качестве отправной точки рассмотрим вначале известное выражение для энергии релятивистского электрона во внешнем постоянном магнитном поле (в отсутствие электрического поля) [8]:

$$\varepsilon = \sqrt{m^2 c^4 + p_z^2 c^2 + |e| \hbar B c (2n_L + 1) - e \hbar B c \sigma}, \quad (1)$$

где e – заряд электрона (позитрона), p_z – его продольный импульс, направленный вдоль магнитного поля, целое число n_L нумерует уровни Ландау, а $\sigma = \pm 1$ определяется проекцией спина на ось z . В квазиклассическом приближении, с точностью до линейных по постоянной Планка \hbar слагаемых¹, это выражение принимает вид

$$\varepsilon \approx \varepsilon_0 + \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_s; \quad \varepsilon_0 = \sqrt{m^2 c^4 + p_z^2 c^2}, \quad \varepsilon_{\perp} = \frac{\hbar |e| c B}{\varepsilon_0} \left(n_L + \frac{1}{2} \right), \quad \varepsilon_s = -\frac{\hbar e c B}{2\varepsilon_0} \sigma, \quad (2)$$

Использованное условие $\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_s \ll \varepsilon_0$ выполняется в полях, меньших Швингеровского, $B \ll B_{\text{crit}} = m^2 c^3 / e \hbar = 4.4 \cdot 10^{13}$ Гс, и применимо в интересующем нас случае пульсаров. Видно, что член с нулевыми колебаниями осциллятора Ландау точно компенсируется спиновым слагаемым. Множителями при \hbar в данном приближении являются классические частоты. В скрещенных полях внешнего магнитного поля и неоднородного поля пространственного заряда, формирующих смерч в пульсаре, имеются две классические ветви [6], соответствующие дифференциальному вращению частиц вокруг магнитного поля: высокоэнергетическая циклотронная Ω_+ и низкоэнергетическая дрейфовая Ω_-

$$2\Omega_{\pm} = \omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 - 4 \frac{eE}{mr}}, \quad (3)$$

¹ Квазиклассическое приближение ниже понимаем в этом смысле, допуская произвольные n_L .

где $\Omega_{\pm}(r)$ – (нерелятивистские) угловые скорости вращения, $\omega_c = \frac{|e|B}{mc}$ – циклотронная частота, $E = E(r)$ – напряженность радиального электрического поля пространственного заряда, r – расстояние от оси (см. рис. 1-2).

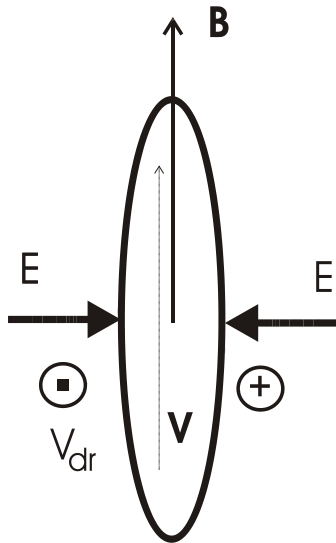


Рис.1

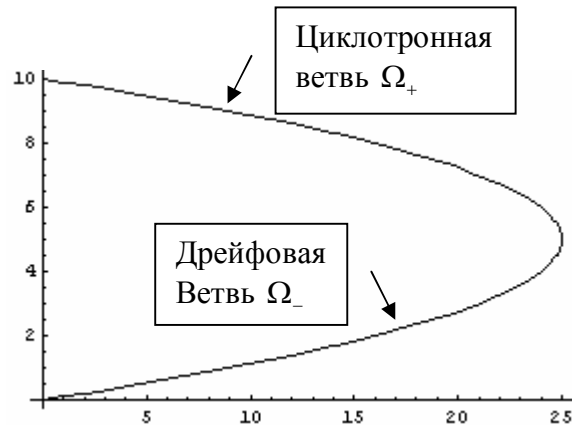


Рис.2

Схема торнадо (слева) и поведение угловых скоростей вращения Ω_{\pm} (справа) как функции величины eE/tr , описывающей влияние радиального электрического поля E

В условиях пульсара циклотронной ветви $\Omega_{+} \approx \omega_c$ соответствуют частоты, попадающие в жесткий рентгеновский диапазон. Медленному вращению $\Omega_{-} \ll \omega_c$, выполняющемуся в случае пульсаров в силу $E \ll B$, соответствуют дрейфовые скорости $V_{\phi} \approx cE/B$, ортогональные электрическому полю [6]. Энергия вращения в силу этой ортогональности сохраняется. Благодаря этому становится возможным существование стационарных квантовых состояний. Для реализации такого вращения необходима (подобная имеющей место в отсутствие электрического поля) точная компенсация нулевых колебаний циклотронной ветви спиновым слагаемым в энергии (см. Приложение, где рассмотрено это слагаемое в геометрии смерча).

Квазиклассическое квантование

В собственной системе, в которой $\varepsilon_0 = mc^2$, получаем $\delta\varepsilon_s = -\hbar\omega_c S_z$. С другой стороны, поперечная часть орбитальной энергии, по аналогии с (2), имеет вид

$$\varepsilon_{\perp} = \hbar\Omega_{+}(n_L + \frac{1}{2}) + \hbar\Omega_{-}(n + \frac{1}{2}) \quad (4)$$

(в данном приближении множителями при \hbar являются классические частоты без квантовых поправок), где Ω_{\pm} даются формулой (3). Заметим, что для обсуждения компенсации нулевых колебаний жесткой циклотронной ветви нет необходимости явно использовать вид второго слагаемого в (4), относящегося к мягкой ветви.

Нас интересуют низкоэнергетические состояния при $n_L = 0$. Используя равенство $\Omega_+ = \omega_c - \Omega_-$ можно переписать в этом случае (4) виде $\varepsilon_{\perp} = \hbar\omega_c/2 + \hbar\Omega_- \cdot n$. Отсюда следует компенсация нулевых колебаний циклотронной ветви зеемановским слагаемым при соответствующем значении проекции спина (разном для электронов и позитронов). Для рассматриваемых состояний с наименьшей энергией получаем

$$\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_s = \hbar\Omega_- \cdot n \quad (n_L = 0). \quad (5)$$

Возникающая компенсация позволяет рассмотреть теперь обычное правило квазиклассического квантования

$$\oint \mathbf{R}d\mathbf{p} = 2\pi \cdot n, \quad (6)$$

что приводит к условию, совпадающему с полученным в [6]

$$mrV_{\varphi} = n \cdot \hbar \quad (7)$$

где скорость движения электрона по орбите должна быть выражена через нерелятивистскую частоту обращения электрона за счет дрейфа в скрещенных полях [6]

$$\Omega(r) = \Omega_-(r) \approx \frac{cE}{rH}, \quad \left(\Omega(r) \ll \omega_c = \frac{eB}{mc} \right) \quad (8)$$

Движение по окружности $V_r = 0$ достигается в силу точной компенсации силой Лоренца кулоновского расталкивания электронов в сгустке.

В случае релятивистского движения вдоль магнитного поля эту частоту следует разделить на Лоренц-фактор электрона Γ [6]. Для угловой частоты дрейфового вращения в лабораторной системе это дает

$$\tilde{\Omega}_n(r) = n \cdot \frac{\Omega(r)}{\Gamma}, \quad (9)$$

где $\Omega(r)$ квант частоты вращения в собственной системе отсчета:

$$\Omega(r) = \frac{\hbar}{mr^2}. \quad (10)$$

Полосы в частотном спектре

Результаты квантования электромагнитного сгустка в вакуумном зазоре применим для объяснения полос в спектре излучения пульсара в Крабовидной туманности, наблюдавшихся Т. Хенкинсом и Дж. Айлеком [2]. Пример такого спектра приведен на рис. 1, из работы [2] (см. ниже Рис. 3). В диапазоне частот $\omega/2\pi = 5-10$ ГГц, видны широкие «разрешенные» зоны сплошного спектра с шириной $\Delta\omega/2\pi \approx 0,4$ ГГц и длительностью $\Delta t \approx 5 \cdot 10^{-6}$ сек, разделенные узкими «запрещенными» зонами с шириной $\delta\omega/2\pi \approx 0,1$ ГГц.

Мы будем опираться на тот факт, что частоты вращения в смерче зависят от расстояния до оси и тем самым, излучаемые частоты также будут перекрывать некоторую полосу частот.

Будем считать вначале, что длительность импульса определяется релятивистской абберацией. По длительности Δt мы можем восстановить Γ_{Δ} - фактор излучающих электронов, используя связь

$$\Delta t \approx \delta\varphi \cdot \frac{P}{2\pi}, \quad \delta\varphi \approx \frac{1}{\Gamma_{\Delta}}, \quad (11)$$

где азимутальный угол $\delta\varphi$ определяется абберацией, а $P \approx 0,033$ сек – период пульсара в Крабе.

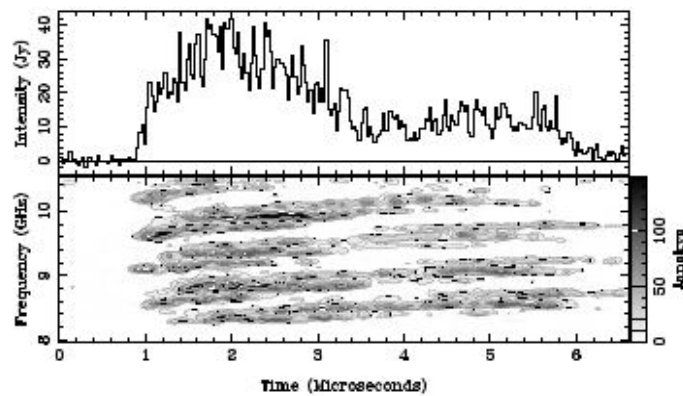


Рис.3. Пример спектра (интеримпульсного) излучения пульсара в Крабовидной туманности, Хенкинс и Айлек [2]. Чередующиеся полосы по частоте, соответствуют «разрешенным» и «запрещенным» зонам.

Отсюда получаем

$$\Gamma_{\Delta} \approx \frac{P}{2\pi\Delta t} \approx 10^3. \quad (12)$$

Для частоты ω используем условие квантования (7), считая, что излучение происходит на собственных частотах системы. Это дает оценку с учетом преобразования частоты при релятивистском движении

$$\omega_n \approx n \cdot \Omega(0) / \Gamma_{\Delta}, \quad (13)$$

где $n \cdot \Omega(0)$ – частота вращения на оси в собственной системе отсчета (точные соотношения зависят от используемой модели излучения). Квантование связано с сопряжением этого вращения с квантовано вращающейся периферией смерча. Выражение для частоты вращения справедливо при $r \gg r_0$, где r_0 размер классически вращающейся сердцевины смерча. Ширина разрешенной

зоны в спектре $\Delta\omega$ определяется падением плотности заряда в сердцевине смерча на расстояниях от оси $r \leq r_0$ (рис. 4):

$$\Delta\omega = n \cdot (\Omega(0) - \Omega(r_0)) / \Gamma_{\Delta}. \quad (14)$$

На этом интервале изменения r плотность излучающих электронов уменьшается от максимума при $r=0$ до предельного значения на границе плотной части смерча при $r \simeq r_0$.

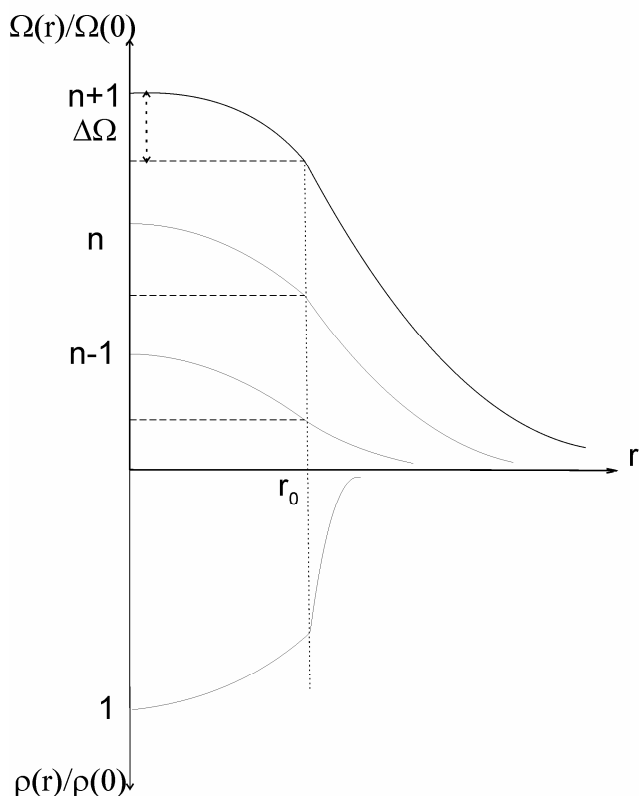


Рис. 4. Распределение по радиусу плотности заряда (внизу) и соответствующая ему угловая скорость вращения смерча (вверху) в разных квантовых состояниях (схема). Отмечена ширина зоны излучения на уровне $n+1$.

Ширина «запрещенной зоны» $\delta\omega$ определяется переходом к следующему значению квантового числа n . Т.е. для отсутствия перекрытия зон и существования полос в спектре граница смерча должна быть достаточно резкой и должно выполняться условие

$$(n+1)\Omega(r_0) > n\Omega(0). \quad (15)$$

Для оценки высоты уровня n используем очевидное соотношение

$$n = \omega / (\Delta\omega + \delta\omega). \quad (16)$$

Т.к. согласно [2] при частоте 10 ГГц ширина разрешенной зоны составляет 0,4 ГГц, а запрещенной 0,1 ГГц, получаем оценку

$$n \approx 20. \quad (17)$$

Используя значение Γ_{Δ} (26), находим в силу связи $\Omega \approx \omega \cdot \Gamma_{\Delta}$ круговую частоту вращения смерча в собственной системе отсчета $\Omega_n / 2\pi \approx 10^{13}$ Гц. Это дает для размера кора

$$r_0 \approx \sqrt{\frac{\hbar}{n \cdot m \Omega_0}} \approx 10^{-7} \text{ см}. \quad (18)$$

Условие неперекрывания зон, приводящее к полосам в спектре, означает ограничение на падение плотности в сердцевине вихря и требование весьма крутого спада плотности заряда в смерче на его границе (Рис. 4). В противном случае полосы в спектре не смогут образоваться из-за перекрытия зон излучения, принадлежащих соседним квантовым уровням.

Релятивистская абберация позволяет понять различие в спектрах главного импульса и интеримпульса [2] (см. Рис. 5-6) при смене механизмов излучения в области в-ч завала спектра.

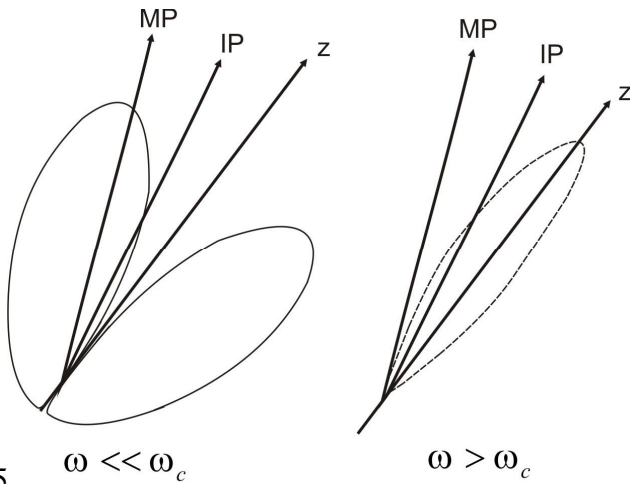
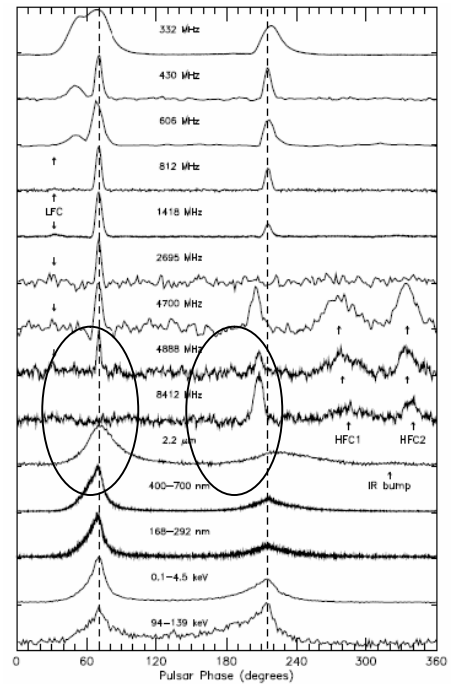


Рис. 5

$$\omega \ll \omega_c$$

$$\omega > \omega_c$$

Рис. 6



Различие в диаграммах излучения относительно луча зрения при смене механизма излучения в области высокочастотного излома спектра (Рис. 5) [8] и многочастотные наблюдения импульса и интеримпульса в пульсаре PSR B0531+21 (Рис. 6) Моффета и Хенкинса [9]. На схеме лучи сведены в один квадрант.

Таким образом релятивистский механизм излучения предпочтителен, т.к. позволяет естественным образом объяснить появление полос только в спектрах интеримпульсов пульсара в Крабе.

Если рассматривать излучение электронов на участке разгона от нулевых (тепловых) до релятивистских скоростей, то длительность импульса должна определяться длительностью процесса ускорения. В приведенных формулах следует положить $\Gamma_{\Delta} = 1$. Для размера смерча это дает [6] $r_0 \approx 10^{-5}$ см.

Заключение

Квантование движения в электромагнитном смерче может приводить к появлению полос в его частотном спектре. Действительно, частота вращения электронов в смерче зависит от расстояния до оси и при заданном значении n перекрывает некоторый интервал значений, определяемый геометрическими размерами смерча. Выше приведены аргументы в пользу того, что наблюдаемые полосы в спектре излучения гигантских импульсов [2], приходящих непосредственно из внутреннего полярного зазора [7], связаны именно с квантованием движения электронов в электромагнитном смерче [6].

Два максимума в полосе могут соответствовать излучению в двух абберационных пучках. Один пучок соответствует излучению ускоряемых электронов в полярном зазоре (гамма-фактор $\approx 10^3$), летящих от поверхности пульсара, второй соответствует излучению ускоряемых позитронов, летящих к поверхности звезды в том же зазоре (при том же гамма-факторе в данной полосе). Излучение позитронов направлено к поверхности, и мы наблюдаем отраженное от поверхности излучение. Падение происходит ортогонально поверхности², в силу чего отраженное излучение направлено строго обратно падающему излучению и, соответственно, совпадает с направлением излучения электронов. Поэтому оно наблюдается как продолжение полосы излучения (из-за запаздывания, которое оказывается нужного порядка величины при данном гамма-факторе $\Gamma_{\Delta} \approx 10^3$).

Действительно, запаздывание излучения, испущенного на высоте z порядка высоты зазора z_c , равно $\delta t \approx z_c / c$. При высоте зазора $z_c = 10^4$ см это дает для δt оценку $\delta t \approx 10^{-6}$ sec, что совпадает с длительностью импульса (полосы излучения) для $\Gamma_{\Delta} \approx 10^3$ (11). Каждый максимум соответствует прохождению пучка излучения по диаграмме телескопа (входу и выходу из диаграммы). Из-за потерь при отражении и отклонения от точной ортогональности к поверхности звезды падающего и, соответственно, отраженного пучка, интенсивность второго максимума меньше, чем интенсивность первого.

² Напомним, что излучение гигантских импульсов, о структуре спектра которых идет речь, происходит преимущественно через «волновод», который в случае пульсара в Крабе соответствует окрестности магнитной оси, где силовые линии магнитного поля ортогональны поверхности пульсара.

Поскольку гамма-фактор стоит в знаменателе частоты вращения и, соответственно, в знаменателе излучаемой частоты в данной полосе, то более поздние этапы излучения соответствуют несколько меньшим значениям гамма, а значит и несколько большим частотам, что, в принципе, может объяснить наблюдаемый в полосе тренд по частоте.

Количественное обсуждение указанных наблюдаемых эффектов в рамках данных физических представлений может оказаться полезным для восстановления свойств поверхности пульсара и параметров полярного зазора, в том числе, ускоряющих электрических полей в зазоре, а также механизмов ускорения и излучения в нем.

Литература

1. R.N. Manchester. Radio Emission Properties of Pulsars. 2.6. Giant and Not-So-Giant Pulses. In the book "Neutron Stars and Pulsars" W.Becker (Ed.) Berlin Heidelberg: "Springer-Verlag", 2009, p. 33-35.
2. T.H. Hankins & J.A. Eilek. Ap.J. **670**, 693, 2007; "Forty Years of Pulsars: Millisecond Pulsars, Magnetars and More", Montreal, August 2007: AIP Conf.Proc.983:51-55, 2008; astro-ph/0708.2505.
3. M. Lyutikov. On generation of Crab giant pulses. MNRAS, Vol. **381**, №3, pp. 1190-1196.
4. V.V. Zheleznyakov, V.V. Zaitsev, and E.Ya. Zlotnik. Astronomy letters, **38**, No. 9, 589, 2012.
5. Ardavan, H; Ardavan, A; Singleton, J; Perez, M. MNRAS, 388, Issue 2, 873-883 (2008).
6. В.М. Конторович. ЖЭТФ, **137**, №6, 1107-1114, 2010; astro-ph/0909.1018.
7. В.М. Конторович. Гигантские импульсы пульсаров. ВАНТ, №4 (68), 143-148 (2010); On high brightness temperature of pulsar giant pulses; astro-ph/0911.3272.
8. V.M. Kontorovich and A.B. Flanchik. Physics of neutron stars NS-2011. Book of abstracts, p. 75, <http://www.ioffe.ru/astro/NS2011/index.html>; JENAM-2011. Book of abstracts, p. 70.
9. D. Moffett, T. Hankins. Astrophys.J. 468, 779 (1996).

Приложение

Квазиклассическое движение релятивистского электрона во внешних полях

Хотя прецессия спина релятивистского электрона была исследована весьма давно [П1], влияние спина на его движение было последовательно рассмотрено относительно недавно. Имевшиеся здесь трудности описаны, например, в обзоре [П2]. В значительной мере они определяются тем, что движение в спиновом и координатном пространствах для релятивистского электрона связаны между собой. При квазиклассическом описании необходимо отделить электронные состояния с положительной энергией от позитронных. Это достигается обычно с помощью унитарного преобразования Фолди-Ваутхойзена (ФВ), позволяющего перейти от четырехрядных матриц уравнения Дирака к двухрядным матрицам Паули. При этом одновременно исчезает спиновый вклад в пространственную координату электрона. Однако преобразование ФВ, нарушая симметрию, приводит к нековариантности уравнений и связанному с этим неоднозначному описанию движения электрона.

Существенный прогресс в учете влияния спина на движение электрона был достигнут в последнее десятилетие благодаря использованию топологической (геометрической) фазы Берри (см. обзор [П3]). Мы будем использовать подход, предложенный в работах, цитируемых в [П4]. В них показано, что использование модифицированного преобразования ФВ, включающего магнитное поле, при одновременном введении электромагнитных потенциалов и связности Берри, позволяет построить непротиворечивое гамильтоново-ковариантное описание движения квазиклассического релятивистского электрона. При этом сохраняется спиновый сдвиг ковариантной координаты электрона \mathbf{R} по сравнению с обычной координатой \mathbf{r} [П4]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, \quad \delta\mathbf{r} = \hbar\mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \frac{c^2}{\varepsilon_0(\varepsilon_0 + mc^2)}[\mathbf{p}, \mathbf{S}] \quad (\text{П.1})$$

Сдвиг координаты электрона $\delta \mathbf{r}$ в дальнейшем изложении играет определяющую роль. В формуле (4) через \mathbf{S} обозначено среднее значение спина электрона в единицах \hbar , \mathbf{p} – его импульс, $\varepsilon_0 = \sqrt{(mc^2)^2 + p_z^2 c^2}$. Наличие спинового сдвига приводит к некоммутативности координат электрона, однако в линейном по \hbar приближении эти поправки легко могут быть учтены, а при нашем рассмотрении они несущественны. Аналогичный спиновый сдвиг, вообще говоря, возникает и в каноническом импульсе [П4], однако в интересующей нас геометрии он исчезает.

Фаза Берри в скрещенных полях

Выделяя в фазе ϕ волновой функции электрона $\psi \propto \exp \{i \int \mathbf{R} d\mathbf{p} / \hbar\} \equiv \exp \{i \phi\}$ зависящее от спина слагаемое $\delta\phi$, получим $\delta\phi = \int \delta \mathbf{r} d\mathbf{p} / \hbar = \int \mathbf{A} d\mathbf{p}$, где \mathbf{A} определено выражением (П.1). При дрейфовом движении электрона по круговой орбите, формируемой совместным действием ортогональных друг другу электрического и магнитного полей, получим набег фазы за период обращения $\theta_B = \oint_C \mathbf{A} d\mathbf{p}$. Это приращение фазы зависит только от геометрических характеристик траектории электрона в \mathbf{p} -пространстве, а не от его динамики во времени. Подобные топологические величины, связанные с калибровочной группой преобразований, были введены³ М.Берри [П3], и в настоящее время играют существенную роль в обсуждении физики самых различных квантовых и классических процессов [П5]. Величина θ_B носит название фазы Берри, а вектор \mathbf{A} , аналогичный вектор-потенциалу в электродинамике, – связностью Берри или геометрическим вектор-потенциалом. Преобразуя контурный интеграл в поверхностный, приходим к аналогу магнитного поля $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{A}$, также имеющему чисто геометрический (топологический) смысл.

Орбитальный момент

Зависящий от спина вклад в орбитальный момент $\mathbf{L} = [\delta \mathbf{r}, \mathbf{p}] = \hbar [\mathbf{A}(\mathbf{p}), \mathbf{p}]$ выражается через связность Берри и зависящая от спина часть энергии электрона содержит слагаемое, учитывающее вклад взаимодействия с полем орбитального момента импульса, связанного с вращением квазиклассического электрона. Соответствующий гамильтониан последовательно выведен в [П4]. Из него следует также известное уравнение Баргмана-Мишеля-Телегди [П1] прецессии спина в электрическом и магнитном полях:

$$\dot{\mathbf{S}} = [\mathbf{S}, [\frac{ec}{\varepsilon_0} \mathbf{B} - \frac{ec^2}{\varepsilon_0(\varepsilon_0 + mc^2)} [\mathbf{p}, \mathbf{E}]]]. \quad (\text{П.2})$$

В рассматриваемом нами случае цилиндрической геометрии смерча выполняется условие $[\mathbf{p}, \mathbf{E}] \parallel \mathbf{B} \parallel Oz$, что приводит к решениям $S_z = \text{Const}$. Это соответствует собственным спиновым состояниям электрона в смерче

$S_z = \pm \frac{1}{2}$ и спиновой части энергии, равной $\delta\varepsilon_s = -\frac{ec\hbar mc^2}{\varepsilon_0} S_z B$, приводящей к компенсации нулевых колебаний. Возникающая компенсация позволяет рассмотреть обычное правило квазиклассического квантования $\oint \mathbf{R} d\mathbf{p} = 2\pi \cdot n$, в котором необходимо учесть вклад фазы Берри $\oint \delta \mathbf{r} d\mathbf{p} / \hbar$. Квантование по правилу Бора с учетом спинового вклада (фазы Берри) приводит к

$$\oint \mathbf{r} d\mathbf{p} = 2\pi\hbar \cdot (n - \frac{\theta_B}{2\pi}), \quad \theta_B = \oint \mathbf{A}(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = -2\pi \frac{p_\varphi^2 c^2}{\varepsilon_0(\varepsilon_0 + mc^2)} S_z, \quad (\text{П.3})$$

где скорость движения электрона по орбите должна быть выражена через нерелятивистскую частоту обращения электрона за счет дрейфа в скрещенных полях. В нерелятивистском пределе $p_\varphi c \ll mc^2$ фаза Берри стремится к нулю, что приводит к условию (9), использованному в тексте.

Автор благодарен К.Ю.Блиоху за полезные консультации.

Литература к приложению

- П1. В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц и Л.П. Питаевский. Квантовая электродинамика, М.: Наука, 1989.
 П2. А.А. Померанский, Р.А. Сеньков и И.Б. Хрипович, УФН, **170**, № 10, 1129-1141, 2000.
 П3. М. Berry. Proc.R.Soc.Lond. A **392**, 45-57, 1984; Ming-Che Chang & Qian Niu. J.Phys. **20**, 2008.
 П4. К.Yu. Bliokh. Europhys. Lett. **72** (1), 7-13, 2005; К.Yu.Bliokh, et al. PRL **99**,190404, 2007; К.Yu. Bliokh, et al. Phys. Rev. X **2**, 041011, 2012; Arxiv: 1204.2780.
 П5. Д.Н. Клышко, УФН **163**, № 11, 1-18, 1993; С.И. Виницкий и др.УФН **160**, № 6, 1-49, 1990; Г.Б. Малыкин. УФН **180**, № 9, 965–969, 2010.

³ У Берри были многочисленные предшественники, начиная, по-видимому, с Гамильтона и Зоммерфельда, но общий характер топологической фазы был пояснен именно им.