

# Влияние орбитального движения на коллапс кольцевых вихрей в аккреционном потоке

Е.Ю.Банникова<sup>1,2</sup>, В.М.Конторович<sup>1,2</sup> и С.А.Пославский<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Радиоастрономический Институт НАН Украины

<sup>2</sup>Харьковский национальный университет им. Каразина

## Аннотация

Орбитальное движение вдоль направляющей кольцевых вихрей (закрутка вихря), регулируемое спиральностью, может оказывать существенное влияние на коллапс вихря и его движение в сходящемся (аккреционном) потоке. Получены решения как для одиночного, так и для дипольного тороидального вихря в гамильтоновом представлении. Рассмотренное явление может иметь приложения в астрофизике активных ядер галактик и динамике атмосферных вихрей.

## 1. Введение

Взаимодействие кольцевых вихрей с потоками представляет значительный интерес и имеет многочисленные приложения (см. юбилейный выпуск журнала *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **24**, N1-4, 2010, посвященный 150 летию классической работы Гельмгольца [1], и приведенную там библиографию). В отсутствие потока движение кольца происходит равномерно и прямолинейно вдоль его оси симметрии [4]. Учёт радиального потока, т.е. наличие источника или стока, существенного как в астрофизических, так и в геофизических приложениях, приводит к существенным отличиям [11, 17]. В расходящемся потоке радиус кольца увеличивается и скорость движения замедляется, а в сходящемся потоке ситуация меняется на противоположную: уменьшение радиуса кольца приводит к увеличению его скорости.

В данной работе учитывается движение вдоль образующей кольцевого вихря (закрутка вихря), имитирующее орбитальное движение. Дополнительный интеграл движения, вносимый закруткой, естественно выразить через

циркуляцию скорости по большой окружности тора  $\Gamma_1 = 2\pi R \cdot v_\varphi$ , где  $v_\varphi$  – орбитальная скорость. Соответствующее слагаемое в энергии  $v_\varphi^2/2$ , как известно [18], влияет на скорость движения вихря вдоль его оси симметрии, причем знак противоположен знаку индуцированной скорости. Физика такого влияния может быть понята из следующих соображений. Орбитальное движение порождает центробежные силы в кольце, которые направлены ортогонально завихренности. В этом случае возникает аналог подъемной силы Кутта-Жуковского, ортогональной обеим указанным силам (см. [18]).

Также как и в [17] задача допускает гамильтонову формулировку (см. обзоры [8, 14]), и в рамках представления о тонких тороидальных вихрях [1] имеет точное решение.

Существенно, что в сходящемся потоке, в котором большой радиус тора монотонно уменьшается под воздействием потока, роль орбитального слагаемого по мере приближения к стоку возрастает и может качественно изменить характер движения. В частности, вихрь может поменять движение на обратное – отразиться от стока и уйти на бесконечность.

## 2. Одиночный тороидальный вихрь с закруткой (с орбитальным движением)

Рассмотрим движение вихревого кольца с  $\Gamma < 0$  в сходящемся потоке ( $P = -Q > 0$ ). Вдали от стока при положительных  $z$  кольцо движется в сторону убывающих значений  $z$ . Из (5.2) видно, что в сходящемся потоке в течение всего времени движения радиус вихревого кольца уменьшается. Уравнение траектории вихревого кольца находим из условия  $H = \text{Const}$ .

Собственная скорость кольцевого вихря с закруткой [18]:

$$V = \dot{Z} = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left( \ln \frac{8R}{e^{1/4} a(R)} - \frac{4\pi^2 \overline{v_\varphi^2}}{\Gamma^2} \right), \quad (1)$$

где  $R$  – большой, а  $a(R)$  – малый радиус кольца,  $\Gamma$  – циркуляция вихря по малой окружности,  $v_\varphi$  – орбитальная скорость, черта означает усреднение.

Условие сохранения объема кольцевого вихря определяет  $a(R)$ :

$$Ra^2 = \beta^2 = const \quad (2)$$

Мы будем считать, что циркуляция (средняя) по направляющей тора (по окружности большого радиуса) сохраняется:

$$\Gamma_1^2 = (2\pi R^2) \overline{v_\varphi^2} = \overline{(2\pi R v_\varphi)^2} = const \quad (3)$$

Это находится в соответствии с сохранением спиральности  $S = \int dV \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}$ , главный член в которой при  $\Gamma_1 \gg \Gamma$ , что мы будем предполагать, равен  $S = \Gamma_1 \cdot \Gamma$ . (При этом мы пренебрегли слагаемым порядка  $\Gamma^2$ . Последнее утверждение, впрочем, требует проверки с использованием полных гидродинамических решений).

Канонические уравнения движения одиночного кольцевого вихря с закруткой в поле точечного стока мощности  $P = -Q > 0$ , помещенного в начало координат принимают вид

$$H = \frac{\Gamma R}{4\pi} \ln \frac{8R^{3/2}}{e^{7/4} \beta} + \frac{\beta^2 \Gamma_1^2}{8\pi \Gamma R^2} + \frac{PZ}{4\pi \sqrt{R^2 + Z^2}} \quad (4)$$

$$\dot{Z} = \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial R}; \quad \dot{R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial Z} \quad (5)$$

Подставляя выражение для  $H$ , получаем систему уравнений движения одиночного кольцевого вихря с закруткой в поле точечного стока:

$$\dot{Z} = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left( \ln \frac{8R^{3/2}}{e^{1/4} \beta} - \frac{\beta^2}{R^3} \left( \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right)^2 \right) - \frac{P}{4\pi} \frac{Z}{(R^2 + Z^2)^{3/2}}; \quad \dot{R} = -\frac{P}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \quad (6)$$

Влияние закрутки в сходящемся потоке приводит к тому, что направление движения центра кольца может меняться на противоположное. Действительно, при движении вихревого кольца в аккреционном (сходящемся) потоке радиус кольца уменьшается и, соответственно, возрастает роль закрутки. Формально это видно из (6). Физически это легко понять, т.к. возрастание центробежной силы, порождаемой орбитальным движением, которая ортогональна завихренности, при увеличении кривизны кольца приводит к изменению скорости кольца за счет «подъемной силы» Кутта-Жуковского [18]. Её вклад может привести к изменению направления движения кольца. Будем считать, что в выражении для скорости  $\dot{Z}$

инерционное слагаемое много меньше слагаемого, описывающего вклад закрутки:

$$\ln \frac{8R^{3/2}}{e^{1/4}\beta} \ll \frac{\beta^2}{R^3} \left( \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right)^2 \quad (7)$$

Тогда координаты точек поворота  $\dot{Z} = 0$  определяются из уравнения

$$\frac{\Gamma\beta^2}{R^4} \left( \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right)^2 = - \frac{PZ}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \cdot \quad (8)$$

Пусть вихрь движется в отрицательном направлении оси  $z$ , что соответствует  $\Gamma < 0$ . Если ввести обозначение для комбинации параметров в уравнении (8)

$$\alpha^3 = \frac{\beta^2\Gamma_1^2}{Q\Gamma} > 0, \quad (9)$$

то уравнение (8) для точек поворота приводится к виду

$$x(y - \alpha^2) = \alpha^2, \quad (10)$$

где

$$x = \left( \frac{R}{Z} \right)^2, \quad y = (RZ)^{2/3}. \quad (11)$$

Решение уравнения (10) представляет собой гиперболу  $x = \alpha^2 / (y - \alpha^2)$

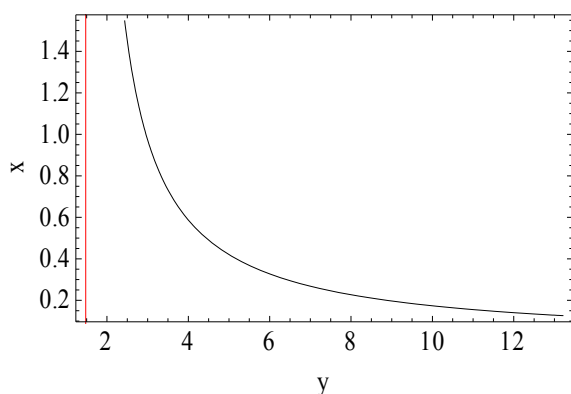


Рис. 1. Решение уравнения для точек поворота кольцевого вихря в аккреционном потоке при наличии орбитального движения в переменных (11). Красным показана асимптота  $y = \alpha^2$  гиперболы.

Нетрудно найти асимптотики решения уравнения для точек поворота в интересующих нас координатах  $R$  и  $Z$ . При  $y \rightarrow \alpha^2$ ,  $x \rightarrow \infty$  это гиперболы  $R = \frac{\alpha^3}{Z}$ , при  $y \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow 0$  это корневая зависимость  $R = \alpha^{3/4} \sqrt{Z}$ . Минимальное значение кривой достигается при  $R_{\min}$  порядка  $\alpha^{3/2}$  (см. Рис. 3). Рассмотрение справедливо, если выполняется дополнительное условие тонкого кольца. При  $\beta^2 \ll \alpha^{9/2}$  это

условие выполняется вплоть до значения  $R_{\min}$ . Одновременно должно выполняться условие преобладания закрутки (7).

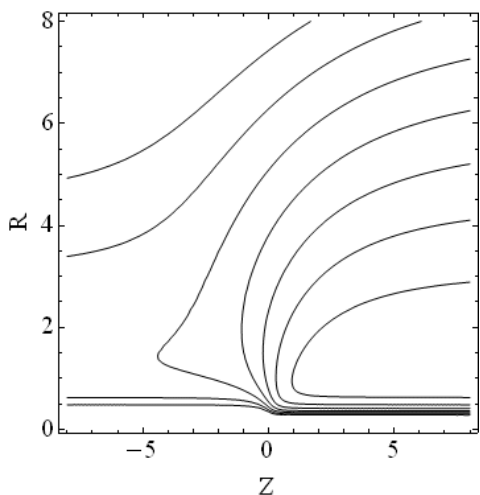


Рис. 2. Траектории, соответствующие уровням гамильтониана  $H=H_0-0.4k$  ( $H_0=1.3$ ,  $k=[-2..4]$ ) для системы со следующими параметрами:  $\Gamma = -0.05 \times 4\pi$ ,  $\Gamma_1=10\Gamma$ ,  $Q=4\pi$ ,  $\beta=0.1$ . Видны траектории, на которых вихрь изменяет направление движения («отражается» от стока). Знак  $\Gamma_1$  несущественен (входит её квадрат), что соответствует и физической трактовке, см. текст).

Численное решение для точек поворота приведено на рисунке

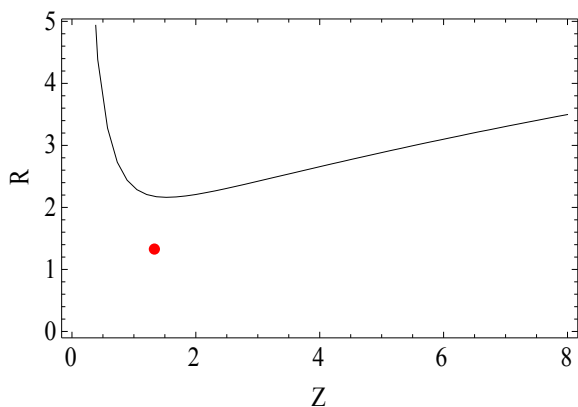


Рис. 3. Линия точек поворота одиночного вихря как функция расстояния вихря от стока в начале координат. Минимум достигается при  $R_{\min} \approx \alpha^{3/2}$ . При меньших радиусах отражение от стока отсутствует. Красной точке соответствуют координаты  $(\alpha^{3/2}, \alpha^{3/2})$

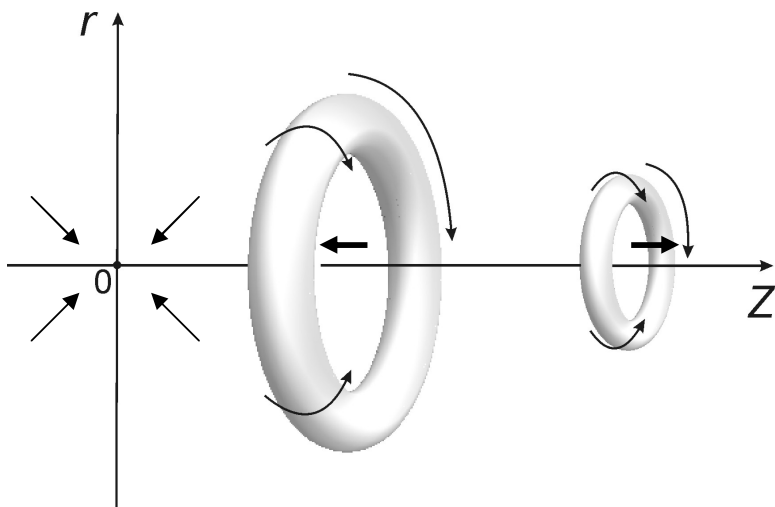


Рис. 4. Отражение одиночного кольцевого вихря с закруткой в фоновом радиальном потоке от стока, центр которого находится в начале координат. Схема. Утолщение отраженного вихря не отображено. При  $\Gamma < 0$  вихрь движется справа налево вдоль оси  $z$ . Сжатие по большому радиусу аккреционным потоком усиливает роль орбитального вращения, что меняет направление движения кольца на обратное (ср. соответствующие траектории на Рис.2).

## Дипольный тороидальный вихрь с закруткой

В связи с астрофизическими приложениями [12, 16,] представляет интерес система из двух зеркально симметричных кольцевых вихрей (дипольный тороидальный вихрь). В [13] исследовалась динамика дипольного тороидального вихря в радиальном потоке в плоском 2D описании, когда кольцевые вихри моделируются парами точечных вихрей. В отсутствие потока, как давно известно, начиная с работы Гребли [8], в результате лобового столкновения компоненты пар меняются местами, а новые пары разлетаются под прямым углом к направлению движения с исходными по величине скоростями. Присутствие центрального радиального потока приводит к эффекту либо замедления (расходящийся поток), либо ускорения (сходящийся поток) разлетающихся в противоположные стороны пар [13]. При этом скорость выбрасываемой пары в сходящемся (аккреционном) потоке зависит от отношения мощности потока к интенсивности вихря и может достигать больших значений. В [12] было показано, что эффект ускоренного выброса вихревой пары в определенном смысле сохраняется и для более сложного аккреционного течения: произведение скоростей выброшенных пар определяется только монополюсной составляющей потока.

Эти решения могут интерпретироваться как движение и распад на составляющие дипольного тороидального вихря. С этой точки зрения в [13, 16] в 2D-описании показано, что дипольный тороидальный вихрь в аккреционном потоке сжимается по большому радиусу и, распадаясь, порождает двусторонний выброс составляющих его кольцевых вихрей по оси симметрии системы. Выброшенные вихри приобретают дополнительную скорость, “черпая энергию” от потока. Существенно, что в определенной области параметров поведение 3D вихрей существенно отличается от их поведения в плоской 2D модели [17]. А именно, в мощном сходящемся потоке возникает коллапс с затягиванием вихрей в область стока. При параметрах, близких к условиям коллапса, возможно попятное движение вихрей между точками поворота. Мы рассмотрим эту задачу с учетом

закрутки, влияние которой в аккреционном потоке также как и для одиночного вихря существенно.

### Гамильтонова формулировка задачи

Уравнения для большого радиуса  $R(t)$  тонкого кольцевого вихря и его положения относительно оси симметрии  $Z(t)$  при наличии соосных ему вихрей были получены еще Гельмгольцем [1]. Дайсон [3] показал, что этим уравнениям соответствует интеграл энергии, благодаря чему в последующих работах им была придана гамильтонова форма [8].

Мы помещаем дипольный тороидальный вихрь, описанный выше, в радиальный поток (сходящийся или расходящийся), с функцией тока Стокса

$$\psi = -\frac{Q}{4\pi} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (2.1)$$

Здесь  $Q$  – мощность источника. (В случае сходящегося «аккреционного» потока со стоком в начале координат мы будем использовать также положительную мощность стока  $P = -Q > 0$ ). При наличии потока уравнения по-прежнему остаются гамильтоновыми. В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть их для одного кольцевого вихря из пары в полупространстве  $z > 0$  с большим радиусом  $R$  и  $z$ -координатой  $Z$

$$\dot{R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial Z}, \quad \dot{Z} = \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial R} \quad (2.2)$$

с функцией Гамильтона  $H$

$$H = \frac{\Gamma R}{4\pi} \left( \ln \frac{8R}{e^{7/4} a(R)} \right) - \frac{\Gamma R}{4\pi} C(k) + \frac{P}{4\pi} \frac{Z}{\sqrt{Z^2 + R^2}} + \frac{\beta^2 \Gamma_1^2}{8\pi \Gamma R^2}. \quad (2.3)$$

Здесь  $C(k)$  – представляет собой введенную еще Гельмгольцем комбинацию эллиптических интегралов

$$C(k) = \left( \frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k), \quad (2.4)$$

где  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл первого, а  $E(k)$  – второго рода,  $k$  – их модуль:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}; \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha; \quad k^2 = \frac{R^2}{R^2 + Z^2} \quad (2.5)$$

Мы используем эти уравнения с дополнительным условием сохранения объёма кругового тора  $2\pi^2 a^2 R = \text{Const}$  при однородной завихренности [8] вида  $a = \beta / \sqrt{R}$ , где  $a = a(R)$  малый радиус тора. Константа  $\beta$  определяется начальным условием  $\beta = a_0 \sqrt{R_0}$ . Мы учли также, что соосные кольцевые вихри имеют в дипольном тороидальном вихре противоположные направления вращения, равные радиусы и противоположные, но равные по модулю циркуляции  $\Gamma$ . Последнее слагаемое представляет собой вклад орбитального движения (закрутку вихря).

### Влияние закрутки на параметры выброса

Движению вихря по траектории соответствует постоянство функции Гамильтона  $H = \text{Const}$ , которая т.о. фиксирует выбранную траекторию. Исходным состоянием будем считать вихрь радиуса  $R_0 \gg a_0$ . Кольцевые вихри при этом находятся друг от друга на малом расстоянии  $2Z_0$ , удовлетворяющем условию  $R_0 \gg Z_0 > a_0$ . Этому соответствуют асимптотики эллиптических интегралов [6], входящих в гамильтониан, при  $k \rightarrow 1$  :

$$K(k \rightarrow 1) \rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1-k^2}, \quad E(1) = 1 \quad (3.1)$$

Выброшенная в положительном направлении оси симметрии  $z$  компонента на больших расстояниях  $Z_\infty \gg R_\infty$  описывается асимптотиками интегралов при  $k \rightarrow 0$ :

$$K(0) = \frac{\pi}{2}, \quad E(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \left\{ \frac{1}{k} [K(k) - E(k)] \right\} \rightarrow k \frac{\pi}{4} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

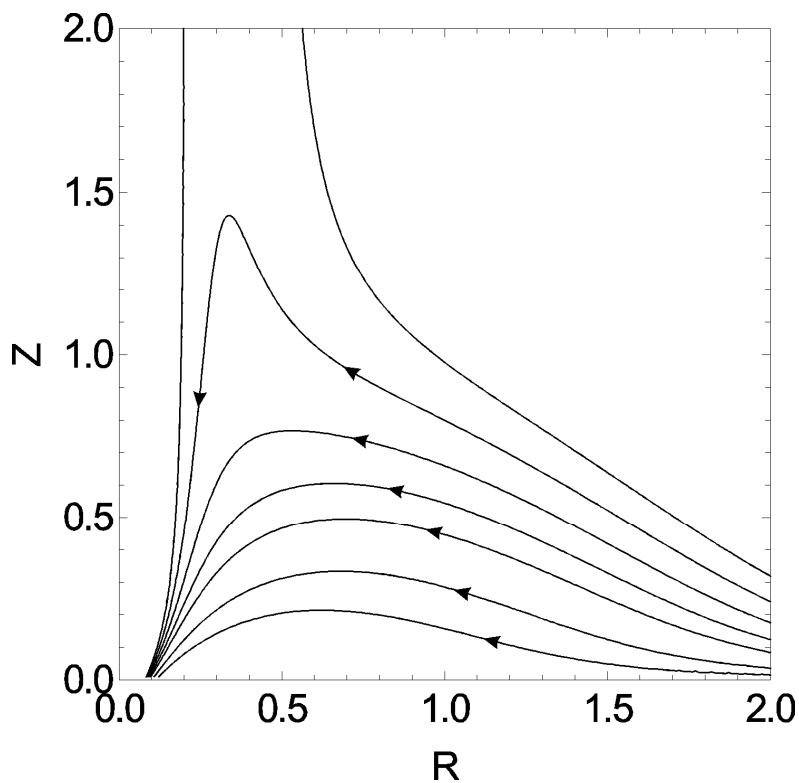
Используя соотношения (3.1) – (3.2), находим асимптотики функции Гамильтона для начального ( $R \rightarrow \infty, k \rightarrow 1$ ) и конечного ( $Z \rightarrow +\infty, k \rightarrow 0$ ) состояний кольцевого вихря ( $z > 0$ ).

Закрутка вносит существенный вклад, влияя на условия коллапса, что видно из приводимых ниже фазовых портретов – траекторий в плоскости  $R$ - $Z$ .

Можно полагать, что в определенной области параметров закрутка способствует выбросу и сдвигает положение коллапса. Заметим, что в выбросах активных ядер галактик наблюдаются и возвратные движения [20], которые обычно интерпрети-



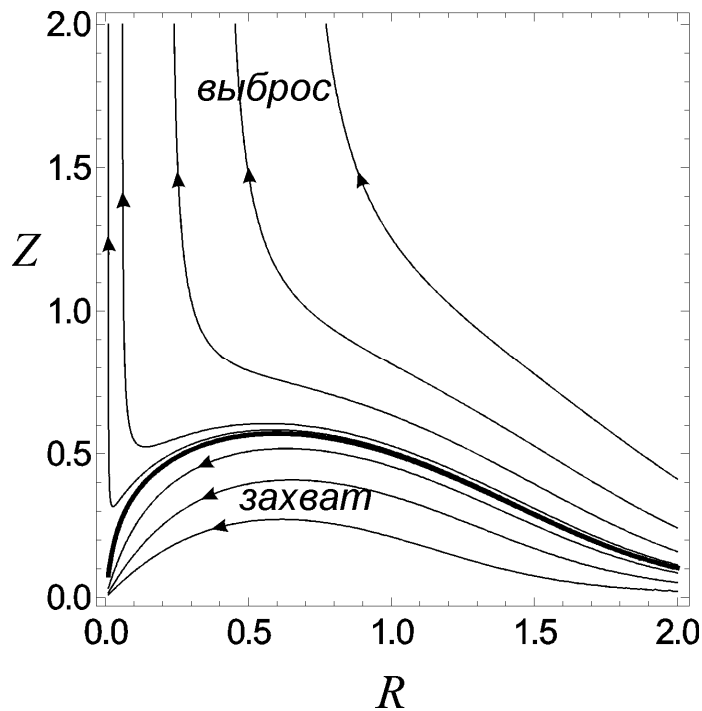
руются как результат проекции. Мы видим, что при выбросе вихрей такие движения могут быть вполне реальными.



**Рис. 5. Влияние закрутки на движение компоненты дипольного тороидального вихря.**

Фазовый портрет в  $R$ - $Z$  плоскости для параметров  $\Gamma=2\pi$ ;  $\Gamma_1=40\pi$ ;  $P=2\pi$ ;  $\beta=0.001$ .

Видно влияние закрутки на коллапс вихря. В частности, появляются траектории с возвратным движением по оси  $z$ . Для сравнения ниже приведен фазовый портрет для тех же параметров в отсутствие закрутки (см. рис. 6).



**Рис. 6. Траектории дипольного тороидального вихря в отсутствие закрутки [17] при тех же остальных параметрах, что и на Рис.5.**

Жирная линия – сепаратриса.

## Литература

1. Н. Helmholtz, J. Reine Angew. Math. **55**, 25–55, 1858.  
(Г. Гельмгольц. Основы вихревой теории. Москва-Ижевск, ИКИ, 2002.)
2. W. Grobli, Vierteljahrsh. d. Naturforsch. Geselsch. **22**, 37; 129 (1877).
3. F. Dyson, The Potential of an Anchor Ring. Phil. Tran. Roy. Soc. A, **184**, 43-96 (1892)
4. Г. Ламб, Гидродинамика, Москва, ГИТТЛ (1947).
5. J. Norbury, J. Fluid Mech. **57**, 417 (1973)
6. М. Абрамовиц, И. Сиган, Справочник по специальным функциям. Москва, Наука, 1979.
7. В.И. Петвиашвили, О.А. Похотелов, Уединенные волны в плазме и атмосфере. Москва, 1989.
8. В.В. Мелешко, М.Ю. Константинов, Динамика вихревых структур. Киев, Наукова Думка, 1990.
9. Ю.А. Степанянц, А.Л. Фабрикант, Распространение волн в сдвиговых потоках. Москва, Наука, 1996.
10. С.В. Алексеенко, П.А. Куйбин, В.Л. Окулов, Введение в теорию концентрированных вихрей. Москва-Ижевск, Институт Компьютерных Исследований, 2005.
11. Е.Ю. Банникова, В.М. Конторович, Г.М. Резник, ЖЭТФ, **132**, №3, 615 (2007).
12. Е.Ю. Банникова, В.М. Конторович, Астрон. журнал, **84**, №4, с. 298 (2007);  
astro-ph/0707.1478
13. E.Yu. Bannikova & V.M. Kontorovich, Physics Letters A, **373**, 1856 (2009).
14. V.V. Meleshko, Theor. Comput. Fluid Dyn.: 150 years after Helmholtz, **24**, (2010).
15. G. Reznik & Z. Kizner, *ibidem*, **24**, 65 (2010).
16. S.A. Poslavsky, E.Yu. Bannikova, and V.M. Kontorovich, Astrophysics, **53**, No. 2, 174 (2010).
17. Е.Ю. Банникова, В.М. Конторович, С.А. Пославский, ЖЭТФ, **144**, 438 (2013)
18. Ф.Дж. Сэффмэн, Динамика вихрей. Москва, «Научный мир» (2000).
19. Э.А. Пашицкий, ЖЭТФ, **137**, Вып.6, 1175-1194 (2010).
20. M.L. Lister, Astron. J. **146**, 120L (2013).