

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.30:546

**ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
В МЕТАЛЛАХ***В. М. Конторович*

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	265
1. Слагаемые в упругой силе, обусловленные электронами проводимости	267
2. Линейная теория (справочный раздел)	269
3. Кинетическое уравнение, энергия и функция Гамильтона	272
4. Законы сохранения	273
5. Электронное увлечение решетки и столкновительная передача импульса	275
6. Электроакустические кинетические коэффициенты	278
7. Динамические модули упругости металла	280
8. Деформационный потенциал	283
9. Свойства симметрии	286
10. Кинетические коэффициенты в сильном магнитном поле	288
11. Концепция неэффективности и особые случаи эффективного взаимодействия электронов со звуком	290
12. Поглощение и дисперсия продольного и поперечного звука в металлах в сильном магнитном поле	295
13. Вклад электрических полей во взаимодействие электронов со звуком	298
Закключение	304
Цитированная литература	305

ВВЕДЕНИЕ

В чистых металлах при низких температурах, когда длины свободного пробега электронов проводимости оказываются чрезвычайно велики, существенно превышая не только межатомные расстояния, но и характерные масштабы изменения упругих полей (например, длину звуковой волны в металле), электронный вклад в силы упругости становится нелокальным и требует особого рассмотрения. Медленные процессы релаксации в электронном газе, который при деформации решетки выводится из состояния равновесия, превращают теорию упругости в кинетическую теорию: наряду с динамическим уравнением движения решетки должно рассматриваться уравнение для функции распределения (в квантовом случае — для матрицы плотности) квазичастиц — электронов проводимости. Силы, фигурирующие в уравнениях движения решетки, оказываются функционалами электронного распределения. Становится существенной роль закона дисперсии и внешнего магнитного поля, влияющего на динамику электронов.

Наконец, уравнения Максвелла описывают сопровождающие деформацию самосогласованные электромагнитные поля, возникающие при неравновесных состояниях электронной подсистемы.

В механических свойствах при указанных условиях начинают проявлять себя резонансные и релаксационные параметры вырожденного электронного газа металла, такие как длина свободного пробега l , радиус орбиты в магнитном поле r , скин-глубина δ , частота соударений ν , циклотронная частота Ω и т. п. Причем, эти длины значительно превышают межатомные

расстояния ($l, r, \delta \gg a$), а частоты значительно ниже атомных и плазменных частот ($\nu, \Omega \ll \omega_{ат}, \omega_p$). Впервые подобное влияние электронов проводимости было обнаружено в экспериментах по поглощению ультразвука и с успехом использовалось для диагностики электронного газа в металлах *).

Однако теория долгое время продолжала оставаться несамосогласованной в том смысле, что поглощение ультразвука вычислялось по скорости возрастания энтропии в электронной подсистеме металла, а звуковое поле достаточно было считать заданным. Самосогласованный подход был применен в модели свободных электронов Стайнбергом¹⁶, а в магнитном поле использовалось описание, эквивалентное магнитной гидродинамике, с помощью которой Альфер и Рубин¹⁷ рассмотрели влияние поля на скорость звука, а в работах¹⁸ было рассмотрено электромагнитное возбуждение звука в металле.

Переход к другому кругу задач (измерение дисперсии скорости звука, электромагнитное возбуждение звука в металлах бесконтактным способом, изучение электронного торможения дислокации, эффективного взаимодействия электронов со звуком, электронного вращения плоскости поляризации звука и т. п.) стимулировал интерес к самосогласованному описанию, выводу и использованию уравнений упругости, справедливых при достаточно общих предположениях современной теории металлов¹⁹⁻²¹, чему и посвящен данный обзор.

С другой стороны, рассматриваемый круг вопросов связан с общей проблемой электрон-фононного взаимодействия и позволяет достаточно подробно обсудить ее длинноволновый аспект.

Аналізу сил, действующих в деформированном металле, посвящено довольно большое число работ¹⁹⁻³⁰, на некоторых из них мы остановимся ниже, ограничившись немодельным макроскопическим подходом в квазиклассической области.

Итак, замкнутой системой уравнений в случае достаточно больших длин пробега электронов является система кинетического уравнения для электронов проводимости, уравнений Максвелла и уравнений теории упругости. Такая система была предложена Силиным¹⁹ (при некоторых ограничениях на топологию ФП (см. п. 5) в бесстолкновительной области), а при произвольной топологии и с учетом столкновительной передачи импульса выведена Конторовичем²⁰. Аналогичная система приведена Власовым и Филипповым²¹.

Структура обзора такова. В гл. 1 получено уравнение упругости с использованием лишь закона сохранения импульса при феноменологической записи вклада электронов проводимости. В гл. 2 для удобства использования приведена полная система линеаризованных уравнений, вывод которой приводится позднее (гл. 3, 4). В гл. 5 сравниваются разные формы записи уравнений упругости. Далее, через кинетические коэффициенты в деформированном металле (гл. 6) записываются уравнения для упругих волн (гл. 7) с учетом вклада электронов проводимости и возбуждаемых ими полей. В гл. 8

*) Поглощение ультразвука в твердом теле микроскопически впервые рассматривалось Ландау и Румером¹ для идеальных диэлектриков. Исследования поглощения ультразвука в проводниках были начаты Ахиезером², распространены на случай сильной пространственной дисперсии Пиппардом³ и Ахиезером, Кагановым и Любарским⁴ и приобрели затем широкий размах в связи с проблемой восстановления энергетического спектра и связанными с ней исследованиями (гл. образом И. М. Лифшица и его школы) по динамике квазичастиц с произвольным законом дисперсии⁵. Открытие Боммелем магнитоакустических осцилляций и отмеченная Пиппардом возможность восстановления по ним параметров ферми-поверхности стимулировали интенсивное изучение поглощения ультразвука в магнитном поле (см. ссылки в обзоре⁶⁻¹⁰). Последнее стало возможным благодаря прогрессу, достигнутому в изучении гальваномагнитных и резонансных явлений в металлах¹¹⁻¹³. Общая теория поглощения ультразвука в металлах в магнитном поле, построенная В. Л. Гуревичем¹⁴, потребовала уточнения понятия деформационного потенциала, введенного в² и в¹⁵. Была выяснена существенная роль возбуждаемых звуком электрических полей.

обсуждается деформационный потенциал и его свойства симметрии (гл. 9), в том числе — роль симметрии направления магнитного поля (гл. 10). В гл. 11—13 рассмотрены примеры «эффективного» взаимодействия электронов со звуком, роль электрических полей, сопровождающих упругую волну.

1. СЛАГАЕМЫЕ В УПРУГОЙ СИЛЕ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ЭЛЕКТРОНАМИ ПРОВОДИМОСТИ

На квазичастицы — электроны проводимости — в деформированном металле, кроме сил Лоренца, включающих макроскопические электромагнитные поля, действуют также силы, вызванные непосредственным взаимодействием электронов и решетки благодаря изменению микроскопических атомных электрических полей. В свою очередь на решетку со стороны электронного газа действует обратная сила, что приводит в уравнениях упругости к появлению слагаемых, являющихся средними по локальному распределению квазичастиц в данной точке металла.

Силы, действующие со стороны деформированной решетки на электроны проводимости, носят электромагнитный характер, но только сглаженные макроскопические поля могут быть учтены с помощью уравнений Максвелла.

Весьма существенно, что вклад микроскопических атомных полей решетки для деформаций, меняющихся на расстояниях, значительно превышающих межатомные (рис. 1), может быть учтен в самом общем виде через изменение закона дисперсии электрона проводимости²

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \delta\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (1.1)$$

и замкнутая теория, таким образом, может быть построена чисто феноменологически. Электроны проводимости при этом по-прежнему можно считать идеальным газом (ферми-жидкостью) квазичастиц в самосогласованных электромагнитном и упругом полях, что позволяет использовать хорошо разработанный формализм электронной теории металлов^{5, 12}. Наиболее общий и, по-видимому, самый простой вывод выражения для вклада электронов проводимости в силу состоит в использовании связи между средним импульсом частиц и квазичастиц²⁰, впервые примененный Ландау в теории ферми-жидкости^{31, 32} для определения связи эффективной массы возмущений в жидком He³ с массой атома гелия. В нашем случае функция распределения квазичастиц $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ связана с плотностью свободных электронов $n(\mathbf{r}, t)$ условием нормировки

$$\langle\langle f \rangle\rangle \equiv \frac{2}{h^3} \int d\mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = n(\mathbf{r}, t). \quad (1.2)$$

Интегрирование ведется в пределах зоны Бриллюэна*), подразумевается суммирование по зонам проводимости.

Поток квазичастиц $\langle\langle \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p} \rangle\rangle f$ равен вследствие уравнения непрерывности потоку частиц — электронов. В связи с этим плотность электрического тока (электронного) равна

$$\mathbf{j}^{\text{эл}} = e \langle\langle \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} f \rangle\rangle, \quad (1.3)$$

*) В лабораторной системе координат интегрирование ведется по области, в которую переходит зона Бриллюэна при деформации решетки; см. п. 8.

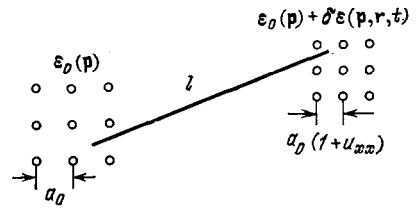


Рис. 1. Распределение электронов устанавливается на длинах пробега l , а закон дисперсии — на атомных расстояниях a .

а плотность потока массы, т. е. плотность импульса свободных электронов, выраженная через функцию распределения и закон дисперсии квазичастиц, равна (e и m — заряд и масса свободного электрона)

$$\pi^{\text{эл}} = m \left\langle \left\langle \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} f \right\rangle \right\rangle. \quad (1.4)$$

Видно, что оба выражения для потоков ($\mathbf{j}^{\text{эл}}$ и $\pi^{\text{эл}}$) обладают одной и той же общностью.

Отметим, что в кристаллах, в отличие от жидкого гелия, ввиду того, что \mathbf{p} представляет собой квазиимпульс, $\langle \langle \mathbf{p} f \rangle \rangle = m \langle \langle (\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}) f \rangle \rangle$, вообще говоря, отлично от нуля, и поэтому из (1.4) не вытекает каких-либо общих следствий для эффективной массы возбуждений, аналогичных тем, которые были найдены Ландау для He^3 .

Удобно выразить плотность импульса через плотность тока:

$$\pi^{\text{эл}} = \frac{m}{e} \mathbf{j}^{\text{эл}}. \quad (1.5)$$

Учитывая электронейтральность металла при интересующих нас относительно низких частотах ($\omega \ll \omega_{\text{pe}}$) и упоминавшуюся выше локальность деформационного взаимодействия, получим уравнение движения в виде ²⁰

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik}^{\text{реш}} + \sigma_{ik}^{\text{эл}}) + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}]_i; \quad (1.6)$$

здесь $\pi = \pi^{\text{реш}} + \pi^{\text{эл}}$ — суммарная плотность импульса решетки ($\pi^{\text{реш}} = \rho_{\text{реш}} \dot{\mathbf{u}}$) и электронов, $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{\text{эл}} - en\mathbf{u}$ — плотность тока с учетом ионного вклада, \mathbf{u} — локальная скорость деформации, \mathbf{u} — вектор смещения. Последнее слагаемое есть, очевидно, средняя сила Лоренца, действующая на электронейтральную электронно-ионную систему. Тензор напряжений содержит электронные слагаемые, представляющие собой средние с электронной функцией распределения в данной точке решетки в данный момент времени (которую по причинам, обсуждаемым ниже (гл. 2, 3), обозначим здесь через f'). Раскладываем усредненное выражение по $\partial u_i / \partial x_k$:

$$\sigma_{ik}^{\text{эл}} = \langle \langle \lambda_{ik} f' \rangle \rangle + \langle \langle \mu_{iklm} f' \rangle \rangle \frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \dots \quad (1.7)$$

Выражая $\rho_{\text{реш}}$ через плотность металла $\rho = \rho_{\text{реш}} + mn$ и используя определения $\pi^{\text{реш}}$, $\pi^{\text{эл}}$ и \mathbf{j} , перепишем (1.6) в виде

$$\ddot{u}_i = f_i, \quad f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}]_i - \frac{m}{e} \frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \langle \lambda_{ik} f' \rangle \rangle, \quad (1.8)$$

где в электронном тензоре натяжений $\sigma_{ik}^{\text{эл}}$ выделен главный член разложения по u_{ik} , а остальные наряду с $\sigma_{ik}^{\text{реш}}$ включены в σ_{ik} . Слагаемое $(m/e) \partial j / \partial t$, содержащее массу свободного электрона, ответственно за эффект Стюарта — Толмена. Отметим, что в отличие от слагаемых, описывающих деформационное взаимодействие, оно входит в уравнение точно *). Как следует из локальности деформационного взаимодействия применительно к моменту импульса ³³, тензор $\sigma_{ik}^{\text{эл}}$, а с ним, ввиду произвольности f' , и $\lambda_{ik}(\mathbf{p})$ — симметричен. Это тензор деформационного потенциала, через который, как будет видно (гл. 3), выражается изменение энергии электрона при деформации решетки в сопутствующей (локальной) системе координат, а f' — функция распределения квазичастиц в этой системе, к деталям обсуждения которой мы перейдем в следующих разделах. Для того, чтобы выяснить вид $\sigma_{ik}^{\text{эл}}$, можно (в случае упругого рассеяния) воспользоваться законом сохранения энергии ³⁴ (см. гл. 4). При произвольном рассеянии для этой же цели можно

*) В ряде задач это слагаемое мало и, разумеется, тогда его можно опустить. Принципиально важен изложенный выше подход, в результате которого оно появилось в уравнении (1.8), так как при этом удается обойти целый ряд трудностей, связанных с произвольностью закона дисперсии электрона (см. ниже, гл. 5).

использовать условие минимума неравновесной свободной энергии нашей подсистемы, взаимодействующей с термостатом. Здесь вывод несколько более громоздок, но результат тот же ²⁰. Наконец, к тому же результату приводит стандартное определение силы при помощи варьирования внутренней энергии по смещению при постоянной энтропии ²⁰. Заметим, что полная энергия определяется в лабораторной л-системе. Вычисления же удобно проводить в сопутствующей локальной с-системе координат. Именно в этой системе локально сохраняется периодичность и естественным образом вводится закон дисперсии электрона проводимости.

Уравнение (1.8) в простейших ситуациях допускает непосредственное обобщение на квантовый случай ^{27, 35} заменой

$$\langle\langle Af \rangle\rangle \equiv \frac{2}{\hbar^3} \int dp Af \rightarrow \text{Sp } \hat{A} \hat{f}, \quad (1.9)$$

где \hat{f} — одночастичная матрица плотности, удовлетворяющая квантовому кинетическому уравнению. Оно применимо и в ферми-жидкостном случае *) ³¹, что непосредственно можно усмотреть в вариационном варианте вывода, так как при этом фиксирование энтропии осуществляется фиксированием функции распределения при варьировании и, следовательно, при этой процедуре не может проявиться отличие от чисто газового случая. Заметим, что уравнение (1.8) **) пригодно и для рассмотрения чисто электронных нелинейных эффектов (например, связанных с резонансным захватом электронов упругой волной ³⁸).

Уравнение (1.8) непосредственно обобщается также на неидеальные кристаллы, содержащие дислокации ³⁹, при их континуальном описании ^{33, 40}.

2. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ (СПРАВОЧНЫЙ РАЗДЕЛ)

В этом разделе мы приведем сводку уравнений, вывод которых будет дан позднее, и основные обозначения.

В металлах отклонение распределения электронов проводимости от локально-равновесного (в том числе за счет деформирования кристалла) приводит к возникновению значительных сил, действующих со стороны электронов на решетку. Эти силы могут быть выражены в терминах функционалов от неравновесной части χ электронной функции распределения. Одним из функционалов является полная плотность тока \mathbf{j} , другим — плотность деформационной силы $\mathbf{f}^{\text{п}}$:

$$\mathbf{j} = -e \langle v \chi \rangle, \quad \mathbf{f}_i^{\text{п}} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \Lambda_{ik} \chi \rangle. \quad (2.1)$$

Замкнутая система уравнений состоит из уравнений упругости (с учетом сил, действующих со стороны электронов на решетку) и кинетического уравнения. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{u}_i &= \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} + D_i, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}] - \frac{m}{e} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \mathbf{f}^{\text{п}}, \\ \left(\frac{d}{dt_0} + \hat{v} \right) \chi &= g \equiv -e v \tilde{\mathbf{E}} - \Lambda_{ik} \dot{u}_{ik}, \\ \tilde{\mathbf{E}} &= \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{H}] - \frac{m \ddot{\mathbf{u}}}{e}, \quad \Lambda_{ik}(\mathbf{p}) \equiv \lambda_{ik}(\mathbf{p}) - \frac{\langle \lambda_{ik} \rangle}{\langle 1 \rangle}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

*) Закон дисперсии при этом является функционалом от f , что, вообще говоря, кроме перенормировок приводит к новым ветвям колебаний на высоких частотах ^{31, 36, 11}, вблизи от особенностей может влиять на аналитические свойства кинетических коэффициентов ¹²⁰.

**) Или (1.6), если разложение (1.7) невозможно (как, например, при появлении сверхструктуры или снятия вырождения в электронном спектре при деформации).

причем входящие сюда токи и поля связаны уравнениями Максвелла *)

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

а (2.1) играет роль материальных уравнений.

Скобки в (2.1), (2.2) означают усреднение по невозмущенной ферми-поверхности (ФП) (dS_p — элемент ФП):

$$\langle \psi \rangle \equiv \frac{2}{h^3} \int \frac{dS_p}{v} \psi; \quad (2.4)$$

$\langle 1 \rangle$ — плотность состояний на ФП, а $\chi \partial f_0 / \partial \varepsilon$ ($\langle \chi \rangle = 0$) представляет собой отклонение функции распределения от локально равновесной (см. ^{6, 20, 22}), \hat{v} — линеаризованный оператор столкновений **, $e < 0$ и m — заряд и масса электрона, λ_{ikh} — решеточный тензор модулей упругости, учитывающий и равновесный вклад от электронов проводимости;

$$\frac{d}{dt_0} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}, \quad (2.5)$$

причем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \equiv \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}},$$

где τ — время обращения по орбите в магнитном поле.

Деформационный потенциал $\lambda_{ikh}(\mathbf{p})$ учитывает изменение энергетического спектра электрона в деформированной решетке, который в линейном приближении в сопутствующей с-системе (что обозначено штрихами) имеет вид

$$\varepsilon'(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) = \varepsilon_0(\mathbf{p}') + \lambda_{ikh}(\mathbf{p}') u_{ik} - m \dot{u} v'. \quad (2.6)$$

Последнее слагаемое в (2.6) связано с неинерциальностью системы отсчета и учитывает действующую в этой системе силу Даламбера $-m\ddot{u}$, где m — масса свободного электрона ⁴¹.

Переход в с-систему (см. ниже, (3.3) и гл. 8), в которой формулируется закон дисперсии электронов проводимости, является существенным пунктом используемого феноменологического подхода ²⁰. Идея такого перехода восходит к Л. Д. Ландау ***). При этом мы не только исключаем движение деформированной решетки, но и с требуемой точностью «распрямляем» ее (локально), что следует из свойств преобразования (см. гл. 8), причем зона Бриллюэна обладает центром симметрии, а закон дисперсии выражается посредством функций $\varepsilon_0(\mathbf{p}')$ и $\lambda_{ikh}(\mathbf{p}')$, v' , периодичных по \mathbf{p}' , с периодом обратной решетки. Напротив, в лабораторной л-системе функция Гамильтона $\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ электрона, равная (см. ²⁰)

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \varepsilon_0(\mathbf{p}) + (\lambda_{ikh} + p_i v_{ik}) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + (p_i - m v_i) \dot{u}_i, \quad (2.7)$$

не совпадает с его энергией, причем обе эти величины, как и должно быть в деформированной решетке, не являются периодическими функциями квазиимпульса \mathbf{p} . Соответствующий этому рассмотрению квантовый подход развит в работе В. Гуревича, Ланг и Павлова ^{42, 43}, где получено, в частности, микроскопическое выражение для $\lambda_{ikh}(\mathbf{p})$.

Деформационная сила $\mathbf{f}^{\text{д}}$ (2.1) играет важную роль в рассматриваемой теории. Впервые подобное слагаемое фигурировало в работе Силина ¹⁹.

*) В записи уравнений Максвелла (2.3) автоматически учитывается условие электронейтральности металла, которое в динамическом случае эквивалентно условию $\text{div } \mathbf{j} = 0$ ($\omega \neq 0$).

**) Здесь, в отличие от (1.8), где нет подобных ограничений, предполагается, что рассеиватели (например, примеси) полностью увлекаются при движении решетки.

***) Ландау высказал ее на семинаре в ИФП при обсуждении первой работы ¹⁴. Впоследствии им были написаны формулы, соответствующие такому переходу, сохранившиеся в записной книжке И. М. Халатникова. Эти выражения были получены также в работах ^{14, 20}, где использована высказанная Ландау идея.

Так же как и ток \mathbf{j} , она имеет характер электронного потока и, как мы покажем в следующем разделе, входит существенной частью в соотношения Онзагера. В силу условия электронейтральности, обсуждавшегося Ахиезером, Кагановым и Любарским⁴, в (2.1) вместо λ_{ik} удобно писать перенормированный тензор L_{ik} (см. (2.2)). Так же как и в слагаемые в силе, пропорциональные току, в $\mathbf{f}^{\text{ад}}$ входит только часть силы, обусловленная отклонением от локального равновесия. Равновесная же часть включена в перенормировку тензора напряжений σ_{ik} .

Сила \mathbf{D} , описывающая вклад от неравновесных электронов и электромагнитных полей, имеет простой физический смысл. Представим деформационный потенциал $\lambda_{ik}(\mathbf{p})$ в виде двух слагаемых:

$$\lambda_{ik}(\mathbf{p}) = -mv_i v_k + L_{ik}(\mathbf{p}) u_{ik}, \quad (2.8)$$

где первое слагаемое описывает поток импульса при свободном движении электрона, а $L_{ik}(\mathbf{p}) u_{ik}$ представляет собой работу, совершаемую над электроном с квазиимпульсом \mathbf{p} при деформировании решетки⁴³. Это позволяет дать простое истолкование отдельных слагаемых в силе. Перепишем (2.2) в виде

$$\rho_{\text{реш}} \ddot{u}_i = \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} + D'_i, \quad (2.9)$$

$$D'_i = \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}]_i - \frac{m}{e} \frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle mv_i v_k \chi \rangle - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle L_{ik} \chi \rangle.$$

Первый член в D' есть импульс, получаемый электронами и решеткой от внешнего поля (с учетом того, что система в целом является электрически нейтральной), остальные слагаемые (с обратным знаком) описывают импульс, уносимый электронами, так что разность — это и есть импульс, передаваемый решетке (в единицу времени и на единицу объема). Действительно, $\left(\frac{m}{e}\right) \frac{\partial \mathbf{j}^{\text{эл}}}{\partial t}$ есть изменение импульса электронов, находящихся в данном элементе объема, член $\frac{\partial}{\partial x_k} \langle mv_i v_k \chi \rangle$ описывает импульс, уносимый при свободном движении электронов в другие элементы объема, а член $\frac{\partial}{\partial x_k} \langle L_{ik} \chi \rangle$, согласно уже упоминавшимся результатам Ланг и Павлова⁴³, есть не что иное как импульс, передаваемый решетке при совершении работы по ее деформированию.

Микроскопическое вычисление модулей упругости металла в адиабатическом приближении (см. работы^{45, 46} и обзоры^{47, 48}) дает возможность получить $\lambda_{iklm}^{\text{ад}}$, $\lambda_{ik}(\mathbf{p})$, $\mu_{iklm}(\mathbf{p})$ *).

Слагаемое \mathbf{D} в (2.2) связано с «неадиабатическим» вкладом от электронов проводимости. (Имеется в виду отклонение от локального равновесия, но не нарушение адиабатического приближения, которое в данном рассмотрении с очевидной оговоркой относительно вклада полей заложено в основное условие (1.1).)

В граничных условиях к системе (2.2) необходимо учитывать как движение поверхности, так и изменение направления нормали при записи условий отражения электронов от поверхности металла. Эти условия принимают обычный вид⁵⁴⁻⁵⁶, если записывать их в с-системе координат, где граница покоится.

*) Эта программа еще не реализована, так же как и более реалистическая программа вычисления $\lambda_{ik}(\mathbf{p})$ при $\epsilon = \epsilon_{\text{ф}}$ в духе теории псевдопотенциала и модели Гаррисона⁴⁹, а также программа систематических измерений $\lambda_{ik}(\mathbf{p})$, аналогично тому, как это было сделано для закона дисперсии $\epsilon_0(\mathbf{p})$ на ФП^{5, 50}, и пока что деформационный потенциал сколько-нибудь детально не известен ни для одного хорошего металла. Для полуметаллов см. ⁵¹⁻⁵³ (см. также гл. 8).

3. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, ЭНЕРГИЯ И ФУНКЦИЯ ГАМИЛЬТОНА

Вид кинетического уравнения для функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ квазичастиц — электронов проводимости в деформированном кристалле был установлен в работах Ахиезера², Ахиезера, Любарского и Каганова⁴, В. Гуревича¹⁴ и др. по поглощению ультразвука в металлах. С учетом эффекта Стюарта — Толмена кинетическое уравнение рассматривалось в работе автора²⁰, которой будем следовать при изложении, и в работах Гуревича, Ланг и Павлова⁴², где предложен квантовый вывод. Кинетическое уравнение запишем в виде

$$\frac{df}{dt} + \hat{\nu}f = 0, \quad (3.1)$$

где

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \left(\mathbf{F} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \quad (3.1')$$

— оператор Стокса полевой производной по времени, $\hat{\nu}$ — оператор столкновений, \mathbf{F} — внешние силы, в которые мы включим силу Лоренца

$$\mathbf{F}_\perp = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}, \mathbf{H} \right], \quad (3.2)$$

Деформационное взаимодействие с решеткой включено в гамильтониан электрона проводимости.

Закон дисперсии, т.е. функцию Гамильтона электрона проводимости в лабораторной системе, в которой записано кинетическое уравнение (3.1), можно представить в виде (1.1), где $\delta\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ — локальное изменение закона дисперсии при деформации кристалла. Явный вид $\delta\varepsilon$ был приведен выше (2.6), (2.7), однако, часть выводов можно сделать, не обращаясь к конкретизации $\delta\varepsilon$.

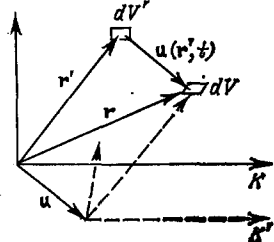


Рис. 2. Переход из лабораторной системы координат K в сопутствующую K' .

Следуя идее Л. Д. Ландау и работам^{14, 20}, получим выражение для энергии электронов в л-системе. Переход из системы координат K' , движущейся вместе с элементом объема dV' решетки, в л-систему осуществляется посредством точечного преобразования

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}(\mathbf{r}', t), \quad (3.3)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{r}', t)$ — смещение точки решетки с координатой \mathbf{r}' в момент t (рис. 2). Каноническое преобразование с производящей функцией $\Phi = (\mathbf{r}' + \mathbf{u}(\mathbf{r}', t)) \mathbf{p}$ от старых канонических переменных \mathbf{r}', \mathbf{p}' к новым \mathbf{r} и \mathbf{p} , как обычно, дает

$$\varepsilon'(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) = \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) - \dot{\mathbf{u}} \mathbf{p}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \nabla(\mathbf{u} \mathbf{p}). \quad (3.5)$$

Заметим, что поскольку преобразование координат (3.3) содержит явно время, а ε' не является квадратичной функцией \mathbf{p}' , то согласно известным из механики соотношениям⁵⁷, новая функция Гамильтона ε , вообще говоря, не совпадает с энергией квазичастицы. Тем не менее, между ее средним по распределению квазичастиц и средней энергией электронов существует простая связь²⁰. Эту связь можно получить, умножая (3.4) на инвариант канонического преобразования $f dV d\mathbf{p} = f' dV' d\mathbf{p}'$ и интегрируя по квазиимпульсам. Отсюда следует, что энергия электронов объема dV' в системе K' равна

$$dE' = \langle \langle \varepsilon' f' \rangle \rangle dV' = \langle \langle \varepsilon f \rangle \rangle dV - \dot{\mathbf{u}} \langle \langle \mathbf{p} f \rangle \rangle dV. \quad (3.6)$$

С другой стороны, воспользуемся известным тождеством для энергии

$$dE = dE' + \dot{\mathbf{u}} \, d\mathbf{P}, \quad (3.7)$$

где dE — средняя энергия электронов объема dV , в л-системе, а $d\mathbf{P}$ — электронный импульс объема dV , равный согласно (1.4), $d\mathbf{P} = \pi \, dV = = m \langle \langle (\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}) \mathbf{f} \rangle \rangle$. Исключая из (3.7) $d\mathbf{P}$ и dE' , получаем связь средней энергии со средней функцией Гамильтона в л-системе ²⁰:

$$dE = \langle \langle \varepsilon f \rangle \rangle \, dV - \dot{\mathbf{u}} \langle \langle \left(\mathbf{p} - m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right) \mathbf{f} \rangle \rangle \, dV. \quad (3.8)$$

При выводе линеаризованных уравнений учтем ^{6, 22, 20}, что интеграл столкновений обращается в нуль мгновенно-равновесной функцией распределения $f_0(\varepsilon - \mathbf{p}\dot{\mathbf{u}} - \delta\mu)$, где фермиевская функция распределения $f_0(\varepsilon) = \{ \exp [(\varepsilon - \mu_0)/kT] + 1 \}^{-1}$ (μ_0 — химический потенциал электронов), и полную функцию распределения будем искать в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon) + \chi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}, \quad (3.9)$$

где

$$\delta\varepsilon = \delta\varepsilon - \mathbf{p}\dot{\mathbf{u}} - \delta\mu, \quad (3.10)$$

т. е. в $\delta\varepsilon$ включено как изменение функции Гамильтона, так и химического потенциала электронов.

Таким образом, учитывается изменение электронной плотности и закона дисперсии, безинерционно (с точностью до микроскопических времен) следящих за деформацией решетки. В столкновительной области эта процедура соответствует полной увлечению рассеивающих центров движущейся решеткой, что в ряде случаев, например, при рассеянии на фононах, может а priori не выполняться, и тогда требуется более детальное рассмотрение.

Удобно нормировать χ условием

$$\langle \chi \rangle = 0, \quad (3.11)$$

что означает нормировку как полной, так и мгновенно-равновесной функции распределения на плотность электронов $n(\mathbf{r}, t)$ в данной точке решетки. Нетрудно видеть, что через χ выражается плотность тока \mathbf{j} (2.1), представляющая собой сумму электронного] (1.3) и ионного токов $\mathbf{j}^{\text{реш}} = -en\dot{\mathbf{u}}$. Условие электронейтральности —

$$\text{div } \mathbf{j} = -e \text{ div } \langle \mathbf{v} \chi \rangle = 0. \quad (3.12)$$

Используя уравнение непрерывности для электронов, явный вид деформационной поправки $\delta\varepsilon$ к закону дисперсии (2.6), (2.7) и условие нормировки, получаем выражение для $\delta\mu = \langle \lambda_{ik} \rangle u_{ik} / \langle 1 \rangle$, перенормировку деформационного потенциала (2.2) и уравнение, которому удовлетворяет χ (2.2).

4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Для того, чтобы определить силу \mathbf{f} в уравнениях теории упругости (1.8), удобно исходить из закона сохранения полного импульса \mathbf{P} для системы, состоящей из свободных электронов, решетки и электромагнитного поля. Этот закон сохранения является точным, если мы не учитываем передачу импульса фононам (в противном случае их также необходимо включить в рассматриваемую систему ^{58, 59}),

$$\mathbf{P} = \int dV \left(m \langle \langle \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{f} \rangle \rangle + \mathbf{G} + \rho_{\text{реш}} \dot{\mathbf{u}} \right); \quad (4.1)$$

здесь первое слагаемое (см. (1.4)) представляет собой импульс свободных электронов, выраженный через закон дисперсии и функцию распределения квазичастиц, \mathbf{G} — плотность импульса электромагнитного поля.

Для произвольного объема V имеем:

$$\frac{dP_i}{dt} = \int_V dV \left(\rho_{\text{рем}} \ddot{u}_i + \frac{m}{e} \frac{\partial j_i^{\text{эл}}}{\partial t} - \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}]_i - \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \right) = \int_S [dS_k \psi_{ik}, \quad (4.2)$$

где S — поверхность, окружающая объем V , T_{ik} — тензор натяжений Максвелла, ψ_{ik} — некоторый симметричный (в силу сохранения момента) тензор. Ввиду произвольности объема отсюда следует выражение для силы ^{20, 30}:

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}]_i - \frac{m}{e} \frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (T_{ik} + \psi_{ik}). \quad (4.3)$$

Для того, чтобы определить ψ_{ik} , для замкнутой системы можно воспользоваться законом сохранения энергии ³⁴.

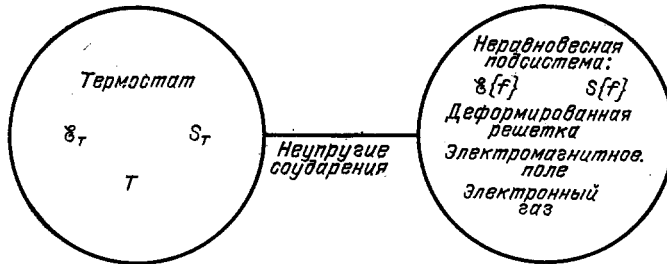


Рис. 3. В неравновесной подсистеме средние являются функционалами электронного распределения f и полей \mathbf{u} , \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Запишем закон сохранения энергии

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{эл}} + \mathcal{E}_{\text{эм}} + \mathcal{E}_{\text{упр}} \quad (4.4)$$

для электронов, электромагнитного поля и решетки, справедливый при упругом рассеянии электронов в с-системе, что с хорошей точностью справедливо для рассеяния на примесях, увлекающихся движущейся решеткой. Согласно формулам перехода энергия электронов $\mathcal{E}_{\text{эл}}$ (в л-системе) запишется через спектр и распределение электронов в с-системе *) следующим образом:

$$\mathcal{E}_{\text{эл}} = \int dV' \left(\langle \langle \epsilon' f' \rangle \rangle + \dot{\mathbf{u}} \left\langle \left\langle m \frac{\partial \epsilon'}{\partial \mathbf{p}} f' \right\rangle \right\rangle + \frac{nm\dot{\mathbf{u}}^2}{2} \right). \quad (4.5)$$

Условие того, что рассеяние происходит упругим образом, имеет вид

$$\left\langle \left\langle \epsilon' \frac{df'}{dt} \right\rangle \right\rangle = \langle \delta \epsilon' \hat{v} \chi \rangle = 0. \quad (4.6)$$

Тогда приходим к равенству

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \int dV \dot{u}_i \left(\rho \ddot{u}_i - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{m}{e} \frac{\partial j_i}{\partial t} - \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}]_i - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \langle \lambda_{ik} f' \rangle \rangle \right) - \int dV \frac{\partial q_k}{\partial x_k}, \quad (4.7)$$

откуда с учетом (4.3) следуют уравнения упругости (1.8) и выражение (4.16) для плотности потока энергии. Если исходить только из (4.7), то в правой части уравнений упругости (1.8) могли бы еще стоять слагаемые вида $[\mathbf{u}, \Phi]$, $c_{kilt} \frac{\partial}{\partial x_k} u_l$, где Φ — произвольная векторная функция от координат, а c_{kilt} —

*) Специально подчеркнем, что речь идет о переходе в сопутствующую систему лишь производства вычислений, см. «закон сохранения» (или вариационный принцип; см. ниже) формулируется в лабораторной системе координат.

постоянный и симметричный по индексам il тензор. Но из закона сохранения импульса (4.2) следует, что как $\Phi = 0$, так и $c_{hkl} = 0$.

Если система помещена в термостат и энергия ее не сохраняется, то для вывода уравнений можно использовать тот факт, что производная по времени от естественным образом определенной свободной энергии F неравновесного состояния должна быть знакоопределенной (отрицательной) величиной²⁰ (рис. 3). Для этого достаточно взять в качестве свободной энергии $F = \mathcal{E} - TS$, где \mathcal{E} и S — энергия и энтропия неравновесной подсистемы, а T — температура термостата. В состоянии равновесия F имеет минимум, а ее усредненная по времени производная $\overline{dF/dt}$ определяет диссипируемую мощность. Этого условия достаточно для определения ψ_{ik} в (4.3). Действительно, выделяя в dF/dt обусловленное столкновениями знакоопределенное диссипативное слагаемое, а также поверхностный член, описывающий поток энергии, мы должны потребовать обращение в нуль остальных объемных слагаемых, что и даст нам равенство, необходимое для определения ψ_{ik} . В итоге приходим к (1.8).

Выражение для плотности потока импульса Π_{ik} , фигурирующее в законе сохранения

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (4.8)$$

приобретает вид

$$\Pi_{ik} = T_{ik} - \sigma_{ik} + \langle \lambda_{ik} \chi \rangle. \quad (4.9)$$

Видно, что Π_{ik} симметричен, если считать, что симметричны тензор натяжений Максвелла T_{ik} и перенормированный тензор напряжений σ_{ik} , в соответствии с законом сохранения момента и локальностью деформационного взаимодействия *).

Плотность потока энергии q (см. (4.7), (6.1)) равна

$$q_k = \left\langle \left\langle \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_k} \mathcal{E} f \right\rangle \right\rangle + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]_k - \dot{u}_i (\sigma_{ik} + \langle \langle \lambda_{ik} f \rangle \rangle). \quad (4.10)$$

5. ЭЛЕКТРОННОЕ УВЛЕЧЕНИЕ РЕШЕТКИ И СТОЛКНОВИТЕЛЬНАЯ ПЕРЕДАЧА ИМПУЛЬСА

Уравнениям упругости может быть придана различная форма в зависимости от того, будут ли использоваться уравнения переноса для среднего импульса, либо среднего квазиимпульса электронов проводимости.

Дополнительная сила, действующая на решетку в металлах, может быть представлена в виде силы, действующей со стороны электронов (силы увлечения $f^{увл}$) и силы Лоренца, действующей на ионы:

$$\rho_{\text{реш}} \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - en_0 \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right)_i + f_i^{увл}. \quad (5.1)$$

Сравнивая (5.1) с (1.8) или (2.2), получаем явное выражение для «силы увлечения».

Перепишем закон дисперсии электронов (2.7) в лабораторной системе координат K в виде

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \varepsilon_0(\mathbf{p}) + (\lambda_{ik} + mv_i v_k) u_{ik} + (p_i - mv_i) \left(\dot{u}_i + v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right). \quad (5.2)$$

Отсюда сразу видно, что предельному переходу к свободным несвязанным с решеткой электронам соответствует ε , $\varepsilon_0 \rightarrow p^2/2m$, $\mathbf{p} \rightarrow m\mathbf{v}$ и соответственно, $\lambda_{ik} \rightarrow -mv_i v_k$ **). При этом деформационная сила f^d ²⁰ стремится к $\nabla_k (mv v_k \chi)$, т. е. как раз к тому слагаемому, которое было найдено в²⁸

*) В свою очередь, электронное распределение χ определяется полями $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{u}}$ уже на масштабах длины пробега $l \gg a$, в чем и проявляется вносимая электронами нелокальность.

**) Идея вывода принадлежит В. Л. Гуревичу; см. также гл. 8.

при микроскопическом выводе вида силы увлечения без учета деформационного взаимодействия *).

При микроскопическом подходе в $f^{увл}$ естественно выделяется слагаемое, связанное со столкновениями. В связи с этим представляет интерес такая запись выражения (5.1), в которой явно фигурируют электрические поля, действующие на решетку, и передаваемая электронами при соударениях с решеткой часть импульса (квазиимпульса). Воспользуемся вначале уравнением переноса квазиимпульса, которое получим, умножая на p кинетическое уравнение (2.2) и интегрируя его по ферми-поверхности. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle p_i \chi \rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle p_i v_k \chi \rangle + \langle p_i \hat{v} \chi \rangle = \\ = e \tilde{E}_k \langle p_i v_k \rangle - \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}]_i + \frac{e}{c} \epsilon_{klm} H_m \oint_{\Sigma} d\Sigma_k p_l v_l \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \chi. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Последнее слагаемое представляет собой интеграл по поверхности зоны Бриллюэна, и если поверхность Ферми пересекает ее грани, то интеграл,

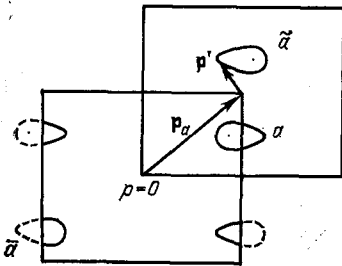


Рис. 4. Выбор ячейки, не пересекающей ФП границами зоны Бриллюэна.

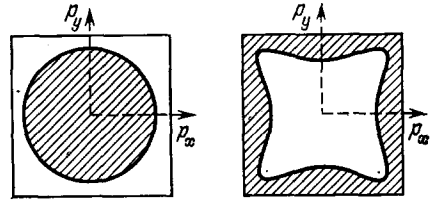


Рис. 5. Электронная и дырочная зоны. Заштрихованы занятые электронами состояния.

вообще говоря, отличен от нуля. Для замкнутых поверхностей можно так выбрать основную ячейку, что ее грани не будут пересекаться ферми-поверхностями (рис. 4, 5). Тогда $\langle p_i v_k \rangle = (n_- - n_+) \delta_{ik}$, где n_- — концентрация электронов в электронных зонах, а n_+ — концентрация дырок, и уравнение переноса приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle p_i \chi \rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle p_i v_k \chi \rangle + \langle p_i \hat{v} \chi \rangle = -e E_i (n_- - n_+) - \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}]_i. \quad (5.4)$$

Соответственно, для замкнутых ФП уравнение упругости (2.2) с помощью (5.4) может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{реш} \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - e \tilde{E}_i (n_- - n_+) - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle (\lambda_{ik} + p_i v_k) \chi \rangle - \\ - \langle p_i \hat{v} \chi \rangle - \frac{\partial}{\partial t} \langle (p_i - m v_i) \chi \rangle. \end{aligned} \quad (5.5)$$

В ряде задач главным в (5.5) является столкновительное слагаемое с передачей квазиимпульса $\langle p_i \hat{v} \chi \rangle$. Соответствующее направление (теория «электронного ветра») интенсивно развивается (ссылки см. в работах ^{29,30}). При $n_+ = 0$, т. е. для чисто электронных групп, выражение (5.5) для силы, действующей на решетку, переходит в формулу (4.1) работы ²⁰, которое, в свою очередь, в бесстолкновительной области и в пренебрежении стюарт-толменовским членом $(\partial/\partial t) \langle (\mathbf{p} - m \mathbf{v}) \chi \rangle$ переходит в выражение для силы, соответствующее предложенному Силиным в его работе ¹⁹, где была впервые введена

*) Обсуждение этого вопроса см. также в ³⁰.

деформационная сила в уравнения упругости:

$$\rho_{\text{реш}} \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - en_0 \left(E + \frac{1}{c} [\dot{u}, H] \right)_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \langle \mathcal{L}_{ikf} \rangle \rangle, \quad (5.6)$$

здесь $n_0 = \langle \langle f \rangle \rangle$ — полная плотность электронов проводимости, \mathcal{L}_{ik} — деформационный потенциал в лабораторной системе координат.

Для открытых поверхностей

$$\langle p_i v_k \rangle = n_0 \delta_{ik} - \oint d\Sigma_k p_i f_0, \quad (5.7)$$

где во втором слагаемом интегрирование ведется по поверхности зоны Бриллюэна, а n_0 — полное число электронов проводимости в единице объема (рис. 6). В этом случае отлично от нуля и последнее слагаемое в (5.5), где интеграл берется по пояску, представляющему собой сечение открытой ферми-поверхности гранями зоны Бриллюэна. Вклад, происходящий от поверхности зоны Бриллюэна, связан с передачей импульса решетке при перебросе, когда электрон, двигаясь в силовом поле, пересекает грань зоны *). Уравнение упругости при произвольной топологии при подобной форме записи приобретают таким образом весьма сложный вид:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{реш}} \ddot{u}_i = & \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - e \langle p_i v_k \rangle \tilde{E}_k - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle (\lambda_{ik} + p_i v_k) \chi \rangle - \\ & - \langle p_i \hat{v} \chi \rangle - \frac{\partial}{\partial t} \langle (p_i - m v_i) \chi \rangle + \\ & + \frac{e}{c} \varepsilon_{klm} H_m \oint d\Sigma_k p_i v_l \chi \frac{\partial f_0}{\partial e}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

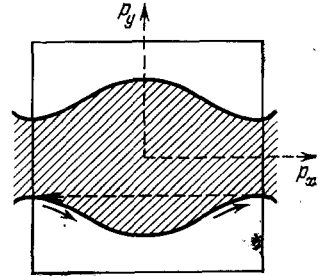


Рис. 6. Переброс при движении в поле в случае открытой ФП.

Здесь ε_{klm} — единичный антисимметричный тензор. Эффективная плотность заряда решетки при этом анизотропна и представляется тензором — $e \langle p_i v_k \rangle$. Для $n_+ = n_-$ он обращается в нуль. Для дырочных групп вклад в эффективную плотность заряда отрицателен, на что впервые обратил внимание Фикс ²⁹.

Если грани зоны Бриллюэна, которые пересекаются поверхностью Ферми, параллельны некоторому направлению z , причем последнее обладает достаточно высокой симметрией **), то ⁶¹

$$\langle p_i v_k \rangle = \delta_{ik} (n_0 - \xi N), \quad (5.9)$$

где N — число состояний в зоне Бриллюэна, а ξ — число «дырочных» зон, в которых состояния, прилегающие к граням, не пересекающимся поверхностью Ферми, заняты. Для замкнутых поверхностей разность $n_0 - \xi N$ переходит в $n_- - n_+$.

Вместо уравнения (5.5) можно воспользоваться уравнением переноса импульса электронов. Заменяя с его помощью слагаемое

$$- \frac{m}{e} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \langle m \mathbf{v} \chi \rangle$$

в исходном уравнении (2.2), получаем ²⁰:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{реш}} \ddot{u}_i = & \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - e \langle m v_i v_k \rangle \tilde{E}_k - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle (\lambda_{ik} + m v_i v_k) \chi \rangle - \\ & - \langle m v_i \hat{v} \chi \rangle - \frac{e}{c} \varepsilon_{klj} H_j \left\langle \left(\delta_{ik} - m \frac{\partial^2 e}{\partial p_i \partial p_k} \right) v_l \chi \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.10)$$

*) Либо изменяя энергию (член с электрическим полем), либо двигаясь по открытой орбите в магнитном поле (последний член в (5.3)).

**) Достаточно, например, наличия двух вертикальных плоскостей симметрии. Этот случай реализуется в простой гексагональной решетке.

При такой записи также возникает некоторая эффективная тензорная плотность заряда решетки — $e \langle m v_i v_k \rangle$, которая является знакоопределенной, но тензорными свойствами (анизотропией) обладает уже и для закрытых ФП. Понятие эффективного заряда, таким образом, неинвариантно и имеет определенный смысл лишь в контексте используемого уравнения переноса (квазиимпульса либо импульса).

Мы видим, что несмотря на определенные преимущества записи уравнений в виде (5.8) либо (5.10), в общем случае она неоправданно сложна. Ниже мы будем пользоваться наиболее общей и простой формой записи уравнения (1.8), (2.2).

6. ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКИЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Динамические модули упругости металла, которые будут получены ниже, удобно выразить через электроакустические кинетические коэффициенты, удовлетворяющие соотношениям симметрии Онзагера.

Для вывода этих соотношений среднюю диссипируемую энергию, равную скорости убывания свободной энергии системы (см. п. 4)

$$-\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \int dV \langle \hat{\chi} \nabla \chi \rangle + \int dS \bar{q}, \quad (6.1)$$

удобно преобразовать, используя кинетическое уравнение (2.2), откуда можно выразить $\hat{\chi} \nabla \chi$ (поток через поверхность — второе слагаемое в (6.1) — здесь опущен):

$$-\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \int dV \langle \overline{\chi g} \rangle. \quad (6.2)$$

Черта означает усреднение по времени. Мы воспользовались тем, что в тождестве

$$\langle \hat{\chi} \nabla \chi \rangle \equiv \langle \chi g \rangle - \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\chi^2}{2} \right\rangle - \nabla \langle \chi v \chi \rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\chi^2}{2} \right\rangle \quad (6.3)$$

второй член выпадает при усреднении по времени, третий — при интегрировании по объему, последний — равен нулю тождественно.

Подставляя g из (2.2) в (6.2), получим

$$-\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \int dV (\tilde{\mathbf{j}} \mathbf{E} + \sigma_{ik}^{an} \dot{u}_{ik}), \quad (6.4)$$

где $\sigma_{ik}^{an} = \langle \Lambda_{ikh} \chi \rangle$ — неадиабатическая часть электронного тензора натяжений. В рассматриваемом случае объемной диссипации (при существенном вкладе границы металла необходимо учитывать поток через поверхность *) удобно перейти к векторным величинам, для чего во втором слагаемом проводим интегрирование по частям и опускаем поверхностный интеграл:

$$-\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \int dV (\tilde{\mathbf{j}} \mathbf{E} - \mathbf{f}^a \mathbf{u}). \quad (6.5)$$

Как видно из (6.4), (6.5), изменение свободной энергии связано с работой, производимой в единицу времени над зарядами эффективным электрическим полем и полем деформации.

Рассмотрим задачу об отклике системы на периодическое возмущение с частотой ω . Поскольку система находится в термостате, то как известно⁶³, среднее от скорости изменения энергии системы равно скорости изменения ее свободной энергии. Таким образом, приходим к выражению (6.5), с помощью которого необходимо определить обобщенные силы и координаты для того, чтобы применить общие соотношения симметрии кинетических

*) Это существенно для рэлеевских волн, а также для тонких пленок металла⁶².

коэффициентов ⁶³:

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_a \int dr x_a(\mathbf{r}) \dot{f}_a(\mathbf{r}), \quad x_a(\mathbf{r}) = \sum_b \int dr' \alpha_{ab}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_b(\mathbf{r}'). \quad (6.6)$$

Из (6.5) — (6.6) следует, что если выбрать в качестве обобщенных сил величины $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, то роль обобщенных координат, соответственно, будут играть потоки $\mathbf{j}(\mathbf{r})/i\omega$ и $-\mathbf{f}^{\text{II}}(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} f_a(\mathbf{r}) &\rightarrow \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}), \\ x_a(\mathbf{r}) &\rightarrow \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{i\omega}, \quad -\mathbf{f}^{\text{II}}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Роль индекса, нумерующего величины x и f , играет совокупность дискретного индекса a и непрерывного \mathbf{r} . Соотношения симметрии кинетических коэффициентов запишем для однородной среды, где

$$\alpha_{ab}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{H}) = \alpha_{ba}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, \mathbf{H}), \quad (6.8)$$

или в пространственных Фурье-компонентах

$$\alpha_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{H}) = \alpha_{ba}(-\mathbf{k}, -\mathbf{H}). \quad (6.9)$$

Обращаясь к материальным уравнениям, следующим из (2.1) и (6.7):

$$j_i = \sigma_{il} \tilde{E}_l + \partial_{il} u_l, \quad f_i^{\text{II}} = c_{il} \tilde{E}_l + b_{il} u_l, \quad (6.10)$$

видим, что материальные тензоры $\hat{\sigma}$, $\hat{\partial}$, \hat{c} и \hat{b} должны удовлетворять соотношениям симметрии, которые, как следует из (6.6) — (6.9), имеют вид ²⁰

$$\begin{aligned} \sigma_{il}(\mathbf{k}, \mathbf{H}) &= \sigma_{il}(-\mathbf{k}, -\mathbf{H}), \quad b_{il}(\mathbf{k}, \mathbf{H}) = b_{li}(-\mathbf{k}, -\mathbf{H}), \\ \partial_{il}(\mathbf{k}, \mathbf{H}) &= -i\omega c_{li}(-\mathbf{k}, -\mathbf{H}); \end{aligned} \quad (6.11)$$

здесь σ_{il} — проводимость ^{*}, ∂_{il} — «деформационная проводимость», c_{il} и b_{il} характеризуют связанные с неравновесностью электронного газа изменения упругих модулей: c_{il} — за счет поля, b_{il} — непосредственно из-за деформационного взаимодействия. В частности, соотношения (6.11) позволяют по известному выражению для тока (его «деформационной» части, описываемой тензором ∂_{il}) построить «полевую» часть деформационной силы, определяемую c_{il} . Переход от \dot{u}_{lm} к u_l позволил не вводить материальные тензоры третьего ранга.

Введем оператор Грина кинетического уравнения $\hat{R}(\mathbf{p})$ и его симметричную и антисимметричную по \mathbf{p} части

$$\hat{R}(\mathbf{p}) = \left(\frac{d}{dt} + \hat{v} \right)^{-1}, \quad \hat{R}^{s, a} = \frac{1}{2} [\hat{R}(\mathbf{p}) \pm \hat{R}(-\mathbf{p})]. \quad (6.12)$$

Формальное решение кинетического уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \chi &= \chi^s + \chi^a = \hat{R}g, \\ \chi^a &= -\hat{R}^s e v \tilde{\mathbf{E}} - \hat{R}^a \Lambda_{lm} \dot{u}_{lm}, \quad \chi^s = -\hat{R}^a e v \tilde{\mathbf{E}} - \hat{R}^s \Lambda_{lm} \dot{u}_{lm}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ток и деформационная сила выражаются соответственно через антисимметричную χ^a и симметричную часть χ^s функции распределения. Таким образом, материальные тензоры равны

$$\begin{aligned} \sigma_{il} &= e^2 \langle v_i R^s v_l \rangle, \quad \partial_{il} = e \omega k_j \langle v_i R^a \Lambda_{lj} \rangle, \\ c_{il} &= i e k_j \langle \Lambda_{ij} R^a v_l \rangle, \quad b_{il} = i \omega k_j k_l \langle \Lambda_{ij} R^s \Lambda_{ll} \rangle. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Из вида кинетического уравнения (2.2) в случае четности интеграла столкновений по \mathbf{p} следует, что $R(-\mathbf{k}, \mathbf{p}) = R(\mathbf{k}, -\mathbf{p})$. Отсюда, согласно (6.14), следует, что в этом случае $\hat{\sigma}$, $\hat{\partial}$, \hat{c} и \hat{b} — четные функции от \mathbf{k} и, соответствен-

^{*} Мы используем стандартные обозначения σ_{ik} как для тензора напряжений, так и для проводимости, так как вместе эти величины не встречаются.

но, получаем соотношения симметрии в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{il}(\mathbf{k}, \mathbf{H}) &= \sigma_{li}(\mathbf{k}, -\mathbf{H}), & b_{il}(\mathbf{k}, \mathbf{H}) &= b_{li}(\mathbf{k}, -\mathbf{H}), \\ \partial_{il}(\mathbf{k}, \mathbf{H}) &= -i\omega c_{li}(\mathbf{k}, -\mathbf{H}).\end{aligned}\quad (6.15)$$

В частности, (6.15) верно при наличии центра инверсии. В простейшем случае $\mathbf{H} = 0$ при сильной пространственной дисперсии (\mathcal{F} — символ главного значения)

$$R^s = \pi\delta(\mathbf{k}\mathbf{v}), \quad R^a = -i\frac{\mathcal{F}}{\mathbf{k}\mathbf{v}}. \quad (6.16)$$

В этом случае соотношения симметрии легко проверить непосредственно, так как R есть оператор умножения.

7. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДУЛИ УПРУГОСТИ МЕТАЛЛА

Получим теперь уравнение, описывающее распространение звуковых волн в металлах (в том числе в присутствии внешнего магнитного поля) ^{19-21, 64-66}. Будем исходить из уравнений теории упругости (2.2). Сила \mathbf{D} описывает интересующий нас вклад от неравновесных электронов и электромагнитных полей и выражается через ток и деформационную силу.

Если источником полей является возбуждаемый в кристалле звук, то решая уравнения Максвелла, мы можем выразить через деформации эффективное электрическое поле $\tilde{\mathbf{E}}$ и соответственно \mathbf{j} и \mathbf{f}^A :

$$\tilde{\mathbf{E}}_k = \hat{G}_{kl}u_l, \quad j_i = \hat{j}_{il}u_l, \quad f_i^A = \hat{f}_{il}u_l. \quad (7.1)$$

Оператор \hat{G}_{kl} связан с тензором Грина уравнений Максвелла. Он приведен ниже, (7.17).

Уравнение для смещения \mathbf{u} принимает вид

$$\begin{aligned}\rho u_i &= \lambda_{ijkl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_m} + \hat{D}_{il}u_l, \\ \hat{D}_{il} &= \left(\frac{1}{c} \varepsilon_{imn} H_n - \frac{m}{e} \delta_{im} \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{j}_{ml} + \hat{f}_{il}.\end{aligned}\quad (7.2)$$

В неограниченном металле фурье-компоненты плотности тока \mathbf{j} и деформационной силы \mathbf{f}^A выражаются через фурье-компоненты поля и смещения с помощью материальных уравнений (6.10), содержащих электроакустические кинетические коэффициенты (опускаем индексы \mathbf{k} и ω):

$$\tilde{\mathbf{E}}_i = G_{ik}u_k, \quad j_i = (\sigma_{ik}G_{kl} + \partial_{il})u_l, \quad f_i^A = (c_{ik}G_{kl} + b_{il})u_l. \quad (7.3)$$

Кинетические коэффициенты удовлетворяют соотношениям симметрии (6.16), вследствие чего наряду с \hat{c} удобно ввести величину

$$\tilde{\partial}_{ki}(\mathbf{k}, \mathbf{H}) \equiv \partial_{ik}(-\mathbf{k}, -\mathbf{H}) = -i\omega c_{ki}(\mathbf{k}, \mathbf{H}). \quad (7.4)$$

При помощи тензора

$$\Delta_{kl} = \frac{m}{e} (i\omega\delta_{kl} - \varepsilon_{klm}\omega_m^c), \quad \omega^c = \frac{e\mathbf{H}}{mc} \quad (7.5)$$

фурье-компоненты силы \mathbf{D} и эффективного поля $\tilde{\mathbf{E}}$ переписутся следующим образом:

$$D_i = \Delta_{ik}j_k + f_i^A, \quad \tilde{\mathbf{E}}_k = E_k - i\omega\Delta_{kl}u_l; \quad (7.6)$$

здесь

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{H}] - \frac{m}{e} \ddot{\mathbf{u}}$$

— эффективное поле, а поле \mathbf{E} , удовлетворяющее уравнениям Максвелла, включает в себя градиент химического потенциала.

Ниже мы пользуемся обозначением $a_{il} \kappa_l \equiv a_{i\kappa}$, где $\kappa = \mathbf{k}/k$, а a_{il} — произвольный тензор.

Пусть p и q — главные оси свернутого тензора модулей упругости решетки $\lambda_{i\kappa l\kappa}$. Обозначим через η_p собственные значения этого тензора в единицах ρs^2 , где s — некоторая характерная скорость звука. Тогда

$$\eta_p \delta_{pq} \equiv \frac{\lambda_{p\kappa q\kappa}}{\rho s^2} \quad (7.7)$$

Черта над индексом означает, что по нему не должно проводиться суммирование.

В главных осях p, q в безразмерных переменных уравнение (7.2) для фурье-компонент смещения принимает вид

$$[(\eta_p - \zeta) \delta_{pq} + d_{pq}] u_q = 0; \quad (7.8)$$

здесь

$$\zeta \equiv \left(\frac{\omega}{ks} \right)^2, \quad d_{il} = -\frac{D_{il}}{\rho s^2 k^2}, \quad (7.9)$$

т. е. ζ — безразмерный квадрат фазовой скорости волны, а $d_{ih} u_h$ представляет собой (безразмерную) фурье-компоненту силы, действующей на решетку со стороны электронов проводимости и электромагнитных полей.

Выражение для (свернутых) динамических модулей упругости d_{pq} получим, подставляя в (7.6), (7.3) значение тензора G_{ih} (7.17). Результат²⁰ можно записать в компактной форме⁶⁶:

$$d_{pq} = \sum_{J=I}^{VI} d_{pq}^{(J)},$$

$$d_{pq}^I = -\frac{b_{pq}}{\rho s^2 k^2}, \quad d_{pq}^{II} = \frac{c_{p\kappa} \partial_{\kappa q}}{\rho s^2 k^2 \sigma_{\kappa\kappa}}, \quad d_{pq}^{III} = -\frac{k^2 c^2}{4\pi} \frac{\Delta_{p\beta} \Delta_{\beta q}}{\rho s^2 k^2},$$

$$d_{pq}^{IV} = \frac{c_{p\beta}^{\perp} \rho_{\beta\gamma} \partial_{\gamma q}^{\perp}}{\rho s^2 k^2}, \quad d_{pq}^V = \frac{i\omega}{\rho s^2 k^2} \left(\frac{k^2 c^2}{4\pi\omega} \right)^2 \Delta_{p\beta} \rho_{\beta\gamma} \Delta_{\gamma q},$$

$$d_{pq}^{VI} = -\frac{ic^2}{4\pi\omega\rho s^2} (\Delta_{p\beta} \rho_{\beta\gamma} \partial_{\gamma q}^{\perp} - \tilde{\partial}_{p\beta}^{\perp} \rho_{\beta\gamma} \Delta_{\gamma q}).$$

Индексы $\alpha, \beta, \gamma \dots$ обозначают проекции на оси, ортогональные направлению волнового вектора \mathbf{k} , κ — обозначает проекцию на направление волнового вектора, \perp обозначает перенормировку, возникающую при исключении продольных электрических полей (с помощью условия электронейтральности $j_{\kappa} = 0$), $\rho_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора эффективного поперечного удельного сопротивления, \hat{I} — единичный оператор, определение $\tilde{\partial}$ см. (7.4):

$$\hat{\rho} \equiv \left(\hat{\sigma}^{\perp} + i \frac{k^2 c^2}{4\pi\omega} \hat{I} \right)^{-1}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{\perp} = \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\sigma_{\alpha\kappa} \sigma_{\kappa\beta}}{\sigma_{\kappa\kappa}},$$

$$\partial_{\alpha l}^{\perp} = \partial_{\alpha l} - \frac{\sigma_{\alpha\kappa} \partial_{\kappa l}}{\sigma_{\kappa\kappa}}, \quad c_{i\alpha}^{\perp} = c_{i\alpha} - \frac{c_{i\kappa} \sigma_{\kappa\alpha}}{\sigma_{\kappa\kappa}}.$$

Слагаемые d_{pq}^{III} и d_{pq}^V иногда удобно объединять, используя определение $\hat{\rho}$ (7.11):

$$d_{pq}^{III} + d_{pq}^V = -\frac{c^2}{4\pi\rho s^2} \Delta_{p\alpha} \rho_{\alpha\beta} \sigma_{\beta\gamma}^{\perp} \Delta_{\gamma q}. \quad (7.12)$$

Выражения (7.8) — (7.12) являются следствием лишь феноменологических соотношений (6.10) и (7.3) и уравнений Максвелла. В квазиклассическом случае, когда электронный газ описывается кинетическим уравнением (2.2), кинетические коэффициенты, входящие в (7.10), могут быть вычислены с помощью формул (6.14), в квантовом случае (в том числе в квантующих магнитных полях) — согласно (1.9).

Обсудим теперь кратко структуру d_{il} ⁶⁶. Отдельные слагаемые в выражении для d_{il} различаются входящими в них кинетическими коэффициентами

ми и имеют различный физический смысл. Первые три слагаемых d^I , d^{II} и d^{III} не содержат поперечного удельного сопротивления, в то время как d^{IV} , d^V и d^{VI} пропорциональны $\rho_{\alpha\beta}$ и обусловлены возникающими при распространении звука поперечными электрическими полями. Слагаемое d^I описывает чисто деформационные эффекты. Ни продольные, ни поперечные поля не дают в него вклад. Оно соответствует работе, производимой той частью силы f^{μ} , которая пропорциональна одной лишь деформации. Соответствующая мощность есть $\dot{u}f^{\mu}$, где под f^{μ} следует понимать лишь второе слагаемое в (6.10). Слагаемое d^{II} представляет собой перенормировку деформационного члена за счет продольных электрических полей. Слагаемое d^{III} эрмитово, оно описывает изменение скорости звука за счет индукционных эффектов в бесконечно проводящей среде⁶⁰, в него же включены инерционные члены, связанные с эффектом Стюарта — Толмена. Это слагаемое универсально: оно не содержит кинетических коэффициентов. В осях x, y, z , где поле направлено вдоль оси z , d^{III} равно

$$d_{pq}^{III} = -\frac{H^2}{4\pi\rho s^2} \begin{pmatrix} 1 & i\frac{\omega}{\omega_c} & 0 \\ -i\frac{\omega}{\omega_c} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \end{pmatrix}. \quad (7.13)$$

Слагаемое d^{IV} описывает вклад поперечных деформационных токов и представляет собой перенормировку деформационного взаимодействия за счет поперечных электрических полей. Особенно существенно оно для поперечного звука. Соответственно, d^V описывает влияние конечной проводимости на индукционные члены, т. е. перенормировку за счет поперечных полей слагаемого d^{III} . В некоторых случаях разделение этих слагаемых становится чисто условным. И, наконец, последнее слагаемое d^{VI} описывает перекрестные эффекты, когда либо работа $\dot{u}f^{\mu}$ (в единицу времени) производится той частью деформационной силы, которая пропорциональна электрическому полю, либо в выражении для работы, производимой полем $\tilde{j}\tilde{E}$, ток имеет деформационное происхождение.

Приведем также тензор G_{ik} . Чтобы найти его, из условия электронной нейтральности $j_k = 0$ можно выразить продольное эффективное поле через поперечное:

$$\tilde{E}_k = -\frac{\tilde{E}_\alpha \sigma_{k\alpha}}{\sigma_{kk}} - \frac{\partial_{kl} u_l}{\sigma_{kk}}. \quad (7.14)$$

Исключение продольного поля приводит к перенормировке поперечных тензоров проводимости (7.11). Поперечное поле находится из уравнений Максвелла (2.3), в которых неоднородностью служит деформационный ток j^{μ} . При этом удобно ввести величину $\rho_{\alpha\beta}$ (7.11):

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}^\perp \tilde{E}_\beta + j_\alpha^{\parallel}, \quad \tilde{E}_\alpha = -\rho_{\alpha\beta} j_\beta^{\parallel} + \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{H}]_\alpha - \frac{m}{e} \ddot{u}_\alpha. \quad (7.15)$$

Ток j^{μ} равен

$$j_\alpha^{\parallel} = \sigma_{\alpha\beta}^\perp \left(\frac{1}{c} [\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{H}]_\beta - \frac{m}{e} \ddot{u}_\beta \right) + \partial_{\alpha l}^\perp u_l. \quad (7.16)$$

Учитывая выписанные соотношения, получаем для тензора Грина G_{ik} выражение²⁰

$$G_{iq}^{\parallel} = -\left(\delta_{i\alpha} - \delta_{i\kappa} \frac{\sigma_{\kappa\alpha}}{\sigma_{kk}} \right) \rho_{\alpha\beta} \left(\frac{k^2 c^2}{4\pi} \Delta_{\beta q} + \partial_{\beta q}^\perp \right) - \delta_{i\kappa} \frac{\partial_{\kappa q}}{\sigma_{kk}}, \quad (7.17)$$

использованное при выводе (7.10).

Дисперсионное уравнение, следующее из (7.8), определяет (безразмерные) фазовые скорости упругих волн $\sqrt{\zeta}$ (*), причем динамические модули d_{pq} (7.10) учитывают вклад от неравновесных электронов и возбуждаемых электромагнитных полей, а также влияние внешнего магнитного поля

$$\text{Det} | (\eta_{\bar{p}} - \zeta) \delta_{pq} + d_{pq} | = 0. \quad (7.18)$$

Как правило, взаимодействие электронов со звуком неэффективно (термин Пипшарда ⁶⁾ из-за большой разницы в скоростях, что в свою очередь отражает различие масс электронов и ионов $m/M \sim s^2/v_{дТ}^2 \sim 10^{-3} - 10^{-5}$. Благодаря этому $|d_{pq}| \ll 1$, и, например, в отсутствие вырождения собственные значения ζ равны

$$\zeta_i = \eta_i + d_{i\bar{i}} \quad (\eta_1 \neq \eta_2 \neq \eta_3). \quad (7.19)$$

(Однако возникают ситуации, когда реализуется и эффективное взаимодействие (см. ниже), и d_{pq} не столь малы (имеют «особенности»), в этих случаях необходимо решать уравнение (7.8).) Фазовая скорость звуковой волны находится согласно $(\omega/k)_i = s \sqrt{\zeta_i}$, что при порядковых оценках дает

$$\frac{\Delta s}{s} \sim \text{Re} d_{p\bar{p}}, \quad \frac{\gamma}{\omega} \sim \text{Im} d_{p\bar{p}}. \quad (7.20)$$

В вырожденном случае возникает электронное вращение плоскости поляризации звука (подробно исследовавшееся при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$ ^{21,64}).

8. ДЕФОРМАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Индивидуальной характеристикой электрона проводимости в деформированном кристалле становится введенный А. И. Ахизером ² тензор деформационного потенциала $\lambda_{ik}(\mathbf{p})$, с которым связано изменение энергии электрона $\lambda_{ik}(\mathbf{p}) u_{ik}(\mathbf{r}, t)$ при деформации решетки (***) (точнее см. (2.6) — (2.7) и ниже). Микроскопическая теория или эксперимент должны позволить определить эту характеристику электрона, о которой, в отличие от детально исследованного для большинства металлов невозмущенного закона дисперсии на уровне Ферми, известно пока еще не так много.

В отличие от универсального электрического заряда e и спина «упругий заряд» $\lambda_{ik}(\mathbf{p})$ является наряду с законом дисперсии $\epsilon_0(\mathbf{p})$ индивидуальной «паспортной» характеристикой квазичастицы, зависящей от ее положения на ФП.

Как уже упоминалось, закон дисперсии устанавливается на расстояниях порядка нескольких атомных (на которых уже сказывается периодичность решетки), и соответственно за атомные времена. На этих временах и расстояниях решетку в деформированном кристалле локально можно считать периодической, но с несколько измененными периодами (и соответственно симметрией) и поэтому ввести понятие локального закона дисперсии $\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Используемый подход соответствует адиабатическому приближению, когда энергия электрона определяется при фиксированных положениях ионов ⁷¹.

Последовательное феноменологическое введение закона дисперсии в слабо деформированной решетке возможно, как это было отмечено Ландау (см. сноску на стр. 270), в сопутствующей системе координат. Переход в s -систему ^{14,20} $\mathbf{r}' + \mathbf{u}(\mathbf{r}', t) = \mathbf{r}$ (см. рис. 2) позволяет исключить движение данного элемента объема dV , и изменяя масштаб, сохраняет систематику состояний недеформированного кристалла.

*) Это уравнение определяет также скорости и других — электромагнитных и «электронных» бозевских ветвей спектра, которые при определенных условиях могут существовать в металле и проявляют себя как особенности модулей d_{pq} в принятой форме записи ^{35,67-69}.

**) Простейшая форма модуляции энергии электрона рассматривалась еще Цыцеевой ⁷⁰.

Действительно, рассмотрим однородную и стационарную деформацию $u_{ih} = \text{const}$ (для простоты вначале в отсутствие вращения), при которой период a_0 переходит в $a_0 + \delta a$, где $\delta a_i = a_{ih} u_{ih}$. Как в недеформированном, так и в деформированном кристалле электрон имеет зонный спектр ($\varepsilon_0(\mathbf{p}) \equiv \varepsilon(\mathbf{p}; a_0)$ и $\varepsilon(\mathbf{p}) \equiv \varepsilon(\mathbf{p}; a_0 + \delta a)$ соответственно). Законы дисперсии $\varepsilon_0(\mathbf{p})$ и $\varepsilon(\mathbf{p})$ отличаются друг от друга не только за счет явной зависимости от параметров решетки a (через прозрачность потенциальных барьеров

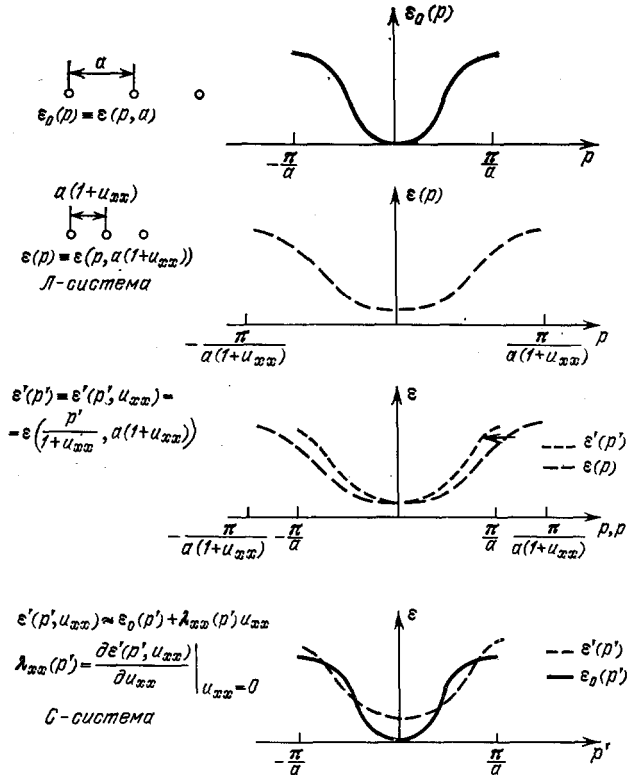


Рис. 7. Закон дисперсии электрона в лабораторной и сопутствующей системах координат (введение деформационного потенциала).

и т. п.), но и благодаря изменению области определения квазиимпульса p из-за изменения размеров (и формы) зоны Бриллюэна. Так, в одномерном случае квазиимпульс пробегает в недеформированном кристалле значения

$$p(l) = \frac{2\pi l}{Na_0}; \quad l = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}; \quad -\frac{\pi}{a_0} \leq p \leq \frac{\pi}{a_0}, \quad (8.1)$$

а в деформированном

$$P(l) = \frac{2\pi l}{Na_0(1+u_{xx})}, \quad -\frac{\pi}{a_0(1+u_{xx})} \leq p \leq \frac{\pi}{a_0(1+u_{xx})}. \quad (8.2)$$

При этом, хотя систематика состояний по l не меняется, по квазиимпульсу p она изменяется существенно (рис. 7). Переход в s -систему, осуществляемый подстановкой $p(p')$, $a(a')$ в $\varepsilon(p, a)$, очевидно, сохраняет ту систематику состояний по квазиимпульсу, которая имела в недеформированном кристалле:

$$p' = p(1+u_{xx}), \quad P(l) = \frac{2\pi l}{Na_0}, \quad -\frac{\pi}{a_0} \leq p' \leq \frac{\pi}{a_0}. \quad (8.3)$$

Закон дисперсии в s -системе приобретает вид

$$\varepsilon'(p'; u_{xx}) \equiv \varepsilon\left(\frac{p'}{1+u_{xx}}; a(1+u_{xx})\right). \quad (8.4)$$

Невозмущенный закон дисперсии мы можем также считать заданным в с-системе ($a_0 \equiv a'$). Используя малость относительной деформации, приходим к определению деформационного потенциала (в отсутствие вырождения):

$$\varepsilon'(\mathbf{p}'; u_{ik}) = \varepsilon'(\mathbf{p}'(\mathbf{p}'); \mathbf{a}(\mathbf{a}')), \quad \lambda_{ik}(\mathbf{p}') = \left. \frac{\partial \varepsilon'(\mathbf{p}'; u_{ik})}{\partial u_{ik}} \right|_{u_{ik}=0}. \quad (8.5)$$

Как это отмечалось в ⁷², использование с-системы в случае однородной стационарной деформации позволяет пользоваться теорией возмущений при невозмущенных «граничных» условиях (условиях периодичности).

Рассмотрим теперь случай произвольной деформации. Так как \mathbf{a} — это векторы, соединяющие близкие точки решетки ($a_i \equiv dx_i$), то для них ³³

$$a_i = a'_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} a'_k. \quad (8.6)$$

Так же преобразуются основные векторы решетки $\mathbf{a}^{(l)}$ ($l = 1, 2, 3$). Закон трансформации векторов обратной решетки

$$b_i = b'_i - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} b'_k, \quad (8.7)$$

преобразующихся так же как p_i , следует из условия $\mathbf{a}\mathbf{b} = m$, откуда $a_i \delta b_i = -b_k \delta a_k$. Поскольку энергия не меняется при повороте (как целого) данного элемента объема, закон дисперсии является функцией инвариантов относительно поворотов, составленных из \mathbf{p} и векторов прямой и обратной решеток: $p^2, \mathbf{p}\mathbf{a}, \mathbf{p}\mathbf{b}, \mathbf{a}^{(l)}\mathbf{a}^{(m)}, \mathbf{b}^{(l)}\mathbf{b}^{(m)}$. При этом $\mathbf{p}\mathbf{a}$ инвариантно и при деформации общего вида (3.3), в отличие от остальных скалярных произведений, где с точностью до линейных членов имеем

$$p^2 = (p')^2 - 2p'_i p'_k u_{ik}, \quad \mathbf{p}\mathbf{b} = \mathbf{p}'\mathbf{b}' - (p'_i b'_k + p'_k b'_i) u_{ik}, \\ \mathbf{a}^{(l)}\mathbf{a}^{(m)} = \mathbf{a}'^{(l)}\mathbf{a}'^{(m)} + (a_i'^{(l)} a_k'^{(m)} + a_k'^{(l)} a_i'^{(m)}) u_{ik}. \quad (8.8)$$

Используя эти свойства, находим, что для сильной связи с законом дисперсии *)

$$\varepsilon_0(\mathbf{p}, \{\mathbf{a}\}) = \varepsilon_0 + \alpha \{\mathbf{a}\} + \sum_n \beta_n \{\mathbf{a}\} \exp \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}\mathbf{a}_n, \quad (8.9)$$

где сумма идет по соседям в ближайших координационных сферах,

$$\lambda_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \left[\left(a_i'^{(l)} \frac{\partial \alpha}{\partial a_k'^{(l)}} + a_k'^{(l)} \frac{\partial \alpha}{\partial a_i'^{(l)}} \right) + \right. \\ \left. + \sum_n \left(a_i'^{(l)} \frac{\partial \beta_n}{\partial a_k'^{(l)}} + a_k'^{(l)} \frac{\partial \beta_n}{\partial a_i'^{(l)}} \right) \exp \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}\mathbf{a}_n \right]. \quad (8.10)$$

Интересна лишь зависящая от \mathbf{p} часть $\lambda_{ik}(\mathbf{p})$, так как константа выпадает из перенормированного тензора $\lambda_{ik}(\mathbf{p})$. Так, в кубической решетке со взаимодействием ближайших соседей эта часть $\lambda_{ik}(\mathbf{p})$ равна:

$$\lambda_{ik}(\mathbf{p}) = \sum_{l=1}^3 \left(a_i'^{(l)} \frac{\partial \beta}{\partial a_k'^{(l)}} + a_k'^{(l)} \frac{\partial \beta}{\partial a_i'^{(l)}} \right) \left(\cos \frac{p_x a}{\hbar} + \cos \frac{p_y a}{\hbar} + \cos \frac{p_z a}{\hbar} \right). \quad (8.11)$$

Отсюда видно, в частности, что тем известным плоским изоэнергетическим поверхностям, которые получаются в модели сильной связи занулением суммы (квадратная решетка) или произведения (ОЦК ⁷³) косинусов, соответствует $\Lambda_{ik}(\mathbf{p}) = 0$.

*) Выражения (8.9), (8.10) можно рассматривать как совершенно общие, если считать, что (8.9) есть разложение Фурье закона дисперсии и суммирование по n в (8.9), (8.10) ведется по всем узлам решетки Браве.

Для слабой связи вдали от точек вырождения, когда

$$\varepsilon_0(\mathbf{p}) = E_0(\mathbf{p}) + \sum_b \frac{|V_b|^2}{E_0(\mathbf{p}) - E_0(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{b})}, \quad E_0(\mathbf{p}) \equiv \frac{p^2}{2m}, \quad (8.12)$$

находим, подставляя $\mathbf{p}(\mathbf{p}')$, $\mathbf{b}(\mathbf{b}')$, $V(u_{ih})$ и раскладывая по u_{ih} :

$$\lambda_{il}(\mathbf{p}) = -\frac{p_i p_l}{m} + \sum_b \frac{2|V_b|^2}{E_0(\mathbf{p}) - E_0(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{b})} \left(\left| \frac{V_{b,il}}{V_b} \right| + \frac{p_i b_l + p_l b_i + \hbar b_i b_l}{2p_b + \hbar b^2} \right). \quad (8.13)$$

Здесь $V_{b,il}$ — производная от возмущенного потенциала по u_{il} , главный член — $mv_i v_l$ возник при преобразовании $p^2/2m$.

В той области квазиимпульсов, где

$$\varepsilon_0(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m^*},$$

деформационный потенциал выражается через эффективную массу³⁰ и ее производные по параметрам решетки

$$\lambda_{ik}(\mathbf{p}) = -m^* v_i v_k + \frac{p^2}{4} \sum_{l=1}^3 \left(a_i^{(l)} \frac{\partial}{\partial a_k^{(l)}} + a_k^{(l)} \frac{\partial}{\partial a_i^{(l)}} \right) \frac{1}{m^* \{a\}}. \quad (8.14)$$

Выражение для тензора $\lambda_{ik}(\mathbf{p})$ через блоховские матричные элементы получено в работе^{42,43}.

Таким образом, для получения деформационного потенциала достаточно рассмотреть однородную деформацию. Тогда обе решетки (исходная и деформированная) идеально периодичны и в каждой существует свой закон дисперсии для квазичастиц. Л-системе соответствует деформированная решетка. Возвращаясь (согласно (3.3)) в систему координат, где периоды не возмущены, тем самым совершаем переход в с-систему. В законе дисперсии деформированной решетки это соответствует подстановкам $\mathbf{p}(\mathbf{p}')$ и $\mathbf{a}(\mathbf{a}')$ (8.6), благодаря чему в возмущенном законе дисперсии возникает зависимость от компонент u_{ih} , первый член разложения по которым и определяет $\lambda_{ik}(\mathbf{p})$ (8.5).

9. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

Деформационный потенциал $\lambda_{ik}(\mathbf{p})$ представляет собой тензорную функцию от квазиимпульса, инвариантную относительно преобразований g точечной группы G кристалла^{71,74}:

$$g \hat{\lambda}(g^{-1}\mathbf{p}) g^{-1} = \hat{\lambda}(\mathbf{p}), \quad \hat{\lambda}(-\mathbf{p}) = \hat{\lambda}(\mathbf{p}). \quad (9.1)$$

Четность λ есть следствие симметрии относительно обращения времени. В изотропном случае, очевидно, $\lambda_{ik}(\mathbf{p})$ может быть представлен в виде:

$$\lambda_{ik}(\mathbf{p}) = \lambda_1(\varepsilon) \delta_{ik} + \lambda_2(\varepsilon) \frac{p_i p_k}{p^2}. \quad (9.2)$$

В отсутствие магнитного поля соотношения (9.1) связывают значения компонент тензора $\hat{\lambda}(\mathbf{p})$ в различных точках зоны Бриллюэна (входящих в звезду данного вектора \mathbf{p}). На компоненты $\hat{\lambda}$ это не накладывает каких-либо существенных ограничений. Лишь в отдельных симметричных точках (линиях, плоскостях) зоны Бриллюэна компоненты $\hat{\lambda}(\mathbf{p})$ оказываются связанными преобразованиями симметрии в одной и той же точке. Рассмотрим группу $G_p \subset G$, элементы которой $g_p \in G_p$ оставляют инвариантным вектор \mathbf{p} , занимающий симметричное положение в зоне: $g_p \mathbf{p} = \mathbf{p}$. Тогда $\lambda_{ik}(\mathbf{p})$ преобразуется как постоянный тензор:

$$g_p \hat{\lambda}(\mathbf{p}) g_p^{-1} = \hat{\lambda}(\mathbf{p}). \quad (9.3)$$

Поэтому в симметричных точках возникают связи между компонентами $\lambda(\mathbf{p})$, некоторые компоненты должны обращаться в нуль.

В табл. I перечислены группы G_p (группы симметрии, имеющие инвариантом компоненту вектора, вдоль которой направим ось z) и приведены правила отбора для компонент $\lambda_{xy}(p_z)$ и $\lambda_{xz}(p_z)$ ($\lambda_{zz}(p_z)$, очевидно, отлично от нуля). В металлах, однако (в отличие от полупроводников) роль отдельных точек обычно несущественна, так как дают вклад целые участки ФП. Поэтому свойства симметрии не играют определяющей роли. Совсем иная ситуация возникает в сильном магнитном поле.

Таблица I

Правила отбора для недиагональных компонент деформационного потенциала при симметричных направлениях (ось z) квазимульса в зоне Бриллюэна

G_{p_z}	C_1	C_2	C_s			C_{2v}		C_{3v}	C_{4v}	C_{6v}
			m_x^*	m_y	m_z^{**}	$2m_x m_y$	$2m_z m_n$			
$\lambda_{xy}(p_z)$	$\neq 0$	$\neq 0$	0	0	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	0	0
$\lambda_{xz}(p_z)$	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	0	0	0	0

*) $m_x(m_y)$ — зеркальная плоскость, проходящая через ось $Ox(Oy)$.
 **) $m_z(m_n)$ — зеркальная плоскость, не проходящая через ось Ox (и Oy).

Обратимся к свойствам симметрии средних по периоду обращения в магнитном поле ⁶⁶. В переменных ϵ, p_z и угол обращения $\varphi = \Omega\tau$

$$\hat{\lambda}(\mathbf{p}) = \hat{\lambda}(\epsilon, p_z, \varphi), \tag{9.4}$$

а

$$\overline{\hat{\lambda}} = \overline{\hat{\lambda}}(\epsilon, p_z), \tag{9.5}$$

если сечение (в данной зоне) односвязно. Рассмотрим теперь подгруппу тех преобразований симметрии G_H , которые не изменяют проекцию квазимульса на направление поля $g_H p_z = p_z$. Относительно группы G_H этих преобразований величины $\overline{\lambda}_{ik}$ ведут себя как компоненты постоянного тензора:

$$g_H \overline{\lambda}(\epsilon, p_z) g_H^{-1} = \overline{\lambda}(\epsilon, p_z). \tag{9.6}$$

Отличными от нуля при этом могут быть лишь те компоненты, которые являются инвариантами группы G_H . Последняя определяется симметрией направления Oz магнитного поля в кристалле. Поскольку асимптотика кинетических коэффициентов в сильном поле выражается через средние по периоду обращения, роль симметрии во многих явлениях оказывается определяющей.

Рассмотрим вначале случай $Ox \parallel \mathbf{k} \perp \mathbf{H} \parallel Oz$. При вычислении асимптотики, определяющей поглощение поперечного звука в сильных полях, согласно формулам (10.5), главные члены определяются $\overline{\Lambda}_{\alpha\alpha}$ ($\alpha = y, z$), а при $\overline{\Lambda}_{\alpha\alpha} = 0$ следующие по $1/H$ члены разложения содержат средние $v_x \psi_{x\alpha} \equiv -m_x^{-1} p_y \Lambda_{x\alpha}, v_x \psi_{x\alpha}^2, \psi_{x\alpha}^2 v^*$ ($\partial \psi_{x\alpha} / \partial \varphi \equiv \Lambda_{x\alpha}$).

При любой симметрии $\psi_{x\alpha}^2 v^* \neq 0$, что приводит в асимптотике $d_{\alpha\alpha}^I$ к членам $\sim d_{xx}^I |r/l_*|^2$. Средние $v_x \psi_{x\alpha}$ приводят в $d_{\alpha\alpha}^I$ к слагаемым $\sim d_{xx}^I (kr)^2$. Рассмотрим, когда они могут быть отличны от нуля. Интересующие нас группы G_H — это группы, допускающие существование инвариантного вектора (p_z) : C_1, C_s, C_n, C_{nv} . Величина $p_y \Lambda_{xz}$ преобразуется как x, y -компонента несимметричного тензора (за исключением изотропного случая, когда $\Lambda_{xz} \sim p_x p_z$). Поэтому она может быть отлична от нуля либо за счет своей симметричной части (группы C_s и C_{2v} , не содержащие плоскости m_y),

либо за счет антисимметричной части, преобразующейся как z -компонента момента (группы C_n). Аналогично находятся правила отбора для $p_y \Lambda_{xy}$. Результаты сведены в табл. II. Правила отбора для $v_x \psi_{x\alpha}^2$ находим, учитывая, что $\partial/\partial \tau$ (2.5) преобразуется как z -компонента момента, и, следовательно, ψ_{xz} преобразуется как y -компонента вектора, а ψ_{xy} — как ее квадрат.

Таблица II

Правила отбора для средних по углу обращения компонент деформационного потенциала при симметричных направлениях магнитного поля в кристалле ⁶⁶

$G_H \rightarrow$	C_1	C_2	C_s			C_{2v}		C_{3v}		C_{4v}	C_{6v}
			m_x	m_y	m_ξ	$2m_x m_y$	$2m_\xi m_\eta$	$3m_y$	$3m_\xi$		
$\bar{\Lambda}_{xy}$	$\neq 0$	$\neq 0$	0	0	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	0	0	0
$p_y \Lambda_{xy}$	—	—	$\neq 0$	0	—	0	—	0	$\neq 0$	0	0
$\bar{\Lambda}_{xz}$	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	0	0	0	0	0
$p_y \Lambda_{xz}$	—	$\neq 0$	—	0	—	0	$\neq 0$	0	0	0	0

Отсюда следует, что $v_x \psi_{x\alpha}^2 \neq 0$ при $G_H = C_{3v}$. При такой симметрии направления поля $d_{aa}^I \sim d_{xx}^I k r / r l_*$ (для $\bar{\Lambda}_{x\alpha} = 0$).

Существенно иная картина возникает, если сечения многосвязны и преобразуются друг в друга при преобразованиях группы G_H . Тогда сказанное выше относится лишь к сумме $\sum_a \bar{\Lambda}_{ik}^a$. Каждое же из средних $\bar{\Lambda}_{ik}^a$, вообще говоря, отлично от нуля. Благодаря этому главный член разложения d_{aa}^I не обращается в нуль даже при высокой симметрии направления магнитного поля в кристалле:

$$\sum_a \bar{\Lambda}_{\alpha x} R^2 \bar{\Lambda}_{\alpha x}^a \simeq \sum_a \frac{(\bar{\Lambda}_{\alpha x}^a)^2}{v_*^2} \tag{9.7}$$

При $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H} \parallel Oz$ для $\bar{\Lambda}_{xz}$, определяющего главный член в деформационном взаимодействии поперечного звука (теперь x — направление поляризации, z — направление распространения и магнитного поля), «правила отбора» те же, что и в рассмотренном выше случае $\mathbf{k} \perp \mathbf{H} \parallel \mathbf{u}$ (где x — было направление распространения, z — поляризации и магнитного поля (см. табл. II)). Но в тех направлениях, в которых $\bar{\Lambda}_{xz} = 0$, следующий член разложения при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H} \perp \mathbf{u}$ определяется средним $v_z \psi_{xz}^2$, и в отличие от $\mathbf{k} \perp \mathbf{H} \parallel \mathbf{u}$ относительное изменение скорости поперечного звука по отношению к продольному во всех этих симметричных направлениях $\sim (kr)^2$.

Особой является ситуация, когда деформация приводит к снятию вырождения и расщеплению зон, проявляющемуся, в частности, в нелинейных эффектах при распространении звука (см. ³⁸).

10. КИНЕТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В сильном магнитном поле асимптотики кинетических коэффициентов могут быть найдены при достаточно общих предположениях об электронном спектре.

Исходим из микроскопических выражений (6.14) для кинетических коэффициентов через оператор Грина R фурье-компоненты кинетического уравнения (2.2). При вычислении интегралов по ферми-поверхности $\langle A \rangle$ вычис-

ление средних \bar{A} по углу обращения $\varphi = \Omega\tau$ в магнитном поле *)

$$\langle A \rangle \equiv \frac{2}{h^3} \int dp_z \cdot 2\pi m^* \bar{A}, \quad \bar{A} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\varphi) d\varphi; \quad \langle A \rangle \equiv \langle \bar{A} \rangle \quad (10.1)$$

может быть проведено в достаточно общем виде. В дальнейшем вводим время релаксации $\nu^{-1}(p)$, заменяя в кинетическом уравнении (2.2) $\hat{\nu}\chi \rightarrow \nu\chi$. Для произвольной периодической функции $g(\tau)$ величина Rg тождественно удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} Rg + \frac{\alpha}{\Omega} Rg = \frac{g}{\Omega}, \quad \alpha \equiv i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega) + \nu, \quad (10.2)$$

причем явное выражение для Rg имеет вид

$$Rg = \frac{1}{\Omega(1 - \exp(-2\pi\alpha/\Omega))} \int_{\varphi-2\pi}^{\varphi} d\varphi_1 g(\varphi_1) \exp \frac{1}{\Omega} \int_{\varphi}^{\varphi_1} d\varphi_2 \alpha(\varphi_2). \quad (10.3)$$

Ограничимся случаем замкнутых сечений ферми-поверхности. В сильном магнитном поле при вычислении главных членов разложения по $1/H$ удобно пользоваться тождествами, при периодических r и g следующие из (10.2) и (10.3):

$$\frac{\partial r}{\partial\varphi} Rg = \frac{1}{\Omega} (-\overline{rg} + \overline{r\alpha Rg}), \quad gR \frac{\partial r}{\partial\varphi} = \frac{1}{\Omega} (\overline{gr} - \overline{gRr\alpha}), \quad (10.4)$$

а также соотношением

$$\overline{rRg} \approx \frac{\overline{rg}}{\alpha} + O\left(\frac{1}{\Omega}\right). \quad (10.5)$$

Ряд точных и приближенных равенств, с помощью которых удобно вычислять средние по периоду обращения в сильном магнитном поле, приведены в ⁶⁶, (Б.4) — (Б.7). Используя эти соотношения, легко получить разложения для кинетических коэффициентов в сильном магнитном поле.

Ограничимся вначале случаем $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$:

$$\mathbf{H}(0, 0, H), \quad \mathbf{k}(k, 0, 0), \quad v_x = m_*^{-1} \frac{\partial p_y}{\partial\varphi}, \quad (10.6)$$

$$v_y = -m_*^{-1} \frac{\partial p_x}{\partial\varphi}, \quad \bar{\alpha} = \bar{v}^*, \quad v^* = v - i\omega \quad (10.7)$$

и рассмотрим главный член разложения коэффициентов b_{il} , определяющих деформационное слагаемое d_{il}^I в (7.10):

$$b_{il} = i\omega k^2 \overline{\langle \Lambda_{ix} R^s \Lambda_{lx} \rangle}, \quad \overline{\langle \Lambda_{ix} R^s \Lambda_{lx} \rangle} \simeq \frac{\overline{\Lambda_{ix} \cdot \Lambda_{lx}}}{v^*} + O\left(\frac{1}{\Omega}\right). \quad (10.8)$$

Если ось z , вдоль которой направлено магнитное поле, не является осью симметрии кристалла, то согласно (9.6) $\overline{\Lambda_{ix}} \neq 0$, что и определяет следующую оценку **) матрицы b_{il} :

$$b_{il} \sim i\omega k^2 n_0 \varepsilon / v^* \quad (n = 1) \quad (10.9)$$

(в скобках указан порядок оси z). Если \mathbf{H} направлено вдоль оси второго

*) Скобки включают также суммирование по зонам (индекс опущен) и всем односвязным сечениям данной зоны (индекс a):

$$\langle A \rangle = \frac{2}{h^3} \sum_a \int dp_z \sum_a 2\pi m_a^* \bar{A}^a. \quad (10.1')$$

**) При оценках считаем, что имеем дело с хорошим металлом, у которого число электронов на атом порядка единицы и, соответственно, единственной характерной энергией является атомная $\Lambda \sim \varepsilon \sim mv^2 \sim Ms^2$ (v и m — фермиевская скорость и масса электрона, M — масса иона).

порядка, то

$$b_{\mu\nu} \sim \frac{i\omega k^2 n_0 \varepsilon}{v^*}, \quad b_{zz} \sim i\omega k^2 n_0 \varepsilon \frac{1}{v^*} \left[\left(\frac{r}{l} \right)^2 + (kr)^2 \right] \quad (n=2); \quad (10.10)$$

здесь $r \equiv v/\Omega$ — радиус закручивания, $l = v/v^*$ — (комплексная) длина свободного пробега. Случай, когда \mathbf{H} направлено вдоль оси более высокого порядка, см. в табл. II.

Асимптотика тензора проводимости неоднократно вычислялась^{5,12,67,69}, низкосимметричный случай для $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$, $r/l \ll kr \ll 1$ см. в⁶⁶.

11. КОНЦЕПЦИЯ НЕЭФФЕКТИВНОСТИ И ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ЭФФЕКТИВНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОНОВ СО ЗВУКОМ

Ввиду малости скорости звука ($s \sim 10^5$ см/с) по сравнению со скоростями электронов на ФП (для хороших металлов $v \sim 10^8$ см/с, для полуметаллов $v \sim 10^7 - 10^8$ см/с) электрон-фононное взаимодействие в бесстолкновительной области неэффективно (термин Пиппарда⁶). Благодаря этому, как известно^{3,4}, в чистых металлах при низких температурах с ростом частоты звука происходит переход от вязкого низкочастотного поглощения $\gamma/\omega \sim \omega/v$ к бесстолкновительному поглощению $\gamma/\omega \sim s/v$, когда длина свободного пробега $l = v/v$ превысит длину волны звука $\lambda = 2\pi/k$. При этом исчезает температурная зависимость, так как $l(T)$ в выражении для γ заменяется на λ . В бесстолкновительном поглощении участвуют только электроны узкого «пояска» $\mathbf{k}\mathbf{v} = \omega$, находящиеся в синхронизме со звуковой волной. Насыщение относительного поглощения γ/ω на малом уровне s/v связано с уменьшением ширины пояска и, соответственно, числа резонансных электронов с ростом частоты звука. Проследить за этим можно на примере основного эффекта — чисто деформационного взаимодействия (d^I в (7.10)), отвлекаясь вначале от вклада возбуждаемых звуком электрических полей (см. гл. 13).

Используя приближение времени релаксации и ограничиваясь рассмотрением упругой волны одной поляризации, запишем дисперсионное уравнение (7.18) в виде

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 = - \frac{2i\omega}{\rho s^2 h^3} \int \frac{dS_{\mathbf{p}}}{v} \frac{\Lambda^2}{i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega) + \nu}, \quad (11.1)$$

где $\Lambda \equiv \Lambda_{jk}$ — компонента деформационного потенциала, j — индекс поляризации, $\omega_0 = ks$ — невозмущенная частота звука, s — его скорость.

Правая часть (11.1) мала, и уравнение решается в соответствии с концепцией неэффективности заменой в ней частоты ω на невозмущенную частоту $\omega_0 = ks$. Отсюда, учитывая, что $R^s \sim 1/v$ при $kl \ll 1$, $R^s \sim \lambda d(\mathbf{k}\mathbf{v})$ при $kl \gg 1$, получаем в соответствии с^{3,4} и еще более ранними результатами для высокочастотного ($\omega t \gg 1$) поглощения в модели «желе»⁷⁵:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim \frac{\Delta s}{s} + i \frac{\gamma}{\omega} \sim d_{xx}^I \sim \begin{cases} \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 + i \frac{\omega}{v} & kl \ll 1, \\ \left(\frac{s}{v} \right)^2 + i \frac{s}{v} & kl \gg 1. \end{cases} \quad (11.2)$$

$$(11.3)$$

Результат, вообще говоря, мало чувствителен к геометрии ФП, в частности, в поглощении стоит $s/v_{\text{ат}} \sim \sqrt{m/M}$, вследствие чего малые группы вносят такой же вклад, как и большие⁷⁶.

Однако на плоских и цилиндрических участках ФП*), в том числе на локальных уплощениях, т. е. в окрестностях точек и линий, в которых

*) Роль плоских и цилиндрических участков ФП в электрон-фононном взаимодействии, а именно, в усилении коновской особенности, исследовалась впервые в работе Афанасьева и Кагана⁷⁷. Роль особых точек ФП рассматривалась в работах Каганова и Семеново⁷⁸. Здесь оба эти подхода объединяются, так как «особые» точки локально представляют собой «плоскости» либо «цилиндры».

гауссова кривизна $\mathcal{K}(p)$ обращается в нуль (а такие точки есть практически у всех металлов с анизотропными ФП), ситуация существенно отличается от описанной выше (рис. 8). При распространении волны вдоль плоскости или оси цилиндра все электроны этих участков одновременно оказываются в синхронизме с волной⁷⁸⁻⁸⁰. Число резонансных электронов не убывает (или не столь быстро убывает) с увеличением частоты (как это имеет место на «пояске»), и частотный рост продолжается вплоть до частоты столкновений, перенормированной на долю плоского или цилиндрического участка

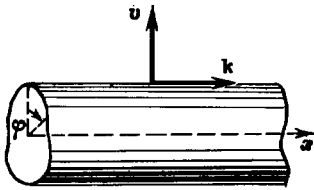


Рис. 8. Геометрия эффективного взаимодействия на цилиндрической ФП при $\omega\tau_{эфф} < 1$.

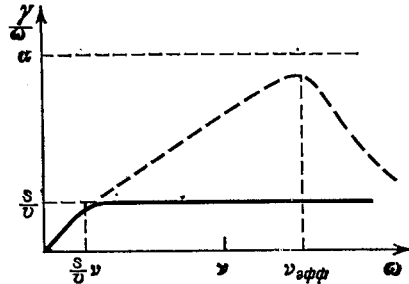


Рис. 9. Насыщение относительного поглощения в произвольном и его рост в критическом направлении, соответствующем эффективному взаимодействию.

ФП (рис. 9). Отдельные точки при этом дают вклад, сравнимый со вкладом всей остальной ФП. Здесь мы сталкиваемся со случаями *эффективного* взаимодействия электронов со звуком. Соответственно имеет место резкая угловая зависимость от направления k , а именно, возрастание поглощения и дисперсии в критических направлениях при включении всех электронов локальной плоскости или цилиндра в синхронное взаимодействие с волной. Эта ситуация подобна той, которая возникает в сильном магнитном поле H ($kr \ll 1$) при $k \perp H$ и замкнутых сечениях ФП^{81,82}, и также соответствует случаю *эффективного* взаимодействия. Резкая зависимость поглощения и дисперсии от направления распространения сродни эффекту отклонения^{83-85,82} в сильном поле.

Столь существенный вклад изолированных точек и линий связан с особенностью парциальной плотности состояний. Поясним сказанное на примере цилиндрического участка ФП (длиной Δp). При k , перпендикулярном оси цилиндра (неособое направление), поясок совпадает с образующей, и (деформационное) поглощение имеет вид

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{2\pi}{h^3} \frac{\omega \Delta p}{\rho s^2} \int \frac{dp_x}{v} \Lambda^2 \delta(kv_x - \omega) = \frac{\Delta p}{4\pi^2 h^3 \rho s} \frac{\Lambda^2}{v} \left. \frac{dv_x}{dp_x} \right|_{v_x = \omega/k}. \quad (11.4)$$

Видно, что если в сечении цилиндра имеется точка p_c , где $(\partial v_x / \partial p_x)_c = 0$, то согласно (11.4) $\gamma \rightarrow \infty$, если поясок приближается к этой точке*). Условие $\epsilon_{xx} \equiv \partial v_x / \partial p_x = 0$ является частным случаем обращения в нуль гауссовой кривизны $\mathcal{K}(p) = (1/v^2)(\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} - \epsilon_{xy}^2)$. В дисперсионном уравнении (11.1) интеграл имеет максимум, когда полюс $kv = \omega$ попадает в окрестность точки (линии) нулевой кривизны (НК). Так как $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cdot \mathcal{K}_2$ ($\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ — главные кривизны поверхности), здесь возможны точки уплощения, в которых обе главные кривизны поверхности равны нулю, и параболические точки, в которых обращается в нуль только одна кривизна (рис. 10). Вообще говоря, поверхности Ферми имеют линии НК. В общем случае при заданном критическом направлении k аномальный вклад вносит одна точка линии НК — точка ее пересечения с пояском $kv = \omega$.

*) Область применимости подобных выражений мы установим ниже.

Вклад точек НК, как и конечных участков НК, в отличие от обычного высокочастотного поглощения, существенно зависит от длины свободного пробега и ввиду этого обладает определенной температурной зависимостью⁷⁸⁻⁸⁰. О первом обнаружении этих эффектов и наблюдении сопровождающей их появления температурной зависимости сообщалось в докладе Филя, Денисенко и Безуглого⁸⁷ (рис. 11). В рамках этого подхода находят свое естественное объяснение и наблюдавшиеся ранее аномалии^{74,88,89} (рис. 12, 13) (см. статью Суслова⁹⁰, где показано, в частности, что критические направления у многих металлов могут обладать высокой симметрией) (рис. 14).

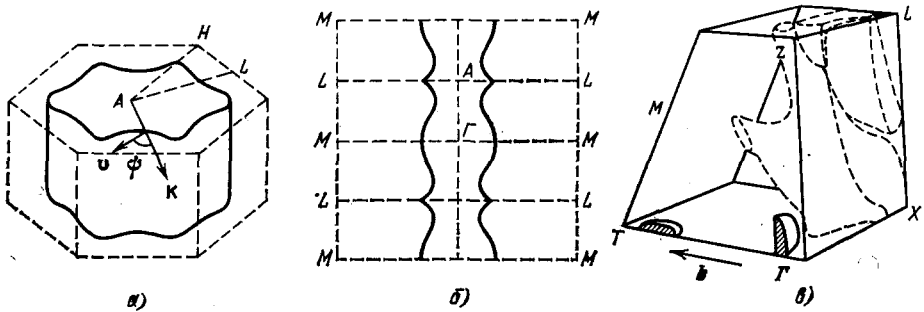


Рис. 10. Примеры ФП, имеющих линии уплощения (ФП дихалькогенида 2H-NbSe^{112}), параболические линии (элементы ФП гадолиния¹¹³) и, возможно, уплощения (ФП галлия¹¹⁴).

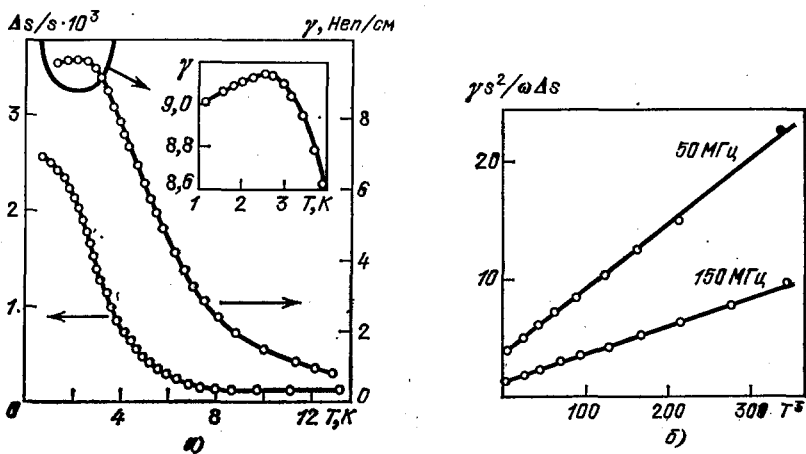


Рис. 11. а) Температурные зависимости поглощения и дисперсии скорости продольного звука в чистом Ga при распространении его вдоль оси \mathbf{b} ⁸⁷; б) зависимость $\omega T \sim T^{-3}$ ⁸⁷, свидетельствующая о малости уплощения на ФП в сравнении с тепловым импульсом фона^{87,110}.

В пределе $l \rightarrow \infty$ поглощение и дисперсия в точках НК имеют особенности. Их характер, дающий представление об угловой зависимости при конечном l , указан ниже. Чтобы оценить величину эффекта и исследовать его частотную зависимость, учитывается конечность частоты столкновений.

Заметим, что для конечных участков НК введение времени релаксации неоправдано⁸⁶ (рис. 15). В точках НК это возможно, так как вклад во взаимодействие со звуком дает только узкая область \mathbf{p} -пространства — «поясок», как и для обычного высокочастотного поглощения.

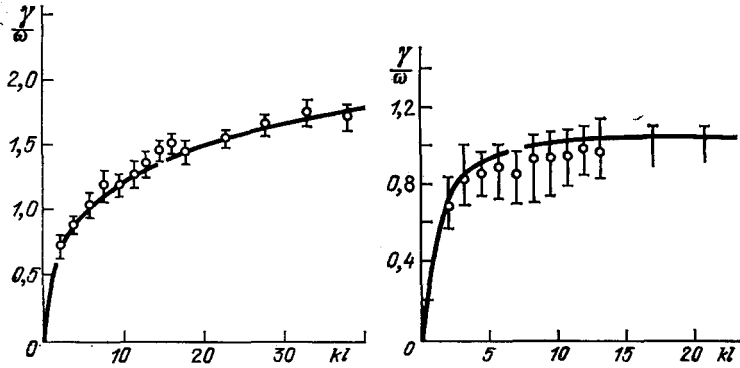


Рис. 12. Экспериментальные зависимости относительного поглощения звука для Cu^{74} . а) Направление [111] (виден выход на насыщение при $kl \sim 5$); б) направление [100] (логарифмический рост вплоть до $kl \sim 40$; по Суслову).

В интеграле (11.1) по всем ФП выделяем вклад окрестности точки (линии) НК

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{\text{особ}} = -G(\mathbf{p}_c) \int \frac{dS_{\mathbf{p}}}{k\mathbf{v} - \omega - i\nu}, \quad (11.5)$$

где

$$G(\mathbf{p}_c) = \frac{2\omega}{\rho s^2 h^3} \frac{\Lambda^2(\mathbf{p}_c)}{v(\mathbf{p}_c)}$$

— медленные функции $\Lambda^2(\mathbf{p})$ и $v(\mathbf{p})$ вынесены за знак интеграла в точке НК \mathbf{p}_c .

Существенно, что в разложении $k\mathbf{v} - \omega$ в (11.5) вблизи от точки НК отсутствуют определенные линейные члены. Не останавливаясь на вычислениях (см. ⁷⁸⁻⁸⁰), кратко обсудим характер возникающих особенностей (рис. 16).

В изолированной точке уплющения резонансным является любое направление \mathbf{k} в касательной плоскости (точнее, на конусе под углом s/v к ней). Поглощение в резонансе $k\mathbf{v}_c = \omega$ имеет логарифмическую особенность

$$\frac{\gamma}{\omega} \sim \frac{s}{v} \ln \left| \frac{\omega}{k\mathbf{v}_c - \omega} \right|,$$

а скорость звука испытывает скачок (точка X-типа)

$$\frac{\Delta s}{s} \sim \frac{s}{v} \theta \left(\frac{k\mathbf{v}_c - \omega}{\omega} \right),$$

или, напротив, поглощение испытывает скачок, а скорость звука имеет логарифмическую особенность (точка O-типа) ^{79,80}. Выделенное направление, однако, появляется, если точка уплющения принадлежит параболической линии. Тогда при \mathbf{k} , параллельном ее соприкасающейся плоскости или перпендикулярном к ней, правая часть (11.5), а с ней поглощение и дисперсия могут иметь (см. 13.16) корневые особенности, как и в случае линии уплющения $\sim \sqrt{\omega/(k\mathbf{v}_c - \omega)}$.

Конечное l размывает особенности, но на высоких частотах учет лишь одного этого обстоятельства недостаточен. Например, для линии уплющения поглощение и дисперсия (при $\omega \ll v$) имеют узкие максимумы шириной $1/kl \ll 1$ по углу, причем максимальные значения $(\gamma/\omega)_{\text{max}}$, $(\Delta s/s)_{\text{max}}$ растут с увеличением частоты как $\sqrt{\omega/v}$.

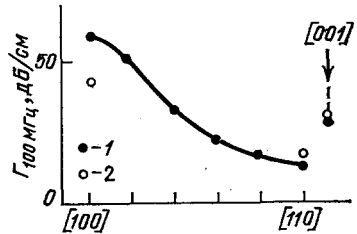


Рис. 13. Угловая зависимость поглощения в $\text{Sn}^{88,89}$. Максимум соответствует критическому направлению (по Суслову).

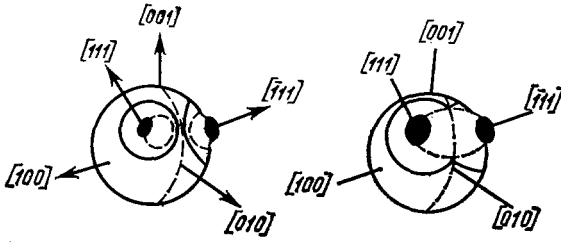


Рис. 14. Выход линии параболических точек на симметричное направление по мере роста интерференции между перешейками⁸⁰.

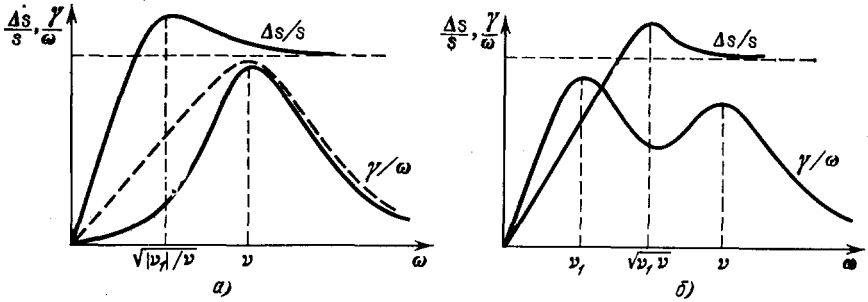


Рис. 15. Отклонения от τ-приближения при эффективном взаимодействии при различных соотношениях между частотой приходов и уходов⁸⁶ (область $\omega \rightarrow 0$ исключена).

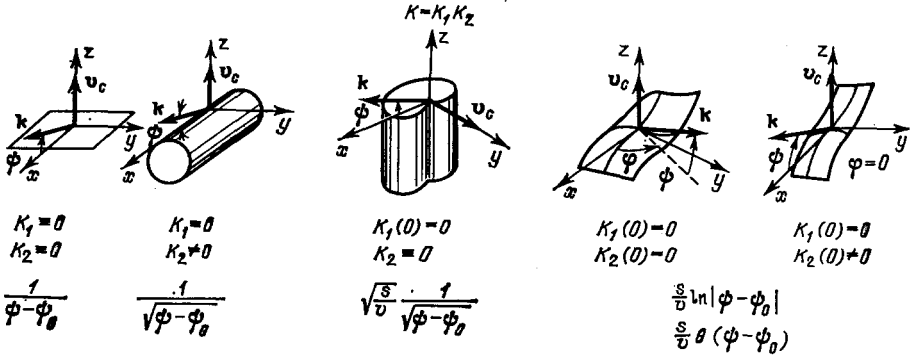


Рис. 16. Вид особенности в зависимости от локальной геометрии.

Однако эта особенность при $\omega \rightarrow \infty$ кажущаяся. Она соответствует лишь промежуточной асимптотике $vs/v \ll \omega \ll v_{0\phi\phi}$. Само дисперсионное уравнение (11.1) ограничивает этот рост, который сменяется спадом у поглощения и насыщением у дисперсии (рис. 17). Формулы (11.2) — (11.4), соответствующие теории возмущений по $|\Delta\omega/\omega| \ll 1$ на высоких частотах в области углового резонанса, неприменимы. В этом случае разность $kv - \omega$, стоящую в знаменателе (11.5), нельзя считать заданной, а следует искать ее из дисперсионного уравнения, которое в рассматриваемом случае в резонансном приближении имеет вид ($C = \pi G \Delta\rho \sqrt{2s/|\epsilon_{xxx}|} \sim s/v$)

$$\omega - \omega_0 = -C\omega_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{kv_c - \omega - iv}} \begin{cases} i, & \epsilon_{xxx} < 0, \\ 1, & \epsilon_{xxx} > 0, \end{cases} \quad (11.6)$$

или

$$(\omega - \omega_0)^2 (kv_c \sin \psi - \omega - iv) = \mp C^2 \omega_0^3. \quad (11.6')$$

Как видно, это уравнение сходно с тем, которое описывает взаимодействие волн — звуковой ($\omega = \omega_0 \equiv ks$) и «электронной» волны ($\omega = kv_c - iv$).

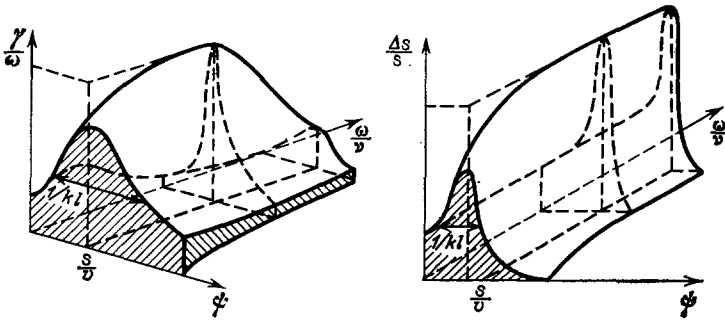


Рис. 17. Частотно-угловые зависимости поглощения и дисперсии скорости звука при эффективном взаимодействии для $\omega\tau_{эфф} \sim 1$.

Последняя в условиях $\omega t \gg 1$ является слабо затухающей. Она представляет собой (при особенности $1/x$) переносимое «электронным пучком», движущимся со скоростью v_c , возмущение электронного распределения (электронной плотности). Такие волны хорошо известны для электронных пучков в вакууме и плазме. Здесь же обособление «пучка» из всего коллектива электронов проводимости обусловлено фермиевским характером распределения и соответствует уплощению на ФП, благодаря чему относительно немалое число электронов проводимости ($\sim \sqrt{s/v}$) имеет близкую к v_c скорость. Свойства электронной «волны» зависят от вида особенности ⁹⁷. В силу центральной симметрии всегда имеются два «встречных» пучка с $\pm v_c$, но при $\omega t \gg 1$ звуковая волна находится в резонансе только с одним из них.

Связь электронной волны со звуком обусловлена либо прямым деформационным взаимодействием (как в (11.6)), либо электрическими полями (см. гл. 13). В свою очередь при больших ωt звуковые волны оказываются связанными с пучковыми электронными волнами, что приводит к прекращению вязкого роста поглощения с частотой. Заметим, что электронные волны возникают в газовой системе и не требуют какого-либо взаимодействия между электронами.

Поправка к корню $\omega = \omega_0$ при $C \ll 1$ и $\omega_0 \gg v_{эфф} = vC^{-2/3}$, как следует из (11.6), равна (коэффициенты порядка единицы опущены)

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right) \psi_{max} \approx C^{2/3} \left(\pm 1 - i \frac{v_{эфф}}{\omega}\right), \quad \psi_{max} \sim \frac{s}{v}. \quad (11.7)$$

Из (11.6), (11.7) видно, что на частоте $\omega \sim v_{эфф} \sim v (v/s)^{1/3}$ поглощение и изменение скорости звука достигают по величине значения $\sim (s/v)^{1/3}$, затем, при $\omega \gg v_{эфф}$, поглощение убывает, а дисперсия выходит на насыщение (см. рис. 17).

12. ПОГЛОЩЕНИЕ И ДИСПЕРСИЯ ПРОДОЛЬНОГО И ПОПЕРЕЧНОГО ЗВУКА В МЕТАЛЛАХ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Роль деформационного взаимодействия и электрических полей может существенно различаться для чисто продольного и чисто поперечного звука.

По сравнению с продольным звуком взаимодействие поперечного звука с электронами отличается рядом особенностей. К ним относится существенный вклад поперечных электрических полей, возникающих при распространении (поперечной) звуковой волны в металле (см. ¹⁴⁻²⁰) и гораздо большая, чем для продольного звука, чувствительность к анизотропии электронного спектра. Последнее связано с тем, что в деформационном взаимодействии

поперечного звука с электронами играют роль обращающиеся в нуль при переходе к изотропному спектру модули сдвига электронного газа (а не модули сжатия, как для продольного звука). Особенно отчетливо это проявляется в присутствии сильного магнитного поля, от направления которого в кристалле^{92, 66} существенно зависит поглощение поперечного звука.

Различие в деформационном взаимодействии электронов с продольным и поперечным звуком формально проявляется в том, что в первом случае оно определяется диагональными, а во втором — недиагональными компонентами тензора деформационного потенциала $\Lambda_{ijk}(\mathbf{p})$ (один из индексов указывает направление распространения, а другой — поляризацию волны). Средние от них по периоду обращения⁶⁶ (которые ответственны за взаимодействие с поперечным звуком в сильном поле) при симметричном направлении поля могут равняться нулю (см. п. 9), что существенно изменяет частотную и полевую зависимость поглощения (и дисперсии) поперечного звука в сравнении с продольным.

В сильном магнитном поле H при $kr \ll 1$ для замкнутых односвязных сечений ФП комплексное изменение частоты звука выражается через усредненные по периоду обращения в магнитном поле величины^{66, 80}:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\omega}{\rho s^2} \frac{4\pi}{h^3} \int m^* dp_z \frac{\bar{\Lambda}^2}{k\bar{v}_z \sin\psi - \omega - i\nu}, \quad (12.1)$$

где m^* — циклотронная масса, $(\pi/2) - \psi$ — угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{H} .

При $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$ получаем отсюда оценку $\Delta\omega/\omega \sim i\omega/(\nu - i\omega)$ при любых kl и $\omega\tau$ (считая $\Lambda \sim \varepsilon \sim mv^2 \sim Ms^2$):

$$\frac{\gamma}{\omega} \sim \frac{\omega\nu}{\nu^2 + \omega^2}, \quad \frac{\Delta s}{s} \sim \frac{\omega^2}{\nu^2 + \omega^2}, \quad (12.2)$$

где возможен безразмерный множитель, порядок которого обозначим ξ .

Видно, что при $\omega \gg \nu$ возникает сильная перенормировка скорости продольного звука, рассмотренная Куликом⁸¹ и обнаруженная Безуглым и Бурмой на галлии⁸² (рис. 18), $\xi \sim 10^{-1}$. Поглощение при $kl \gg 1, \omega\tau \ll 1$ существенно превышает бесстолкновительное*) и по порядку величины совпадает с тем, которое имелось бы при слабой дисперсии в отсутствие поля $\gamma/\omega \sim \omega/\nu$. При $\omega \sim \nu$ оно достигает максимума (порядка ξ при грубых оценках), т. е. здесь мы имеем случай эффективно-го взаимодействия всех электронов ФП со звуком. Эти результаты имеют простой физический смысл. Поведение как поглощения, так и дисперсии соответствует вкладу второй вязкости, благодаря наличию медленного процесса (столкновений) в электронной подсистеме, и описывается общей теорией Леонтовича — Мандельштама и Кнезера (см. ⁹⁴). Действительно, кинематическая вязкость электронного газа $\eta_{эл} \sim nmvl$, а поскольку соответствующая вязкая сила фигурирует в уравнении движения решетки, то коэффициент поглощения $\gamma \sim \eta_{эл}k^2/\rho$. Учтывая, что $Ms^2 \sim \varepsilon$, получаем оценку (12.2).

Хотя магнитное поле не входит в (12.2), роль его весьма существенна. При $\mathbf{H} \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$ и электрон движется лишь вдоль направления $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$. При этом невозможно бесстолкновительное поглощение, связанное с затуха-

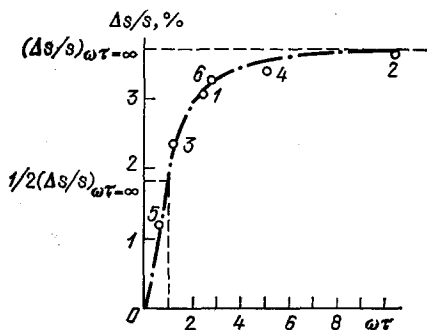


Рис. 18. Дисперсия скорости звука при $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$ в Ga для $kr \ll 1$ и $\mathbf{H} \parallel [001]$ ⁸².

*) Это обстоятельство, по-видимому, впервые было отмечено В. Л. Гуревичем¹⁴; см. также⁹³.

нием Ландау, сколь бы велики ни были частоты *). Поглощение носит столкновительный характер и при $kl \gg 1$ (в отличие от ситуации при $H = 0$). Смещаясь вдоль магнитного поля, электрон перемещается относительно фазовых фронтов звукового поля за счет движения последнего. При этом в продольной звуковой волне совершается работа против сил усредненного в магнитном поле электронного давления, описываемого компонентной $\bar{\Lambda}_{xx} \neq 0$. Столкновения приводят к вязкому поглощению, средняя работа, совершаемая звуковым полем над электронами, становится отличной от нуля. При чисто деформационном взаимодействии в сильном поле работа, совершаемая звуковым полем над электронами, пропорциональна $\bar{\Lambda}_{ix}^2$, где i — направление смещения, а x — направление распространения звука. Итак,

$$d_{pq}^I \approx -\frac{i\omega}{\rho s^2} \left\langle \frac{\bar{\Lambda}_{px}\bar{\Lambda}_{qx}}{v^*} \right\rangle \quad (n=1). \quad (12.3)$$

Но в то время, как для продольного звука величина $\bar{\Lambda}_{xx}$, играющая роль парциального электронного давления при $H \rightarrow \infty$, всегда отлична от нуля, величины $\bar{\Lambda}_{xy}$ и $\bar{\Lambda}_{xz}$, описывающие поток импульса при $H \rightarrow \infty$ для поперечного звука, равны нулю, если только \mathbf{H} направлено по оси симметрии порядка, большего трех при односвязных сечениях ФП (подробнее см. п. 8 и табл. II). Если же ось есть ось второго порядка, то в этом случае поперечный звук y -поляризации ведет себя так же, как продольный, в поглощении же и дисперсии поперечного звука z -поляризации проявляются эффекты пространственной дисперсии, т. е. сказывается конечность радиуса закручивания на длине волны. При $kl \gg 1$ при таких направлениях поля асимптотика поглощения и дисперсии имеет вид

$$d_{\alpha\alpha}^I \sim \frac{i\omega}{v - i\omega} (kr)^2 \quad (n=2). \quad (12.4)$$

Этот эффект существенного изменения модуля сдвига был экспериментально обнаружен на галлии Безуглым, Бурмой и Кабановым⁹⁵ (рис. 20, 21).

При симметричном направлении магнитного поля в кристалле (см. табл. II) электронные модули сдвига связаны с конечностью H и обусловлены неполным усреднением: конечностью периода обращения в магнитном поле по сравнению с длиной звуковой волны, со временем свободного пробега или смещением электрона за период поля: $kr, |r/l_*| \ll 1$.

Совершенно другой результат получается в случае многосвязных сечений, когда отдельные односвязные части переходят друг в друга при преобразованиях симметрии. Средние по каждой из областей $\bar{\Lambda}_{\alpha\alpha}^a$, вообще говоря, отличны от нуля даже при высокой симметрии направления магнитного поля, асимптотика $d_{\alpha\alpha}^I$ (см. (9.7)) имеет ту же порядковую оценку, что и d_{xx}^I . Результат (12.4) чувствителен также и к магнитному пробую.

Обратимся теперь к эффекту отклонения, который следует из (12.1) при $1 \gg |\sin \psi| \neq 0$. Как уже указывалось⁸⁶, рассматривавшиеся в гл. 11 угловые особенности во многом являются его аналогом. Для ФП общего вида, когда дает вклад окрестность опорной точки, особенность в эффекте отклонения логарифмическая^{84,85}, а если $\bar{d}v_z/dp_z$ обращается в нуль (при

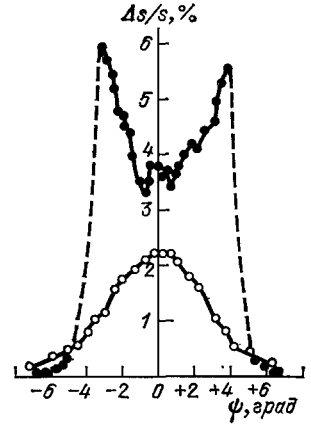


Рис. 19. Эффект отклонения в Ga при $\omega t = 1,2$ и $\omega t \approx 10,4^{82}$.

*) Заметим, в связи с этим, что условие $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$ весьма критично, так как уже при отклонениях на угол $\sim s/v$ электроны оказываются в резонансе с волной при $\omega t \gg 1$ (эффект отклонения^{83,84}) (рис. 19).

$p_z = p_{z0}$ *) — корневая ⁸⁶. Теория возмущений (при $\omega t \gg 1$) неприменима, а в резонансном приближении результат для не слишком малых $\sin \psi \gg A/kl$ описывается (при корневой особенности) формулами (11.6), (11.7), где следует заменить

$$v \rightarrow \bar{v}, \quad kv_c \rightarrow k\bar{v}_z(p_{z0}) \sin \psi, \quad C \rightarrow C_H \sim 1, \quad \varepsilon_{xxx} \rightarrow \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial p_z^2} \Big|_{p_{z0}}. \quad (12.5)$$

Соответственно, переносятся качественные выводы гл. 11 (см. рис. 14).

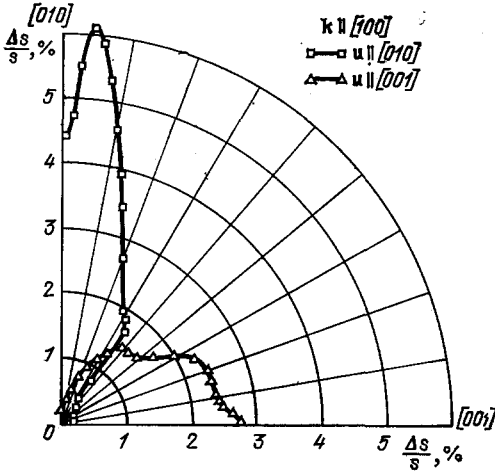


Рис. 20. Изменение скорости поперечного звука $\Delta s/s$ различных поляризаций как функция направления \mathbf{H} в плоскости (1,0,0) при $H = 15$ кэ, $\omega/2\pi = 50$ МГц, $T = 1,7$ К в чистом Ga при $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$ ⁹⁵.

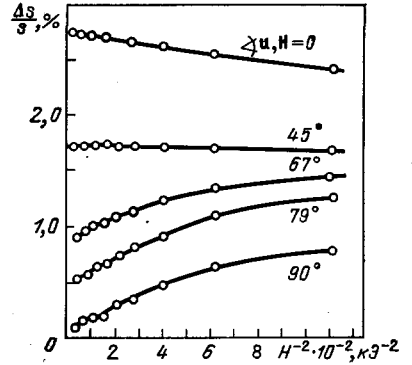


Рис. 21. Зависимости $\Delta s/s$ для поперечного звука с поляризацией $\mathbf{u} \parallel [001]$ от величины \mathbf{H} при различных углах между \mathbf{u} и \mathbf{H} ($\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$) ⁹⁵.

Видно существенное изменение электронного вклада в упругие модули сдвига.

Налицо и отличия, проявляющиеся в величине эффекта ($C_H \sim 1$) и зависимости C_H от угла отклонения, приводящей к асимметрии, а также в роли, которую могут играть электрические поля (см. ниже гл. 13).

13. ВКЛАД ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ВО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНОВ СО ЗВУКОМ

На существенный вклад в деформационное электронное поглощение электрических полей, возбуждаемых звуковой волной, было обращено внимание Гуревичем ¹⁴ и Силиным ¹⁹. Из выражения для электронных модулей (7.10) следует, что деформационное взаимодействие (равно как и индукционное) перенормируется как продольными, так и поперечными электрическими полями ^{20,66}. Причем вклад поперечных полей зависит от соотношения между длиной волны звука и длиной электромагнитной волны (скиновой глубиной δ) в металле**), определяемой параметром $(k\delta)^2$.

Самосогласованные электрические поля могут играть роль механизма, ограничивающего частотный рост поглощения или дисперсии на высоких частотах при эффективном взаимодействии. Соответствующая компенсация

*) Например, для поверхности вращения при $\mathbf{H} \parallel$ оси орбита $p_z = p_{z0}$ является (параболической) линией НК, на которой $\partial v_z / \partial p_z = 0$ при любых ψ , откуда следует и $d\bar{v}_z / dp_z = 0$ (равенство нулю средней по периоду обращения кривизны).

**) В магнитном поле благодаря недиссипативному характеру холловского тока, а также за счет аномальной дисперсии, приводящей к положительной диэлектрической проницаемости вблизи от частот резонансных переходов, в металлах могут существовать слаботатахующие электромагнитные ^{67,68} и квантовые ^{35,69} волны, которые способны интенсивно взаимодействовать со звуком ^{69,11}.

деформационного взаимодействия продольными электрическими полями для плоского участка ФП при $\omega t \gg 1$ рассматривалась в ⁹¹. Компенсирующая роль вихревых электрических полей в эффекте отклонения для продольного звука обсуждалась в ⁹⁶. Экранирование резонансного взаимодействия вихревыми полями обнаружено на поперечном звуке в ⁴⁴.

Заметим, что при локальных уплотнениях вклад электрических полей для продольного звука, как правило, несущественен вплоть до весьма высоких и недостижимых в настоящее время (либо вообще нереалистических) частот (см. ниже), значительно (в v/s либо в $s/v \exp v/s$ раз) превышающих частоту столкновений.

Рассмотрим вначале область сильной пространственной дисперсии $kl \gg 1$ при $H = 0$. Оценки кинетических коэффициентов для обычного неэффективного взаимодействия существенно связаны с величиной

$$(k\delta)^2 \equiv \frac{k^2 c^2}{4\pi\sigma\omega}, \quad (13.1)$$

через которую тензор эффективного удельного сопротивления может быть выражен в виде

$$\hat{\rho} = [\hat{\sigma}^\perp + i\sigma(k\delta)^2 \hat{I}]^{-1}. \quad (13.2)$$

Согласно определению, $k\delta = \lambda_{\text{эм}}/\lambda_{\text{зв}}$, где $\lambda_{\text{эм}} = 2\pi c/\sqrt{4\pi\sigma\omega}$ — длина электромагнитной волны в веществе (с учетом пространственной дисперсии), а $\lambda_{\text{зв}} = 2\pi s/\omega$ — длина звуковой волны. Если эти длины существенно отличаются, приходим к известной оценке (11.3)

$$d_{pq} \sim \frac{s}{v} \left(i + \frac{s}{v} \right), \quad kl \gg 1. \quad (13.3)$$

При $k\delta \gg 1$ вкладом в поглощение от электрических полей можно пренебречь, а при $k\delta \ll 1$ поля дают в поглощение существенный вклад ¹⁴ сравнимый с деформационным. В связи с этим при $k\delta \sim 1$ (т. е. при $\lambda_{\text{эм}} \sim \lambda_{\text{зв}}$, что соответствует частотам $\omega \sim 10^9 \text{ с}^{-1}$) происходит переход от линейной частотной зависимости поглощения при $k\delta \ll 1$ к линейной зависимости (но уже с другим коэффициентом) при $k\delta \gg 1$ ¹⁴. В этой области должна иметь место и дисперсия скорости звука, причем изменение скорости звука — того же порядка, что и поглощение.

Действительно, при $k\delta \sim 1$

$$\rho_{\alpha\beta} \sim \sigma^{-1} (1 + i), \quad G_{il} \sim \frac{m}{e} \omega kv (1 + i). \quad (13.4)$$

Уже отсюда видно, что электрические поля при $k\delta \sim 1$ вносят вклад одного порядка как в поглощение, так и в дисперсию ²⁰.

Воспользовавшись этими оценками найдем, что в d_{pq} дает вклад только деформационная сила f^I , причем вкладом в нее продольных электрических полей также можно пренебречь, т. е. существенны слагаемые d^I и d^{IV} :

$$d_{pq} = -\frac{1}{\rho k^2 s^2} (b_{pq} - c_{p\alpha} \rho_{\alpha\beta} \partial_{\beta q}). \quad (13.5)$$

При этих частотах оценка для d_{pq} имеет вид, отличный от (13.3):

$$d_{pq} \sim \frac{s}{v} (1 + i) \quad (kl \gg 1, \quad k\delta \sim 1). \quad (13.6)$$

Для скорости звука и поглощения

$$\frac{\Delta s}{s} + i \frac{\gamma}{\omega} \sim d_{pp}$$

несложные формулы могут быть получены в широкой области частот, включая переходную область при $k\delta \sim 1$. В поперечном удельном сопротивлении $\rho_{\alpha\beta}$ достаточно удержать лишь $\text{Re } \sigma_{\alpha\beta}^\perp = \text{Re } \sigma_{\alpha\beta}$. Ответ удобно записать,

выбрав в качестве осей главные оси μ, ν этого тензора:

$$\rho_{\mu\nu} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{\sigma_{\mu} + i\sigma(k\delta)^2}, \quad \text{Re } \sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\mu} \delta_{\mu\nu}, \quad (13.7)$$

$$2\sigma_{1,2} = \text{Sp } \hat{\sigma} \pm \sqrt{\text{Sp}^2 \hat{\sigma} - 4 \text{Det } \hat{\sigma}}, \quad \hat{\sigma} = \text{Re } (\sigma_{\alpha\beta}).$$

Согласно (13.5), (13.7), (6.14), получаем

$$d_{pq} = -\frac{i\omega}{\rho s^2} \left[\langle \Lambda_{p\kappa} R^s \Lambda_{\kappa q} \rangle - e^2 \sum_{\mu=1}^2 \frac{\langle \Lambda_{p\kappa} R^a v_{\mu} \rangle \langle v_{\mu} R^a \Lambda_{\kappa q} \rangle}{\sigma_{\mu} + i(k^2 c^2 / 4\pi\omega)} \right]. \quad (13.8)$$

Подставляя в (13.8) значения R^s, R^a и $\sigma_{\mu} = \pi e^2 k^{-1} \langle v_{\mu}^2 \delta(v_{\kappa}) \rangle$, получим частотный ход поглощения и дисперсии ²⁰ (рис. 22).

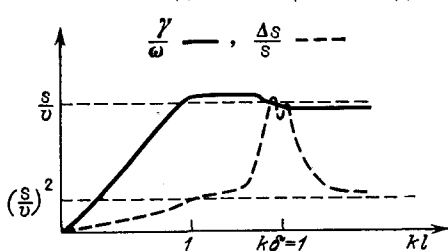


Рис. 22. Поглощение ¹⁴ и дисперсия ²⁰ поперечного звука при $\lambda_{зв} \sim \lambda_{эм}$.

Изменение скорости поперечного звука согласно (13.8) проходит через максимум при

$$\omega^2 = \omega_{\mu}^2 \equiv (2\pi e)^2 s^3 c^{-2} \langle v_{\mu}^2 \delta(v_{\kappa}) \rangle. \quad (13.9)$$

Обратимся теперь к роли полей при эффективном взаимодействии ^{*}, когда относительно не малая (или, вообще, конечная) доля электронов на ФП синхронно взаимодействует со звуковой волной (п. 11). Для продольного звука дисперсионное уравнение с учетом перенормировки деформационного вклада продольными полями ($d^I + d^{II} = d$) согласно (7.10) есть

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 = -\frac{1}{\rho \omega^2} \left(b_{xx} - \frac{c_{xx} \partial_{xx}}{\sigma_{xx}} \right). \quad (13.10)$$

При $H = 0$ получаем, введя время релаксации ⁹¹:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 = -\frac{\omega}{\rho s^2} \left[\left\langle \frac{\Lambda_{\kappa\kappa}}{kv - \omega - iv} \right\rangle - \frac{\left\langle \frac{\Lambda_{\kappa\kappa} v_{\kappa}}{kv - \omega - iv} \right\rangle^2}{\left\langle \frac{v_{\kappa}^2}{kv - \omega - iv} \right\rangle} \right]. \quad (13.11)$$

Вклад полей в области резонанса $kv = \omega$ существенно зависит от локальной геометрии резонансной области на ФП ^{97,91}. На низких частотах $\omega \ll v$ этот вклад мал, происходит вязкий рост поглощения и дисперсии и, как мы видели выше, в условиях эффективного взаимодействия не происходит переход к бесстолкновительному случаю при $kl \sim 1$, а продолжается рост поглощения и дисперсии за счет электронной вязкости.

Но на высоких частотах, если только числители в интегралах достаточно медленно меняются в области резонанса и их можно вынести за знак интеграла, из (13.11) видно, что главные растущие с частотой неполевые и полевые члены в правой части (13.11) взаимно уничтожаются. При этом частотный рост поглощения сменяется спадом, а скорость звука выходит на насыщение.

Эта компенсация имеет простой физический смысл: она связана с электронейтральностью металла, накладывающей ограничение (3.10) на ток ($j_{\kappa} = 0$). В рассматриваемых условиях, когда токи определяются вкладом электронов малого участка ФП с близкими скоростями, обращение в нуль продольного тока может быть достигнуто лишь за счет взаимной компенсации полевых и деформационных слагаемых ^{**}). По сути, в «одноточечной»

^{*}) Эта часть работы написана совместно с Н. А. Степановой.

^{**}) Возможна компенсация бесконечностей за счет ферми-жидкостного взаимодействия (см. ¹²⁰).

особенности невозможно вызвать существенное отклонение электронов от состояния равновесия, не нарушив при этом электронейтральности металла. Соответствующий запрет и обеспечивается компенсацией. Однако ввиду того, что в продольной проводимости σ_{xx} особенность сильно подавлена множителем v_x^2 , компенсация наступает лишь при очень больших $\omega\tau$.

Для продольной проводимости имеем (при $v = \text{const}$):

$$\frac{\sigma_{xx}}{e^2} = -\frac{i\omega^*}{k^2} \langle 1 \rangle + \left(\frac{\omega^*}{k}\right)^2 \langle R \rangle, \quad \omega^* \equiv \omega + iv. \quad (13.12)$$

Преобладание особой части $\langle R \rangle^c$, необходимое для компенсации деформационных членов полевыми, реализуется при условии

$$|\mathcal{R}| \gg 1, \quad \mathcal{R} \equiv \frac{\omega^* \langle R \rangle^c}{\langle 1 \rangle}. \quad (13.13)$$

Приведем оценку особой части для различной локальной геометрии при $kv_c = \omega$, $\omega\tau \gg 1$ (с точностью до фазовых множителей и угловой зависимости)

$$\mathcal{R} \sim \begin{cases} \omega\tau - \text{плоскость,} \\ \sqrt{\omega\tau} - \text{цилиндр,} \\ \frac{s}{v} \sqrt{kl} - \text{линия уплощения *)}, \\ \frac{s}{v} \ln kl - \text{точка уплощения, параболическая точка.} \end{cases} \quad (13.14)$$

В случае плоскости и цилиндра \mathcal{R} содержит также множитель ξ , равный отношению площадей особого участка и всей ФП. В принципе, компенсация могла быть существенной для конечных плоских (или цилиндрических) участков ФП ⁹¹ при $\omega\tau \geq 1/\xi$, но и в этом случае, если $\xi \ll 1$, при значительно меньших частотах $\omega\tau \sim 1/\sqrt{\xi}$ станет существенным резонанс с электронной волной, приводящий к обсуждавшемуся выше максимуму поглощения звука, в окрестности которого вклад полей еще несущественен ^{78,91,97}. (Не столь существенный для продольных звуковых волн вклад полей является определяющим для слабозатухающих электронных и электромагнитных волн вблизи от особых направлений ⁹⁷.)

В случае произвольного критического направления \mathbf{k} , вынося скорость v^c и деформационный потенциал $\hat{\Lambda}^c$ в особой точке, получим для кинетических коэффициентов (6.14), (7.11) вблизи от особенности

$$\frac{\sigma_{x\beta}}{e^2} \rightarrow \frac{\omega^* v_\beta^c}{k} \langle R \rangle^c, \quad \frac{\sigma_{\alpha\beta}^\perp}{e^2} \rightarrow v_\alpha^c v_\beta^c \langle R \rangle^c 1^*, \quad \frac{b_{pq}}{i\omega k^2} \rightarrow \Lambda_{px}^c \Lambda_{qk}^c \langle R \rangle^c \quad (13.15)$$

$$\frac{\partial_{\beta q}^\perp}{e\omega k} \rightarrow v_\beta^c \Lambda_{qk}^c \langle R \rangle^c 1^*, \quad \frac{c_{pq}^\perp}{iek} \rightarrow v_\alpha^c \Lambda_{px}^c \langle R \rangle^c 1^*,$$

$$1^* \equiv 1 - \frac{1}{1 - i \langle 1 \rangle / \omega^* \langle R \rangle^c} = \frac{1}{1 + i\mathcal{R}}. \quad (13.16)$$

В осях 1, 2, где 1 лежит в плоскости \mathbf{k} , v^c , а 2 ей ортогонально, имеем ($v_2^c = 0$):

$$\hat{\sigma}^\perp \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\rho} \rightarrow \begin{pmatrix} (\sigma_1 + ik^2 c^2 / 4\pi\omega)^{-1} & 0 \\ 0 & -4\pi i\omega / k^2 c^2 \end{pmatrix}, \quad (13.17)$$

$$\sigma_1 \equiv e^2 (v_1^c)^2 \langle R \rangle^c 1^*.$$

Отсюда для $\hat{d} = \hat{d}^I + \hat{d}^{II} + \hat{d}^{IV}$, т. е. с учетом перенормировки деформационного взаимодействия как продольными, так и поперечными полями,

*) Для линии переноса, когда разложение $\mathbf{k}\mathbf{v}$ в окрестности точки НК одномерно. Если зависимость от второй координаты появляется в порядке n , то $\mathcal{R} \sim (s/v) (kl)^{(1/2)-(1/n)}$. В ⁹⁷ $n = 3$ и $\mathcal{R} \sim (s/v) (kl)^{1/6}$.

получаем

$$d_{pq} \rightarrow -\frac{i\omega}{\rho s^2} \Lambda_{p\kappa}^c \Lambda_{q\kappa}^c \langle R \rangle^c 1^* 1_{\perp}^*, \quad (13.18)$$

где

$$1_{\perp}^* \equiv 1 - \frac{1}{1 + i(k\delta_c)^2} \equiv \left(1 - \frac{i}{(k\delta_c)^2}\right)^{-1}. \quad (13.19)$$

Здесь

$$\delta_c = \frac{c}{\sqrt{4\pi\omega e^2 (v_1^c)^2 \langle R \rangle^c 1^*}} \quad (13.20)$$

играет роль характерного масштаба поперечного электромагнитного поля вблизи от особенности.

Как видно из (3.18), при $\langle R \rangle^c \rightarrow \infty$ $1^* \rightarrow 0$, что соответствует рассмотренной выше компенсации, связанной с продольными полями. При этом $\langle R \rangle^c 1^* \rightarrow -i \langle 1 \rangle / \omega^*$,

$$d_{pq} \rightarrow -\frac{1}{\rho s^2} \Lambda_{p\kappa}^c \Lambda_{q\kappa}^c \frac{\omega}{\omega^*} \frac{1}{1 - \frac{\omega}{\omega^*} \frac{1}{(k\delta_1)^2}}, \quad (13.21)$$

$$\delta_1^2 = \frac{c^2}{4\pi e^2 (v_1^c)^2 \langle 1 \rangle}, \quad (13.22)$$

где $\delta_1 \sim 10^{-5}$ см — предельное значение δ_c .

Вообще говоря, при $\langle R \rangle^c \rightarrow \infty$ компенсация обеспечивается продольными полями. Но возможна компенсация за счет поперечных полей, отвечающая условию

$$k\delta_c \rightarrow 0, \quad 1_{\perp}^* \rightarrow i(k\delta_c)^2 \rightarrow 0, \quad (13.23)$$

что может соответствовать промежуточной асимптотике

$$(k\delta_1)^2 \ll |\mathcal{R}| \ll 1 \ll \omega\tau. \quad (13.24)$$

(Условие $\omega\tau \gg 1$ связано с одноточечным характером особенности.) При этом

$$d_{pq} \rightarrow \frac{\Lambda_{p\kappa}^c \Lambda_{q\kappa}^c}{\rho s^2} \langle 1 \rangle (k\delta_1)^2. \quad (13.25)$$

Условия (13.24) требуют достаточно совершенных образцов с длиной пробега $l \gg \delta_0 v/s \sim 10^{-2}$ см.

До сих пор предполагалось, что точка-антипод ($-\mathbf{p}_c$) находится вне резонанса, а также, что нет других резонансных точек при данном \mathbf{k} («произвольное» критическое направление).

Рассмотрим теперь симметричные критические направления. Наличие элементов точечной симметрии у ФП приводит к тому, что точки нулевой кривизны на ФП образуют «звезду» — дискретный либо непрерывный (последнее — для фигур вращения) набор точек, связанных преобразованиями \hat{g} точечной группы ФП (кристалла) G :

$$\mathcal{K}(\mathbf{p}_c) = 0, \quad \mathcal{K}(\hat{g}\mathbf{p}_c) = 0 \quad (g\mathbf{p}_c \equiv \mathbf{p}_{q_c}), \quad (13.26)$$

благодаря чему для симметричных или близких к симметричным критических направлений необходимо одновременно учитывать вклад нескольких точек НК. А как показано в ⁹⁰, такие ситуации закономерны, во всяком случае условия $\mathbf{k}\mathbf{v}_c = 0$ могут соответствовать симметричным критическим направлениям \mathbf{k} . С точки зрения эксперимента симметричные направления заведомо предпочтительны, в частности, из-за возможности оперировать с чисто продольным или поперечным звуком.

Возможные группы $G_{\mathbf{k}}$ (оставляющие инвариантным вектор \mathbf{k}) приведены в табл. I, где следует заменить \mathbf{p} на \mathbf{k} , а x, y — на 1, 2 (см. 13.17).

Особые части кинетических коэффициентов содержат теперь суммы по эквивалентным точкам c' в (13.12), (13.15). Вынося $\langle R \rangle^c$ за знак суммы, видим, что $\sigma_{\kappa\alpha} \sim \sum_{c'} v_{\alpha}^{c'}$ обращается в нуль при осевой симметрии направления \mathbf{k} , в связи с чем тензоры $\sigma_{\alpha\beta}$, $\partial_{\beta l}$, $c_{l\alpha}$ не перенормируются в этих случаях (что ясно и из независимых соображений).

Для продольного звука получаем прежний результат (13.18), но вместо $\langle R \rangle^c$ теперь входит $\sum_{c'} \langle R \rangle^{c'} = N \langle R \rangle^c$, где N — число эквивалентных (при данном \mathbf{k}) точек НК:

$$d_{\kappa\kappa} = -\frac{i\omega}{\rho s^2} N \langle R \rangle^c (\Lambda_{\kappa\kappa}^c)^2 1^* \quad (13.27)$$

Для поперечного звука в осях μ, ν , диагонализующих $d_{\alpha\beta}$, имеем

$$d_{\mu\bar{\mu}} = -\frac{i\omega}{\rho s^2} \langle R \rangle^c \left[\sum_{c'} (\Lambda_{\mu\kappa}^{c'})^2 - \frac{(\sum_{c'} v_{\mu}^{c'} \Lambda_{\mu\kappa}^{c'})^2}{\sum_{c'} (v_{\mu}^{c'})^2 + i \frac{k^2 c^2}{4\pi\omega e^2} \langle R \rangle^c} \right] \quad (13.28)$$

Величины $(\Lambda_{\mu\kappa}^{c'})^2$, $v_{\mu}^{c'} \Lambda_{\mu\kappa}^{c'}$ и $(v_{\mu}^{c'})^2$ можно преобразовать, используя (9.1), к одной особой точке. При этом все они преобразуются одинаковым образом (как квадрат μ -компоненты вектора), благодаря чему

$$\sum_{c'} (\Lambda_{\mu\kappa}^{c'})^2 = (\Lambda_{\mu\kappa}^c)^2 N', \quad \sum_{c'} v_{\mu}^{c'} \Lambda_{\mu\kappa}^{c'} = v_{\mu}^c \Lambda_{\mu\kappa}^c N', \quad \sum_{c'} (v_{\mu}^{c'})^2 = (v_{\mu}^c)^2 N'. \quad (13.29)$$

Поэтому

$$d_{\mu\bar{\mu}} = -\frac{i\omega}{\rho s^2} N' \langle R \rangle^c (\Lambda_{\mu\kappa}^c)^2 1_{\perp}^*, \quad (13.30)$$

где в 1_{\perp}^* (см. (13.19)) и в δ_z^2 (13.20) следует заменить $\langle R \rangle^c 1^*$ на $\langle R \rangle^c N'$. Видно, что в продольном звуке перенормировка возможна лишь за счет продольных, а в поперечном — за счет поперечных полей.

Заметим, что для эффекта отклонения в сильном магнитном поле ($kr \ll 1$) вклад электрических полей, соответствующий формулам (13.15) — (13.25), получается заменой входящих в них величин на средние по периоду обращения (в соответствии с (10.5)): $\Lambda^c \rightarrow \bar{\Lambda}^c$, $v^c \rightarrow \bar{v}^c$, $\langle R \rangle^c \rightarrow \langle 1/\bar{\alpha} \rangle^c$. Отсюда в осях $1, 2 \perp \mathbf{k}$ таких, что $2 \perp \mathbf{k}, \mathbf{H}$ ($\bar{v}_2 = 0, \bar{v}_1 = \bar{v}_z \cos \psi, \bar{v}_x = \bar{v}_z \sin \psi$ в случае замкнутых сечений) получим для «одноточечной» особенности ($\omega\tau \gg 1$):

$$d_{pq} \rightarrow -\frac{i\omega}{\rho s^2} \bar{\Lambda}_{p\kappa}^c \bar{\Lambda}_{q\kappa}^c \left\langle \frac{1}{\bar{\alpha}} \right\rangle^c \bar{1} \cdot \bar{1}_{\perp}, \quad (13.31)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{1} &\equiv \frac{1}{1+i\mathcal{R}_H}, \quad \bar{1}_{\perp} \equiv 1 - \frac{1}{1+i(k\delta_c)^2}, \quad \bar{\alpha} \equiv i(\mathbf{k}\bar{\mathbf{v}} - \bar{\omega}^*), \\ i\mathcal{R}_H &\equiv \frac{1}{\langle 1 \rangle} \left\langle \frac{i\omega^*}{\bar{\alpha}} \right\rangle \sim \begin{cases} \ln \omega\tau - \text{опорная точка}^{84,85}, \\ \sqrt{\omega\tau} - \text{экстремальная точка} \quad \bar{v}_z = 0^{86}. \end{cases} \end{aligned} \quad (13.32)$$

Продольные поля могут приводить к компенсации особенности (ср. ⁷¹). Отметим, впрочем, что при наличии в \mathcal{R}_H численной малости $\xi \ll 1$, резонанс продольного звука с электронной волной (см. (11.7), (12.5)) наступает при таких $\omega\tau$ ($\sim \xi^{-3/2} \gg 1$ для $\bar{v}_z = 0$), для которых еще не существенны продольные поля. Роль поперечных полей при $\omega\tau \rightarrow \infty$, приводящих к компенсации для $(k\delta)^2 \ll 1$, обсуждается в ⁸⁶ для продольного звука в изотропном металле. Из (13.31) следует также существенная зависимость эффекта отклонения для поперечного звука от ориентации магнитного поля относительно элементов симметрии кристалла (см. табл. II).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные выше примеры, касающиеся в основном дисперсии скорости звука *) в условиях эффективного взаимодействия с электронами, иллюстрируют удобство и целесообразность использования уравнений упругости в металлах. Мы не касались других естественных применений этих уравнений для обсуждения электромагнитного возбуждения звука (первые работы ^{98,99}, обзор ¹⁰⁰), распространения электронных предвестников звуковых волн ¹⁰¹⁻¹⁰³, анализа возможностей электронно-инерционных опытов и измерения электрических полей, возбуждаемых звуком в металле ^{104,105}, вычисления полей, возникающих вблизи границ деформированного (например, полем тяжести) металла ¹⁰⁶, уравнений упругости в сверхпроводниках ¹⁰⁷⁻¹⁰⁹ и т. п.

Учет подмагничивания электронов проводимости d-электронами позволяет распространить данный подход на ферромагнитные металлы (современное состояние вопроса и ссылки см. в ¹¹⁵).

Уравнения (1.8) применимы и при магнитном пробое. Но кинетические коэффициенты при этом содержат взвешенные средние по участкам классических орбит с весами, зависящими от вероятностей пробоя ¹¹⁶. Вид вероятности зависит от типа пробоя — стохастического ^{116,117} или когерентного ¹¹⁸. В последнем случае существенна квантовая интерференция состояний на этих участках, требующая описания с помощью матрицы плотности. Пробой должен сказываться на обсуждавшихся выше магнитоакустических эффектах в сильном поле, в том числе на поперечном распространении звука, эффекте отклонения ¹¹⁹, поведении электронных модулей сдвига и т. п. Специально подчеркиваем, что обсуждаемые эффекты деформационного взаимодействия (в том числе и в ^{96,111}) полностью находятся в области применимости адиабатического приближения Борна — Оппенгеймера, что никак не противоречит получаемым в отдельных случаях большим электронным перенормировкам скорости звука в металлах **).

Действительно, энергия электрона в деформированном металле (1.1) $\varepsilon_0 + \delta\varepsilon$ определяется при фиксированных положениях ионов (8.5): $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p}, u_{ik}(\mathbf{r}, t))$. Средняя электронная энергия, вычисленная с неравномерной функцией распределения электронного газа, входит в уравнение движения ионов (уравнения упругости). Эта энергия в силу неравновесности электронной подсистемы зависит от «медленного» времени (от частоты упругих полей в фурье-представлении), от магнитного поля и т. п. Она отнюдь не мала по сравнению с чисто решеточным вкладом, как это обычно и бывает в главном порядке адиабатического приближения. (Например, «адиабатическая» электронная энергия компенсирует кулоновское отталкивание ионов в молекуле.) Поэтому и адиабатический вклад электронов проводимости в скорость звука металла отнюдь не должен быть мал. Он зависит от волнового вектора и частоты (дисперсия) вследствие неравновесности состояния электронного газа. Отсюда возникает необходимость самосогласованного описания упругих деформаций с учетом изменений, происходящих в электронном газе металла. Отклонения же от адиабатического приближения в деформационном взаимодействии представляют собой поправки порядка $\sqrt{m/M}$ и т. п., и их роль в исследуемых явлениях представляется незначительной. Таким образом, случаи эффективного взаимодействия электронов со звуком

*) Эти примеры, конечно, не могут рассматриваться как обзор по дисперсии и поглощению звука в металлах (см. ⁶⁻¹⁰); в частности, указания на экспериментальные работы носят главным образом иллюстративный характер.

**) Отметим также, что предпринимавшаяся в ²⁵ попытку упростить вывод уравнений теории упругости в металлах варьированием энергии в с-системе нельзя считать удачной, так как фактически авторы ²⁵ варьировали энергию в с-системе при фиксированной функции распределения в с-системе и фиксированном вектор-потенциале в л-системе, для чего, разумеется, нет никаких априорных оснований. Причина совпадения результата с известным выяснена во второй работе ²⁰.

вполне укладываются в рамки адиабатического приближения, которому соответствует введение деформационного потенциала и справедливость уравнений упругости в металлах (1.8), (2.2).

Во время работы над уравнениями упругости в металлах автор имел возможность пользоваться добрыми советами своего дорогого учителя И. М. Лифшица. Ценными для автора были обсуждения результатов с М. А. Леонтовичем, по инициативе которого был начат настоящий обзор. При поддержке М. И. Каганова он был закончен. Автор благодарен также Н. А. Степановой за помощь, К. Б. Власову, В. Л. Гуревичу, В. П. Силину, В. С. Эдельману и многим харьковчанам — коллегам и друзьям — за полезные замечания.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР, Харьков

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Собрание трудов.— М.: Наука, 1969.— Т. 1, с. 227.
2. Ахиезер А. И.— ЖЭТФ, 1938, т. 8, с. 1330.
3. Pippard A. V.— Phil. Mag., 1957, v. 2, p. 1147.
4. Ахиезер А. И., Каганов М. И., Любарский Г. Я.— ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 837.
5. Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И. Электронная теория металлов.— М.: Наука, 1971.
6. Pippard A. V.— Rept. Progr. Phys., 1960, v. 23, p. 176.
7. Mertsching J.— Phys. Stat. Sol., 1966, v. 14, p. 3; 1968, v. 26, p. 9; 1970, v. 37, p. 465.
8. Физическая акустика/Под ред. У. Мэзона. Т. IV—VII.— М.: Мир, 1969—1972.
9. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик М. Ультразвуковые методы в физике твердого тела.— М.: Мир, 1972.
10. Таннер Дж., Рэмpton В. Гиперзвук в физике твердого тела.— М.: Мир, 1975.
11. Платцман Ф., Вольф П. Волны и взаимодействия в плазме твердого тела.— М.: Мир, 1975.
12. Абрикосов А. А. Введение в теорию нормальных металлов.— М.: Наука, 1972.
13. Каганов М. И., Лифшиц И. М.— УФН, 1979, т. 129, с. 487.
14. Гуревич В. Л.— ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 71, 1680.
15. Vardeen J., Shockly W.— Phys. Rev., 1950, v. 80, p. 72.
16. Steinberg M. S.— Ibid., 1958, v. 111, p. 425.
17. Alpher R. A., Rubin R. J.— J. Ac. Soc. Am., 1954, v. 26, p. 452.
18. Конторович В. М., Глуцюз А. М.— ЖЭТФ, 1961, т. 41, с. 1195.
Конторович В. М., Тищенко Н. А.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1963, т. 6, с. 24.
19. Силин В. П.— ЖЭТФ, 1960, т. 38, с. 977.
Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред.— М.: Госатомиздат, 1961.
20. Конторович В. М.— ЖЭТФ, 1963, т. 45, с. 1638; 1970, т. 59, с. 2116.
21. Власов К. Б., Филиппов Б. И.— ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 223.
22. Holstein T.— Phys. Rev., 1959, v. 113, p. 479.
23. Rodriguez S.— Ibid., 1963, v. 130, p. 1778.
24. Власов К. Б., Филиппов Б. И.— ЖЭТФ, 1963, т. 44, с. 922.
25. Скобов В. Г., Канер Э. А.— ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 273.
26. Гринберг А. А.— ФТТ, 1964, т. 6, с. 911.
27. Stolz H., Mertsching J.— Phys. Stat. Sol., 1965, v. 8, p. 847.
28. Пекар С. И., Цеквава Б. Е.— ЖЭТФ, 1969, т. 57, с. 2035.
29. Фикс В. Б. Ионная проводимость в металлах и полупроводниках (электроперенос).— М.: Наука, 1969.
30. Фикс В. Б.— ЖЭТФ, 1978, т. 75, с. 137.
31. Ландау Л. Д.— ЖЭТФ, 1956, т. 30, с. 1058.
32. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Ч. 2.— М.: Наука, 1979.
33. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости.— М.: Наука, 1965.
34. Конторович В. М. Автореферат докторской диссертации.— Харьков: ФТИНТ АН УССР, 1972.
35. Зырянов Н. П., Окулов В. И., Силин В. П.— Тр. ИФМ УНЦ АН СССР (Свердловск), 1975, т. 31, с. 38.— (Сб. «Проблемы физики твердого тела».)
36. Силин В. П.— ФММ, 1970, т. 29, с. 680.

37. Зимбовская Н. А., Окулов В. И. Ферми-жидкостная квантовая теория распространения ультразвука в металлах.— М.: ВИНТИ № 2750-77,— Деп. от 11 июля 1977.
38. Гальперин Ю. М., Гуревич В. Л., Козуб В. И.— УФН, 1979, т. 128, с. 107.
39. Кравченко В. Я.— ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 1676.
40. Косевич А. М. Физическая механика реальных кристаллов.— Киев: Наукова думка, 1981.
Дислокации в теории упругости.— Киев: Наукова думка, 1978.
41. Гинзбург В. Л.— В кн. Памяти А. А. Андропова.— М.: Изд-во АН СССР, 1955.— С. 622.
42. Гуревич В. Л., Ланг И. Г., Павлов С. Т.— ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 1676.
43. Ланг И. Г., Павлов С. Т.— ФТТ, 1970, т. 12, с. 2412.
44. Гришин А. М., Скобов В. Г., Фишер Л. М., Чернов А. С.— Письма ЖЭТФ, 1982, т. 35, с. 370.
45. Мигдал А. Б.— ЖЭТФ, 1958, т. 34, с. 1438.
46. Бровман Е. Г., Каган Ю.— ЖЭТФ, 1967, т. 52, с. 557.
47. Проблема высокотемпературной сверхпроводимости/Под ред. В. Л. Гинзбурга, Д. А. Киржница.— М.: Наука, 1977.
48. Горобченко В. Д., Максимов Е. Г.— УФН, 1980, т. 130, с. 65.
49. Харрисон Ч. Псевдопотенциалы в теории металлов.— М.: Мир, 1968.
Хейне В., Козн М., Уэйр Д. Теория псевдопотенциала.— М.: Мир, 1973.
50. Slacknell A. P. The Fermi Surfaces of Metals.— Lnd., 1971.
51. Walter K.— Phys. Rev. Ser. B, 1968, v. 174, p. 782.
52. Goto N., Sakai T., Mase S.— J. Phys. Soc. Japan, 1975, v. 38, p. 1653.
53. Shigeaki H., Yoshimase K., Shuzo T.— Ibid., 1981, v. 50, p. 476.
54. Андреев А. Ф.— УФН, 1971, т. 105, с. 113.
55. Песчанский В. Г. Роль поверхностного рассеяния электронов в кинетических явлениях: Препринт УНЦ ИФМ АН СССР 77/3.— Свердловск, 1977. Процессы переброса при поверхностном рассеянии электронов проводимости. Препринт ДонФТИ-81-28.— Донецк, 1981.
56. Окулов В. И., Устинов В. В.— ФНТ, 1979, т. 5, с. 213.
57. Голдстейн Г. Классическая механика.— М.: Гостехиздат, 1957.
58. Синицын Ю. А., Конторович В. М., Цукерник В. М.— ФТТ, 1973, т. 15, с. 3573.
59. Гуревич В. Л. Кинетика фононных систем.— М.: Наука, 1980.
60. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1956.
61. Гуржи Р. Н., Конторович В. М.— ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 1105.
62. Гришин А. М., Канер Э. А.— ЖЭТФ, 1975, т. 63, с. 2304.
63. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика.— М.: Наука, 1976.
64. Власов К. Б., Филиппов Б. И.— ФММ, 1964, т. 17, с. 152; т. 18, с. 333; 1965, т. 20, с. 173.
Власов К. Б.— ФММ, 1966, т. 21, с. 176.
65. Коткин Г. Л.— ЖЭТФ, 1961, т. 41, с. 281.
66. Конторович В. М.— ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 1181.
67. Канер Э. А., Скобов В. Г.— Adv. Phys., 1968, v. 17, p. 605.
68. Демиховский В. Я., Протогенов А. П.— УФН, 1976, т. 118, с. 101.
69. Окулов В. И., Силин В. П.— Сб. Кр. сообщ. физ. ФИАН СССР, 1981, № 2, с. 43; Препринт ФИАН СССР № 92.— Москва, 1982.
70. Titeika T.— Ann. d. Phys., 1935, Bd. 22, S. 128.
71. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.— М.: Наука, 1963.
72. Пикус Г. Е., Бир Г. Л.— ФТТ, 1959, т. 1, с. 1642; 1960, т. 2, с. 2287; ЖЭТФ, 1961, т. 41, с. 1258.
Бир Г. Л., Пикус Г. Е. Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках.— М.: Наука, 1972.
73. Смирнов А. А.— ЖЭТФ, 1947, т. 17, с. 732.
74. Mac. Farlane R. E., Raupе J. A.— Phys. Rev., 1967, v. 162, p. 532.
75. Bohm D., Staver T.— Ibid., 1951, v. 54, p. 836.
76. Силин В. П.— ЖЭТФ, 1952, т. 23, с. 649.
76. Давыдов В. Н., Каганов М. И.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 1491.
Каганов М. И., Семененко А. И.— ЖЭТФ, 1966, т. 50, с. 630.
77. Афанасьев А. М., Каган Ю. М.— ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 1456.
78. Конторович В. М., Сапогова Н. А.— Письма ЖЭТФ, 1973, т. 18, с. 381.
79. Аванесян Г. Т., Каганов М. И., Лисовская Т. Ю.— Ibid., 1977, т. 25, с. 381; ЖЭТФ, 1978, т. 75, с. 1786.
80. Конторович В. М., Степанова Н. А.— ФТТ, 1978, т. 20, с. 245; ЖЭТФ, 1979, т. 76, с. 642.
81. Кулик И. О.— ЖЭТФ, 1964, т. 47, с. 1072.
82. Безуглый П. А., Бурма Н. Г.— Письма ЖЭТФ, 1969, т. 10, с. 523.

83. Репекег Д. Н.— Phys. Rev., 1959, v. 115, p. 303.
84. Срестор Н. N.— Phys. Lett., 1963, v. 7, p. 308; Phys. Rev., 1960, v. 120, p. 1261.
85. Королюк А. П., Оболенский М. А., Фалько В. Л.— ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 377; 1971, т. 60, с. 269.
86. Конторович В. М., Сапогова Н. А.— ФТТ, 1973, т. 15, с. 689.
87. Филь В. Д., Денисенко В. И., Безуглый П. А.— В кн. XXI Все-союзное совещание по физике низких температур. Тезисы докладов.— Харьков, 1980.— Ч. III, с. 98.
88. Perz J. M., Dobbs E. R.— Proc. Roy. Soc., 1967, v. 297, p. 408.
89. Olsen T.— J. Phys. and Chem. Sol., 1963, v. 24, p. 649.
Шепелев А. Г., Филимонов Г. Д.— ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 746.
90. Суслев И. М.— ФТТ, 1981, т. 23, с. 1652.
91. Степанова Н. А. Автореферат кандидатской диссертации.— Харьков: ФТИНТ АН УССР, 1980.
92. Phippard A. B.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1960, v. 257, p. 165.
93. Канер Э. А.— ЖЭТФ, 1960, т. 38, с. 212, т. 39, с. 1071.
94. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1954.
95. Бурма Н. К., Безуглый П. А., Кабанов А. Е.— Письма ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 400.
96. Канер Э. А., Чеботарев Л. В., Еременко А. В.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 1058.
97. Каганов М. И., Конторович В. М., Лисовская Т. Ю., Степанова Н. А. Препринт ДонФТИ-82-54.— Донецк, 1982; ЖЭТФ, 1983, т. 85, с. 1675.
98. Каганов М. И., Фикс В. Б., Шиккина Н. И.— ФММ, 1968, т. 26, с. 11.
99. Кравченко В. Я.— ЖЭТФ, 1968, т. 54, с. 1494.
100. Васильев А. Н., Гайдуков Ю. П.— УФН, 1984, т. 142, с. 431.
101. Филь В. Д., Бурма Н. Г., Безуглый П. А.— Письма ЖЭТФ, 1976, т. 23, с. 428.
102. Шепелев А. Г., Леденев О. П., Филимонов Г. Д.— ФНТ, 1976, т. 2, с. 1570; Письма ЖЭТФ, 1975, т. 22, с. 148.
103. Богачек Э. Н., Рожавский А. С., Шехтер Р. И.— ФНТ, 1978, т. 4, с. 603.
104. Гинзбург В. Л., Коган Ш. М.— ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 1177.
105. Леонтович М. А., Хаит В. Д.— Письма ЖЭТФ, 1971, т. 13, с. 579.
106. Коган Ш. М.— УФН, 1971, т. 105, с. 157.
107. Голуб А. А.— ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 1007.
108. Безуглый Е. В., Денисенко В. И., Степаненко А. М., Филь В. Д.— ФНТ, 1983, т. 9, с. 93.
Безуглый Е. В.— ФНТ, 1983, т. 9, с. 15.
109. Кулик И. О.— ЖЭТФ, 1964, т. 47, с. 2159.
110. Степанова Н. А., Копелиович А. М.— ФНТ, 1980, т. 6, с. 391.
111. Чеботарев Л. В.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, с. 1432.
112. Wilson J. A., Di Salvo F. J., Mahajan S.— Adv. Phys., 1975, v. 24, p. 117;
Булаевский Л. Н.— УФН, 1976, т. 116, с. 449.
113. Mattocks R. G., Young R. G.— J. Phys. Ser. F, 1977, v. 7, p. 1219.
114. Condon J. H.— Bull. Am. Phys. Soc., 1964, v. 9, p. 239.
Reed W. A.— Phys. Rev., 1969, v. 188, p. 1184.
115. Зверев В. М., Силин В. П.— ЖЭТФ, 1981, т. 81, с. 1925.
116. Stark R. W., Falicov L. M. Magnetic breakdown in metals in Progr. Low Temp. Phys., 1967, v. 5, p. 235.
117. Песчанский В. Г.— ЖЭТФ, 1976, т. 52, с. 1313.
118. Слуцкий А. А.— ЖЭТФ, 1970, т. 58, с. 1098; ЖЭТФ 1973, т. 65, с. 2114.
119. Макаров В. И., Слуцкий А. А., Сухина Г. В., Саньков А. А.— Письма ЖЭТФ, 1979, т. 30, с. 255.
120. Каганов М. И., Плявеник А. Г.— Письма ЖЭТФ, 1983, т. 38, с. 94.

