

Линейные и нелинейные волны (элементарное введение в теорию гамильтоновых переменных с приложениями к физике и астрофизике)

В. М. Конторович

*Радиоастрономический институт НАН Украины,
Украина, 61002, Харьков, ул. Краснознаменная, 4
E-mail: vkont@ira.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 16 июля 2000 г., после переработки 28 августа 2001 г.

На примере волн в объеме и на поверхности жидкости вводятся гамильтоновы переменные для сплошных сред, широко используемые в настоящее время в физике плазмы, гидродинамике и теории поля. Рассмотрены регулярные способы введения таких переменных, в том числе в средах с разрывами, с помощью вариационного принципа и канонических преобразований. Метод обратной задачи рассеяния приведен как нетривиальный пример канонического преобразования к переменным “действие-угол”. Приведены примеры линейных и нелинейных неустойчивостей. Настоящая публикация представляет собой первую часть обзора.

Вторая часть обзора будет посвящена кинетическим уравнениям, используемым при описании слабой турбулентности, в том числе точным методам получения неравновесных потоковых распределений. Описаны применения кинетического уравнения Смолуховского к рассмотрению процессов слияния галактик и формирования их спектра масс. Рассмотрены также нелокальные распределения и частично когерентные системы.

На прикладі хвиль в об'ємі та на поверхні рідини вводяться гамільтонові змінні для суцільних середовищ, широко використовувані в нинішній час у фізиці плазми, гідродинаміці та теорії поля. Розглянуто регулярні засоби введення таких змінних, у тому числі в середовищах з розривами, за допомогою варіаційного принципу та канонічних перетворень. Засіб зворотного розсіяння наведений як нетривіальний зразок канонічного перетворення до змінних “дія-кут”. Наведено приклади лінійних та нелінійних нестійкостей. Ця публікація є першою частиною огляду.

Друга частина огляду буде присвячена кінетичним рівнянням, що використовуються для опису слабкої турбулентності, в тому числі точним засобам отримання нерівноважних потокових розподілів. Описано застосування кінетичного рівняння Смолуховського до розгляду процесів злиття галактик і формування їх спектру мас. Розглянуто також нелокальні розподіли та частково когерентні системи.

Содержание

Часть I. Динамический подход

- 1. Звуковые волны (случай отсутствия дисперсии)*
- 2. Волны на поверхности тяжелой жидкости – пример дисперсии*

3. Волны на поверхности раздела и линейные неустойчивости

- а) Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца*
- б) Ветровая неустойчивость*

4. Гамильтоновы уравнения для движений поверхности жидкости

5. Комплексные нормальные координаты
6. Вариационный принцип со связями как регулярный способ введения гамильтоновых переменных
7. Нелинейные процессы взаимодействия и самовоздействия волн
8. Уравнение КдВ и солитоны (МОЗР как каноническое преобразование)

Приложение 1. Гамильтоново описание непотенциального движения при наличии свободной поверхности в обычной и магнитной гидродинамике

Приложение 2. Матричные элементы гамильтониана взаимодействия для потенциального движения жидкости со свободной границей

Часть II. Стохастический подход

9. Кинетические уравнения
10. Слабая турбулентность и распределения с потоками по спектру
11. Уравнение Смолуховского и слияния галактик
12. Нелокальные распределения и спектр масс
13. Взаимодействие когерентного и стохастического полей

Приложение 3. Преобразования симметрии кинетических уравнений

Литература

Введение

В последние десятилетия получило развитие использование гамильтонова формализма [1-9] в применении к распределенным системам с бесконечным числом степеней свободы [2]. Замечательные приложения он получил при решении нелинейных, в первую очередь, волновых задач, в том числе при описании и интерпретации новых точных методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Наиболее известным из них стал знаменитый метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) [3,10].

Настоящая статья, с одной стороны, представляет собой элементарное введение в предмет, с другой – касается тем, которые недостаточно отражены в обзорной литературе (см., например, [4]). Речь идет, в частности, об описании ветровой неустойчивости [5], способах введения гамильтоновых переменных как в объеме, так и на свободных границах (разрывах) [6] и т. п.

Первая часть статьи посвящена волнам. Примеры взяты из гидродинамики волн на поверхности жидкости ввиду их важности и наглядности, а также из физики плазмы, электродинамики, астрофизики [2-7].

Вторая часть, которая будет опубликована в одном из ближайших номеров журнала, посвящена кинетическим уравнениям и турбулентным спектрам [8]. Широко используются прозрачные квантовые аналогии. В рамках гамильтонова формализма рассматривается

описание взаимодействия стохастической и когерентной подсистем. Особая роль отводится астрофизическим приложениям и примерам [9].

1. Звуковые волны (случай отсутствия дисперсии)

Рассмотрим волны сжатия-разрежения, распространяющиеся в однородной среде – звук. Исходные уравнения записываются для поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, давления $p(\mathbf{r}, t)$ и плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ в идеальной (недиссипативной) жидкости или газе. Уравнение Эйлера

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p, \quad (1.1)$$

представляющее собой уравнение движения (закон Ньютона) жидкой “частицы”, записано с учетом сил давления (закон Паскаля). Слева стоит (субстанциональная) производная, относящаяся к веществу (так что $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, а $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$). Тожество соответствует дифференцированию сложной функции $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t)$, т. е. переходу к рассмотрению поля скорости (и других величин) в данной точке \mathbf{r} в момент t .

Для плотности имеем уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1.2)$$

а давление, согласно уравнению состояния вещества, есть функция двух термодинамических переменных, в качестве которых удобно выбрать ρ и энтропию s . Ограничимся простейшим изэнтропическим ($s = \text{const}$) движением. Тогда

$$p = p(\rho). \quad (1.3)$$

Линеаризуя систему (1.1) – (1.3) вблизи состояния покоя (равновесия) $\mathbf{v}_0 = 0$, ρ_0 , $p_0 = p(\rho_0)$, т. е. полагая $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$,

$$p = p_0 + p', \quad p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \rho', \quad p' \ll p_0, \quad \rho' \ll \rho_0,$$

получаем

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \nabla \rho', \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \text{div } \mathbf{v}', \quad (1.4)$$

откуда для штрихованных величин (возмущений) следуют волновые уравнения, например,

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho' = 0, \quad c^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0. \quad (1.5)$$

При этом видно, что движение потенциально:

$$\mathbf{v}' = \nabla \varphi \quad (\text{rot } \mathbf{v}' = 0). \quad (1.6)$$

Не останавливаясь на хорошо известных свойствах волнового уравнения, рассмотрим частное решение в виде плоской монохроматической волны

$$\rho' \propto p' \propto \mathbf{v}' \propto e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (1.7)$$

Учитывая, что для решений такого вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \rightarrow i\mathbf{k},$$

получаем $(\omega^2 - c^2 k^2)\rho' = 0$,

и условием разрешимости этого уравнения ($\rho' \neq 0$) является такая связь между ω и \mathbf{k}

(закон дисперсии¹), при которой множитель при ρ' обращается в нуль:

$$\omega^2 - c^2 k^2 = 0, \quad k = |\mathbf{k}|. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) имеет две ветви решения: волна бегущая “налево” или “направо”. Введем скорость распространения фазы в (1.7), выбрав в качестве направления распространения ось x :

$$\rho' \approx \exp \left[ik \left(x - \frac{\omega}{k} t \right) \right], \quad v_{\text{фаз}} \equiv \frac{\omega}{k} = \pm c, \quad (1.9)$$

или в векторной форме

$$\mathbf{v}_{\text{фаз}} \equiv \frac{\omega}{k} \mathbf{k} = \pm c \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}/k. \quad (1.9')$$

Мы видим (рис. 1.1), что фазовая скорость звука не зависит от волнового числа k (от длины волны $\lambda = 2\pi/k$), т. е. возмущения любых длин волн, на которые можно разложить звуковой сигнал, будут распространяться совместно. В этом случае говорят о “линейном законе дисперсии” или об “отсутствии дисперсии”.

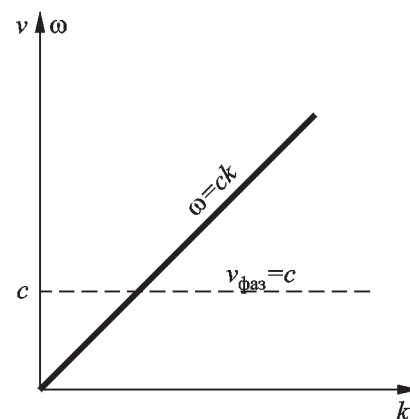


Рис. 1.1. Закон дисперсии и скорость звуковых волн

¹Закон дисперсии иногда удобно получать, используя (1.7) непосредственно в исходных линеаризованных уравнениях.

(Мы опустили решение $\omega = 0$, отвечающее вихревым возмущениям $\text{rot } \mathbf{v}' \neq 0$ (“вихревая волна”). Это видно, в частности, из того, что следствием (1.4) является $\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v}' = 0$ (при $\rho_0 = \text{const}$). При неизэнтропическом движении возникает еще одно решение $\omega = 0$, соответствующий возмущению энтропии $s' \neq 0$ (“энтропийная волна”). Оба эти возмущения покоятся относительно неподвижной жидкости.

Рассмотрим теперь в качестве состояния равновесия, вблизи которого происходят колебания, распространяющиеся в виде волн, однородное течение с $\mathbf{v}_0 = \text{const} \neq 0$. При линеаризации считаем, что $|\mathbf{v}'| \ll |\mathbf{v}_0|$. Удобно сразу перейти к плоским монохроматическим волнам (1.7). Легко видеть, что в уравнениях единственное отличие от предыдущего случая состоит в замене

$$\omega \rightarrow \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0. \quad (1.10)$$

Это не что иное, как проявление эффекта Допплера. Таким образом, достаточно, не повторяя вычислений, в (1.8) произвести замену (1.10), т. е. перейти в движущуюся со скоростью потока систему координат, где жидкость как целое покоится и где применимо предыдущее решение (принцип Галилея).

Итак, условие разрешимости принимает вид

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)^2 = k^2 c^2, \quad (1.11)$$

откуда следуют два решения:

$$\omega(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\mathbf{v}_0 \pm kc. \quad (1.12)$$

Для фазовой скорости имеем

$$\mathbf{v}_{\text{фаз}} = (\mathbf{v}_0 \mathbf{k}) \mathbf{k} \pm c \mathbf{k}. \quad (1.13)$$

Рассмотрим теперь скорость группы волн с близкими значениями \mathbf{k} . Максимум огибающей такого волнового пакета, как известно,

движется со скоростью² $\mathbf{v}_{\text{гр}} \equiv \partial\omega/\partial\mathbf{k}$. Это легко пояснить на простом примере сложения двух волн одинаковой амплитуды, для которого

$$\rho' \approx 2 \cos(kx - \omega t) \cos \left[\frac{\Delta k}{2} \left(x - \frac{\partial\omega}{\partial k} t \right) \right],$$

$$\Delta k = k_2 - k_1 \ll k \equiv \frac{k_1 + k_2}{2},$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega \equiv \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Из (1.12) следует

$$\mathbf{v}_{\text{гр}} = \mathbf{v}_0 \pm c \mathbf{k}, \quad (1.13')$$

откуда видно, что волна сносится движущейся средой. Здесь уже $\mathbf{v}_{\text{фаз}} \neq \mathbf{v}_{\text{гр}}$. Нетрудно убедиться в том, что вихревые (и энтропийные) возмущения переносятся потоком и им соответствует закон дисперсии $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0 = 0$.

Заметим, что выражение для групповой скорости волн соответствует уравнению Гамильтона для частицы $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ (ε – энергия, \mathbf{p} – импульс). Второму уравнению Гамильтона $\dot{\mathbf{p}} = -\partial\varepsilon/\partial\mathbf{r}$ соответствует уравнение для лучей в слабо неоднородной (нестационарной) среде $\dot{\mathbf{k}} = -\partial\omega/\partial\mathbf{r}$. В этом случае (ср. с (1.7)) возмущение пропорционально $e^{i\Psi(r,t)}$, причем

$$\omega(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad \mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{r}},$$

а закону дисперсии (1.8) соответствует уравнение эйконала³ для фазы Ψ :

²Для волнового пакета, описываемого интегралом Фурье, это утверждение возникает в результате интегрирования вблизи точки стационарной фазы.

³Аналогичным уравнением для частицы с законом дисперсии $\varepsilon = p^2/2m$ является уравнение Гамильтона-Якоби (см. [1]), где роль фазы играет действие.

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 - c^2(r,t)(\nabla \Psi)^2 = 0.$$

“Тяжелый звук” и гравитационная неустойчивость

Рассмотрим теперь возмущения плотности в самогравитирующей среде. В правой части уравнения Эйлера (1.1) мы должны учесть силу тяжести

$$\mathbf{f}_g = -\rho \nabla \Phi,$$

где Φ – гравитационный потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho. \quad (1.14)$$

Здесь G – постоянная тяготения из закона Ньютона. И сила тяжести, и уравнение для Φ вполне аналогичны соответствующим выражениям в электрическом поле⁴ и отличаются знаками в правых частях. Это отличие в знаке приводит к далеко идущим последствиям, которые проявляются, в частности, в возникновении гравитационной неустойчивости (Джинса). Она, в конечном счете, несет ответственность за слияния галактик, которые мы рассмотрим во второй части обзора.

Совершаем, как и выше, переход к возмущенным величинам⁵

$$\Delta \Phi' = 4\pi G \rho' \quad (1.14')$$

⁴ $\mathbf{f}_e = \rho_e \mathbf{E}$, $\mathbf{E} = -\nabla \Phi_e$, $\text{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho_e$ (\mathbf{E} – напряженность электрического поля, Φ_e – электрический потенциал, ρ_e – плотность заряда).

⁵ Процедура отбрасывания (бесконечного!) невозмущенного фона Φ_0 , которую приходится совершать при переходе от (1.14) к (1.14'), по существу означает некорректность вывода. Результат, однако, согласуется с рассмотрением устойчивости ограниченной тяготеющей массы (сферы). В космологических приложениях непротиворечивое рассмотрение проводится в рамках общей (релятивистской) теории относительности для расширяющейся Вселенной, где неустойчивость оказывается, впрочем, не экспоненциальной, а степенной [18a]. Замена же “бесконечностей” нулями (перенормировка) до сих пор является атрибутом ряда квантовых полевых теорий (например, квантовой электродинамики).

и в фурье-компонентах находим

$$\Phi' = -4\pi G \rho' / k^2. \quad (1.15)$$

Подставляя Φ' в \mathbf{f}_g , получаем

$$\mathbf{f}_g = 4\pi G i \mathbf{k} \rho' / k^2, \quad (1.16)$$

а линейризованное уравнение Эйлера принимает вид:

$$\omega \rho_0 \mathbf{v}' = \mathbf{k} (c^2 - 4\pi G \rho_0 / k^2) \rho'. \quad (1.17)$$

Учет самогравитации сводится, таким образом, к замене

$$c^2 \rightarrow c^2 - 4\pi G \rho_0 / k^2. \quad (1.17')$$

Осуществляя ее в (1.8), получаем закон дисперсии для “тяжелого” звука:

$$\omega^2 = k^2 c^2 - 4\pi G \rho_0. \quad (1.18)$$

Последнее слагаемое в (1.18) удобно записать в виде квадрата частоты Джинса:

$$\omega_J^2 \equiv 4\pi G \rho_0. \quad (1.19)$$

Она является аналогом плазменной частоты $\omega_p^2 = 4\pi n_0 e^2 / m$ и получается из нее заменой $e^2 \rightarrow Gm^2$, позволяющей перейти от закона Кулона к закону Ньютона. Знак, о котором мы говорили выше, фигурирует в (1.18) и не включен в определение ω_J . Из (1.18) видно, что, если $k^2 c^2 < \omega_J^2$, квадрат частоты становится отрицательным и возникает неустойчивость. Она реализуется на масштабах, больших длины волны Джинса

$$\lambda > \lambda_J = 2\pi / k_J \equiv 2\pi c / \omega_J \quad (1.20)$$

и, соответственно, для масс, превышающих массу Джинса,

$$M > M_J \equiv \frac{4\pi}{3} \lambda_J^3 \rho_0. \quad (1.20')$$

При сжатии, сопровождающем неустойчивость Джинса, возможен коллапс, если M_J убывает с ростом плотности. Для уравнения состояния идеального газа $p \propto \rho T$ при адиабатическом процессе $p \propto \rho^\gamma$ такому поведению M_J соответствует $\gamma < 4/3$:

$$M_J \propto (T^3/\rho)^{1/2} \propto \rho^{3(\gamma-4/3)/2}, \quad (1.21)$$

где $\gamma = c_p/c_v$ – отношение теплоемкостей или, в более общем случае, показатель политропы. Как видно из (1.21), при $\gamma > 4/3$ величина M_J возрастает в процессе сжатия и неустойчивость стабилизируется. При этом однородная среда распадается на объекты масштаба длины Джинса. Если же $\gamma < 4/3$ – сжатие развивается катастрофически (коллапс⁶). Мы видим, что учет гравитации привносит в задачу о звуке определенные пространственные и временные масштабы, что приводит к возникновению дисперсии волн. (Аналогично в задаче об электромагнитных волнах к дисперсии приводят плазменные масштабы. Особенно велики эти эффекты для продольных волн, которые в длинноволновом пределе вырождаются в колебания электронов относительно ионов с формально бесконечной фазовой скоростью).

⁶Для звезды это может означать взрыв с возникновением сверхновой и компактного ядра, в котором сжатие либо останавливается квантовыми нетепловыми процессами (белые карлики, нейтронные звезды), либо происходит образование “черной дыры”, если масса остатка превосходит предельную массу Ландау-Чандрасекара [18с]. В последнее время коллапс в черную дыру связывают с возможным возникновением “гиперновой”, сопровождаемым мощнейшими космологическими вспышками [19с].

2. Волны на поверхности тяжелой жидкости – пример дисперсии

Обратимся теперь к примеру, который будет играть важную роль во многих разделах – к волнам на поверхности жидкости. Неоспоримое преимущество этого примера не только в богатстве качественно различных предельных случаев и важности приложений, но и в наглядности. Несмотря на очевидную возможность наблюдать как различные совокупности волн, так и развитое волнение – аналог турбулентности, природа многих явлений прояснилась сравнительно недавно, а во многом, что касается нелинейных волн, остается загадочной до сих пор.

Рассмотрим вначале волны на глубокой воде (на поверхности моря, например). В уравнение (1.1) введем потенциальную силу тяжести $-\rho \nabla g z$. Ось z направим вертикально вверх, а плоскость $z=0$ пусть совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости, занимающей полупространство $z < 0$ (рис. 2.1).

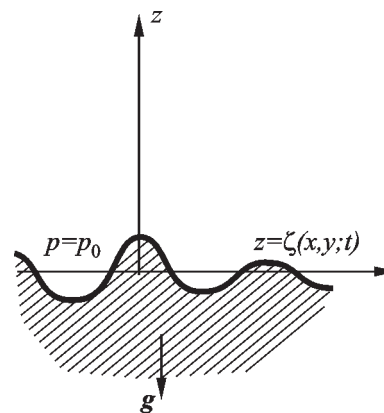


Рис. 2.1. Колеблующаяся поверхность несжимаемой жидкости в поле тяжести, занимающая полупространство $z < \zeta(x, y, t)$; g – ускорение свободного падения

Среду будем считать несжимаемой ($\rho = \text{const}$), что формально означает $c^2 \rightarrow \infty$, при этом уравнение непрерывности вырождается в $\text{div } \mathbf{v} = 0$ или для интересующего нас потенциального движения (1.6) – в уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \quad (2.1)$$

Из линеаризованного уравнения движения жидкости

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho g z + p \right) = 0 \quad (2.2)$$

получаем интеграл (Коши-Лагранжа), откуда, включив константу интегрирования в потенциал φ , для давления на возмущенной границе раздела

$$z = \zeta(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} = (x, y) \quad (2.3)$$

имеем $p = p_0 + p'$, где

$$p' \Big|_{z=\zeta \rightarrow 0} = -\rho \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta \rightarrow 0} + g\zeta \right). \quad (2.4)$$

В полупространстве $z > \zeta$ (в “атмосфере” или “воздухе”) достаточно считать давление неизменным (равным “атмосферному” давлению p_0). Условие равенства давлений при $z = \zeta \rightarrow 0$ приводит к соотношению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} + g\zeta = 0. \quad (2.5)$$

(Поскольку $\partial\varphi/\partial t$ само по себе мало в меру малости возмущений границы, производную $\partial\varphi/\partial t$ берем при $z = 0$). Второе соотношение, связывающее потенциал скорости и возвышение границы, получим, используя определение вертикальной компоненты скорости

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\zeta \equiv v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta}, \quad (2.6)$$

или в линейном приближении:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (2.6')$$

Уравнения (2.5) и (2.6') еще не составляют полную систему, так как в кинематическое условие (2.6') входит производная $\partial\varphi/\partial z$, определяемая поведением потенциала в объеме жидкости. Поэтому обращаемся к уравнению (2.1) при $z < 0$, решение которого найдем, предполагая, что по поверхности бежит плоская волна $\zeta \propto \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$.

Потенциал ищем в виде $\varphi(\mathbf{r}, z, t) = \varphi(z, t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, и из (2.1) для $\varphi(z, t)$ находим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - k^2\varphi = 0, \quad z < 0. \quad (2.7)$$

Решение имеет вид

$$\varphi = Ae^{kz} + Be^{-kz}, \quad (2.7')$$

причем в силу граничного условия $\varphi \rightarrow 0$, $z \rightarrow -\infty$ коэффициент $B = 0$.

Итак, волна носит поверхностный характер, затухая в глубину жидкости на масштабах длины волны, $\varphi = \varphi(0, t)e^{kz}$, а производная соответственно равна

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = k\varphi. \quad (2.8)$$

Окончательно система уравнений для φ и ζ принимает вид:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = k\varphi(0, t), \quad \frac{\partial\varphi(0, t)}{\partial t} = -g\zeta. \quad (2.9)$$

Отсюда немедленно следует закон дисперсии (рис. 2.2)

$$\omega^2 = gk, \quad (2.10)$$

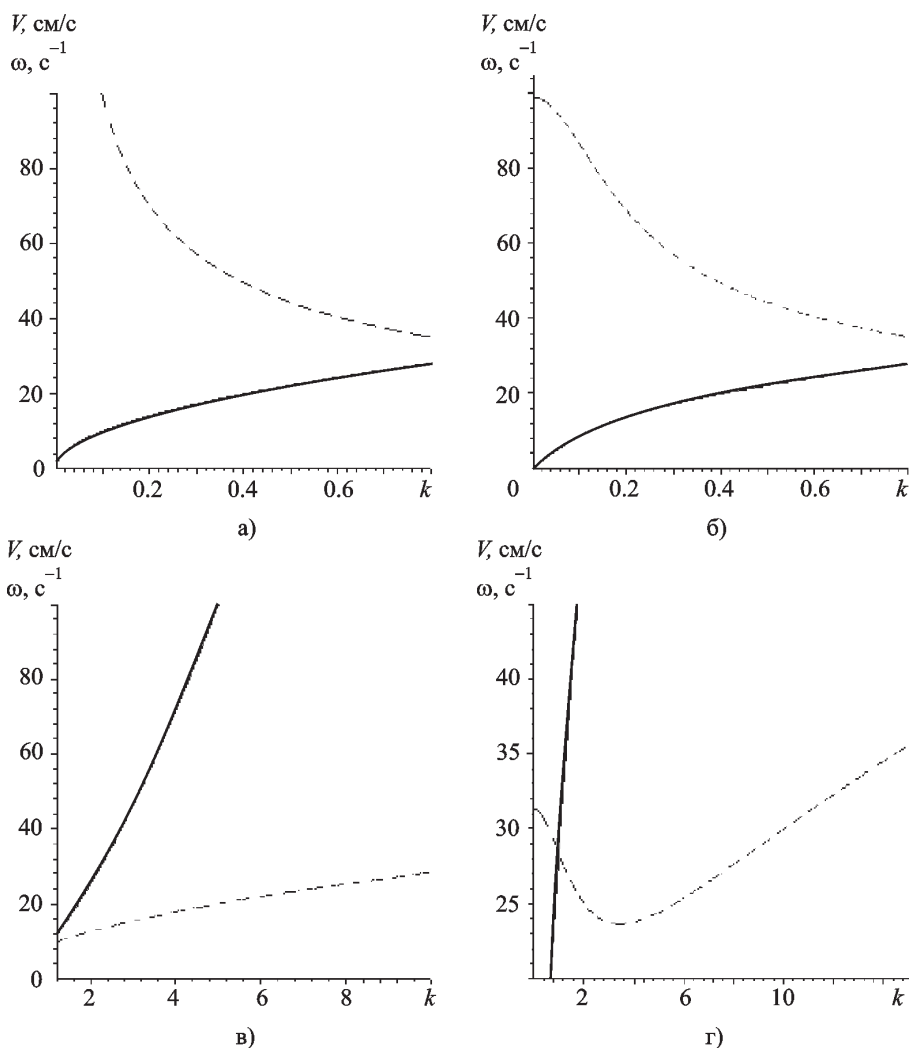


Рис. 2.2. Частота (сплошные линии) и скорость волн (пунктир) на поверхности жидкости для границы вода – воздух:
 а) для гравитационных волн на глубокой воде,
 б) гравитационных волн при глубине бассейна $h = 9.8$ см,
 в) капиллярных волн,
 г) капиллярно-гравитационных волн

причем каждая из функций ζ или $\varphi(0,t)$ удовлетворяет уравнению осциллятора $\ddot{\zeta} + \omega^2 \zeta = 0$. (Опущенный индекс \mathbf{k} нумерует осцилляторы). В отличие от звука, скорость распространения зависит от длины волны $v_\phi = \sqrt{g/k}$, увеличиваясь с ее ростом (положительная дисперсия). Групповая скорость $v_{гр} = \sqrt{g/4k}$, т. е. вдвое меньше фазовой. То, что более длинные волны распространяются быстрее

коротких, по-видимому, замечали многие. Так, часто из области разыгравшегося далекого шторма внезапно набегает на берег самые быстрые (самые длинные) волны, после чего уже поднимается волнение.

Рис. 2.2, а сразу же заставляет подумать о судьбе самых длинных и коротких волн, для которых соответственно $v_{гр} \rightarrow \infty$ или $v_{гр} \rightarrow 0$. Ясно, что в этих областях использованная теория нуждается в изменении.

Если длина волны настолько велика, что уже сравнима с глубиной бассейна, то решение уравнения Лапласа для $\varphi(z, t)$ должно учитывать это обстоятельство. А именно, удовлетворять условию непротекания жидкости через дно $v_z(-h) = 0$:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0. \quad (2.11)$$

Отсюда, используя полное уравнение (2.7), для интересующей нас производной с учетом (2.6') находим, что

$$\left. \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = \varphi(0, t) k \operatorname{th} kh. \quad (2.12)$$

Таким образом, результат сводится к замене в выражении для производной (2.8)

$$k \rightarrow k \operatorname{th} kh. \quad (2.13)$$

Соответственно закон дисперсии в бассейне конечной глубины можно получить из (2.10) заменой (2.13):

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kh. \quad (2.14)$$

Рассмотрим в этой формуле предельный случай столь длинных волн, что $kh \ll 1$. Тогда $\operatorname{th} kh \approx kh$, и мы получаем “звуковой”, линейный закон дисперсии:

$$\omega = \pm \sqrt{gh} k, \quad kh \ll 1. \quad (2.14')$$

Видно, что скорость волны при $\lambda \rightarrow \infty$ выходит на “насыщение” – постоянное значение \sqrt{gh} , а дисперсия исчезает (рис. 2.2, б). В море эта скорость может быть довольно большой, а в океане ($h \approx 4$ км) достигает 200 м/с. Тем не менее эта большая скорость существенно меньше скорости звука в океане, что

оправдывает используемое приближение несжимаемой жидкости. Такие длинные волны, возбуждаемые в океане землетрясениями, при набегании на берег (цунами) могут быть причиной значительных разрушений.

Рассмотрим теперь короткие волны. Здесь становится существенным эффект Лапласа: возникает разность давлений по обе стороны от искривленной поверхности за счет вклада поверхностного натяжения. Ее нетрудно вычислить, используя выражение для площади поверхности $\int \sqrt{1 + (\nabla \zeta)^2} dx dy$. В случае малых градиентов $|\nabla \zeta| \ll 1$ эта разность давлений есть

$$p - \bar{p} = \alpha \Delta \zeta, \quad z = \zeta \rightarrow 0, \quad (2.15)$$

где α – коэффициент поверхностного натяжения границы “вода – воздух”, а \bar{p} – давление в воздухе. Таким образом, используя (2.15), из (2.4) получаем вместо (2.5) соотношение на границе для плоской волны:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=0} + \left(g + \frac{\alpha}{\rho} k^2 \right) \zeta = 0. \quad (2.16)$$

Видно, что в результате ускорение g заменилось на $g_{\text{эфф}}$:

$$g \rightarrow g_{\text{эфф}} = g + \frac{\alpha k^2}{\rho}. \quad (2.17)$$

Сделав эту замену в законах дисперсии (2.10) и (2.14), получаем для капиллярно-гравитационных волн на глубокой воде формулу Томсона:

$$\omega^2 = \left(g + \frac{\alpha k^2}{\rho} \right) k, \quad kh \gg 1, \quad (2.18)$$

а в общем случае произвольной глубины

$$\omega^2 = \left(g + \frac{\alpha k^2}{\rho} \right) k \operatorname{th} kh. \quad (2.19)$$

3. Волны на поверхности раздела и линейные неустойчивости

3а. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца

Получим дисперсионное уравнение с учетом того, что плотности сред по обе стороны от границы раздела могут быть сравнимы и каждое полупространство может двигаться как целое (со своей скоростью \mathbf{U}) (условно можно говорить о “ветре” и “течении”). Как мы уже убежились, в объемных уравнениях движение среды проявляется в замене частоты на доплеровски сдвинутую согласно (1.10), то же происходит и в кинематическом граничном условии (2.6). Пронумеруем среды так, чтобы нижняя среда имела индекс 2, верхняя – 1 (рис. 3а.1). Условие для скачка давлений (2.15) приобретает вид

$$-i\rho_1(\omega - \mathbf{k}\mathbf{U}_1)\varphi_1 + i\rho_2(\omega - \mathbf{k}\mathbf{U}_2)\varphi_2 + (\rho_1 - \rho_2)g\zeta - \alpha k^2\zeta = 0. \quad (3а.1)$$

Поскольку в верхней среде решение убывающее при $z \rightarrow \infty$ есть e^{-kz} , то

$$\left. \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \right|_{\zeta+0} \rightarrow -k\varphi_1|_0, \quad z > \zeta. \quad (3а.2)$$

Сравнивая с (2.8), видим очевидное отличие в знаке. Поэтому выражая φ_1 и φ_2 через ζ

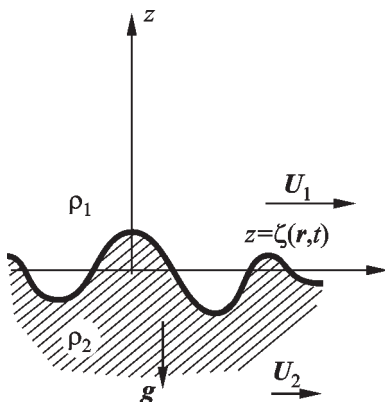


Рис. 3а.1. Колеблющаяся поверхность раздела двух сред в поле тяжести при наличии течения (скорость U_2) и ветра (скорость U_1)

с помощью (2.6), (2.8) и (3а.2) и подставляя в (3а.1) получаем, приравнявая нулю коэффициент при ζ , дисперсионное уравнение

$$\rho_1(\omega - \mathbf{k}\mathbf{U}_1)_1^2 + \rho_2(\omega - \mathbf{k}\mathbf{U}_2)_2^2 + (\rho_1 - \rho_2)gk - \alpha k^3 = 0. \quad (3а.3)$$

Решение выпишем, полагая $U_2 = 0$, $U_1 = U$:

$$\omega = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \mathbf{k}\mathbf{U} \pm \sqrt{D},$$

$$D = \frac{(\rho_2 - \rho_1)gk + \alpha k^3}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (\mathbf{k}\mathbf{U})^2. \quad (3а.4)$$

Рассмотрим частные случаи.

1) Самый простой – две неподвижные среды: $U = 0$, поверхностное натяжение пренебрежимо мало ($\alpha = 0$), $\rho_2 > \rho_1$,

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}} gk. \quad (3а.5)$$

При $\rho_2 \gg \rho_1$ получаем знакомый закон дисперсии (2.10), из которого выпала плотность. Если величина $\rho_2 - \rho_1$ положительна, но мала по сравнению с $\rho_2 + \rho_1$, получаем низкочастотную ветвь т. н. “внутренних” волн, возникающих на слабом скачке плотности из-за скачка температуры (“термоклин”), солёности (например, при впадении рек в море и т. п.). При малой разности плотностей, естественно, мал и коэффициент поверхностного натяжения α . (Рассмотренная нами мода лишь простейший представитель целого спектра внутренних волн, определяемых ходом градиента плотности $\partial\rho/\partial z$).

Замечание. Термоклин возникает из-за прогрева и перемешивания штормами верхнего слоя океана, моря и т. п., залегает соответственно на разных глубинах (в океане около 100 м, в Каспийском море около 40 м), и играет важную роль в биологии моря. Из-за малой

“упругости” могут раскачиваться волны значительно большей амплитуды, чем на поверхности. Эти “штормы”, по-видимому, могут быть безразличны для подводных судов.

2) $U = 0, \alpha = 0, \rho_2 < \rho_1$ – тяжелая жидкость лежит на легкой. Частоты при этом чисто мнимы и один из корней с $\gamma = \text{Im } \omega > 0$ отвечает неустойчивости Рэлея-Тейлора (РТ). Она часто встречается в природе и ответственна за некоторые важные процессы в астрофизике. Механическая аналогия подсказывает нарастающее отклонение от неустойчивого положения равновесия в максимуме потенциальной энергии. В данном случае $\text{Re } \omega = 0$, т. е. неустойчивость аperiодическая.

Замечание. Роль g может играть ускорение произвольной природы (принцип эквивалентности). В частности, испарение и разлет мишени в вариантах инерциального термоядерного синтеза из-за вклада внешней более плотной оболочки приводит к нежелательной неустойчивости РТ, с которой приходится специально бороться. Она существенна в оболочках сверхновых, в галактических дисках. Этот список легко продолжить.

3) $U \neq 0, g = \alpha = 0$ – тангенциальный разрыв:

$$\omega = \pm i \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_2 + \rho_1)^2}} (kU)^2. \quad (3a.6)$$

Видна неустойчивость, которая ответственна за “полоскание” флагов и имеет также множество аналогов в процессах, происходящих в окружающей нас природе и в космосе.

4) За счет сил тяжести и капиллярных сил возможна стабилизация неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (КГ): $U \neq 0, g, \alpha \neq 0$.

Условием устойчивости является положительность дискриминанта в (3a.4) $D > 0$. Граница устойчивости $D = 0$ приводит к квадратному уравнению относительно k , откуда в свою очередь условие на его дискриминант $\tilde{D} < 0$ приводит к условию устойчивости

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} U^2 < \sqrt{4(\rho_2 - \rho_1)g\alpha}, \quad (3a.7)$$

или при $\rho_2 \gg \rho_1$ (например, в случае “вода-воздух”)

$$\rho_1 U^2 < \rho_2 (V_{\text{фаз}}^2)_{\text{min}}. \quad (3a.8)$$

Условие это имеет простой физический смысл. Пусть на границе раздела, отделяющей покоящуюся воду от движущегося со скоростью $U = \text{const}$ воздуха, возникает возвышение ζ с характерным размером λ (играющим роль длины волны). Потенциальное обтекание этого возвышения (рис. 3a.2) в силу закона Бернулли вызывает появление подъемной силы, приводящей к дальнейшему росту возвышения. Действительно, скорость воздуха над возвышением из-за уменьшения поперечного сечения увеличивается, вследствие чего давление падает. Сила тяжести, препятствующая поднятию жидкости, и сила поверхностного натяжения, препятствующая искривлению поверхности, создают возвращающую силу, стремящуюся стабилизировать неустойчивость. Таким образом, условие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца можно переписать в виде $\rho V_{\text{min}}^2 < \rho_{\text{возд}} U^2$, или

$$U > V_{\text{min}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{\text{возд}}}} \equiv U_{\text{КГ}}.$$

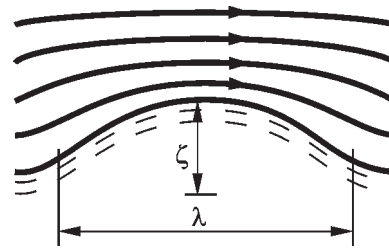


Рис. 3a. 2. Обтекание возвышения ламинарным потоком

Из-за малой плотности воздуха (малости подъемной силы) этот механизм приводит к очень большим критическим скоростям:

$U_{\text{кг}} \approx 6$ м/с, значительно превышающим те, при которых возникает волнение. Долгое время было совершенно непонятно, в чем здесь дело. Проблема просуществовала около полувека и разгадка привела Майлса и Филлипса к открытию ветровой неустойчивости.

3б. Ветровая неустойчивость

Источником волнения на поверхности моря, как правило, является ветер. Парадоксально, что лишь относительно недавно был выяснен истинный механизм ветровой неустойчивости (ВН). Ответственным за неустойчивость оказался резонанс.

Посмотрим на закон дисперсии поверхностных волн. Он имеет типично “сверхтекучий” характер по известному критерию Ландау. Согласно этому критерию законы сохранения не позволяют рождаться возбуждениям (волнам) при скоростях, меньших $V_{\text{крит}}$, которая определяется наклоном касательной, проведенной из начала координат. Касание происходит при $k = k_0$, т. е. при $V_{\text{крит}} = V_{\text{мин}}$, откуда получаем условие возбуждения волн в виде (рис. 3б.1)

$$U > V_{\text{мин}}, \quad V_{\text{мин}} \approx 23 \text{ см/с.}$$

Это условие соответствует значительно меньшим критическим скоростям, чем условие Кельвина-Гельмгольца, так как в нем отсутствует большой множитель $\sqrt{\rho/\rho_{\text{возд}}}$ при $V_{\text{мин}}$. Его физический смысл состоит в возникновении резонанса между вихрями в воздухе, переносимыми со скоростями ветра, и поверхностными волнами, причем резонанс возникает, как только скорость вихрей (скорость потока) начинает превосходить наименьшую скорость волн $V_{\text{мин}}$. Неоднородность профиля скоростей ветра $U(z)$ приводит к тому, что резонанс осуществляется лишь в “слое совпадения”, в котором средняя скорость течения равна скорости волны (рис 3б.2). Можно считать, что слой совпадения возникает на ∞ и с ростом скорости U_{∞} приближается к поверхности раздела (т. е. вихри как бы приходят из бесконечности). Инкремент существенно зависит от положения слоя совпадения и пропорционален второй производной ($-U''(z)$)

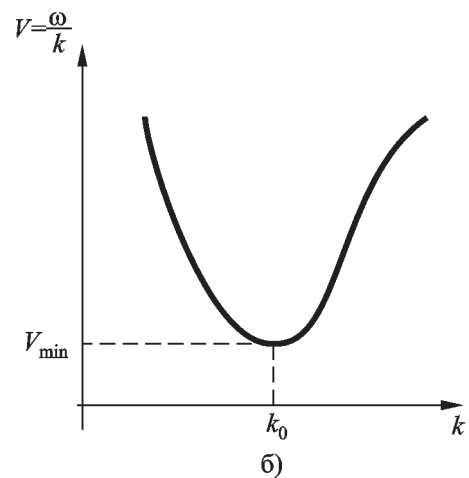
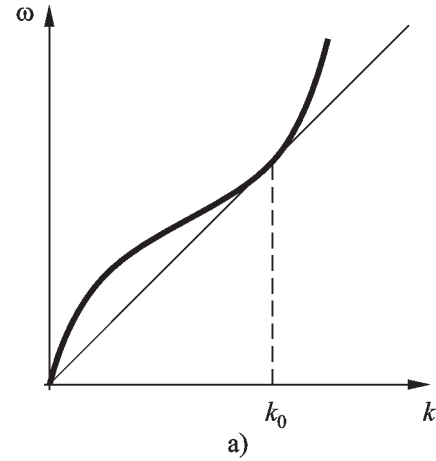


Рис. 3б. 1. а) Критерий Ландау возбуждения волн потоком (применительно к волнам на поверхности жидкости) в терминах закона дисперсии; б) то же в терминах скоростей волн

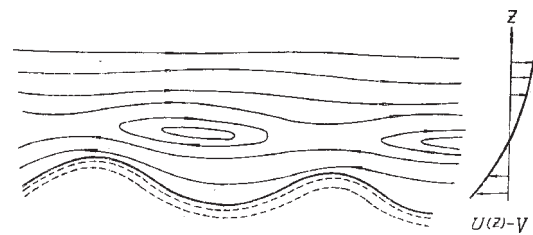


Рис. 3б. 2. Связанные условием резонанса поверхностные волны и вихри в слое совпадения [5с]

в этом слое. Поэтому эффект отсутствует при линейном профиле скоростей. При повышении скорости ветра условие резонанса выполняется для гравитационных волн со все меньшими

значениями V . Источник смещается, таким образом, в сторону малых волновых чисел.

Найдем инкремент ветровой неустойчивости.

Для описания непотенциального движения в несжимаемой жидкости удобно ввести векторный потенциал \mathbf{B} : $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{B}$, тогда уравнение $\text{div } \mathbf{v} = 0$ удовлетворяется тождественно. Профиль скорости в потоке задан:

$$\mathbf{U}(z) = (U(z), 0, 0). \quad (36.1)$$

Возмущение ищем в виде $\mathbf{v}' = \text{rot } \Phi$, причем считаем его не зависящим от y . Двумерный характер движения (плоское течение) позволяет исходить из закона сохранения завихренности

ти $\frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{v} = 0$, который для плоского течения несжимаемой жидкости следует из теоремы

Томсона $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ сохранения циркуляции скорости $\Gamma = \oint \mathbf{v} d\mathbf{l}$. Действительно, для малого контура $\Gamma = \iint \text{rot } \mathbf{v} ds \approx \text{rot } \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{s}$, где $\delta \mathbf{s} = \delta x \delta z \mathbf{e}_y$, откуда $\Gamma \approx \text{rot}_y \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{s}$. В свою очередь, в силу несжимаемости

$$\frac{d\delta \mathbf{s}}{dt} = \delta v_x \delta z + \delta x \delta v_z = \delta \mathbf{s} \left(\frac{\delta v_x}{\delta x} + \frac{\delta v_z}{\delta z} \right) = \delta \mathbf{s} \cdot \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Таким образом, из $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ следует (в этом

случае) $\frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{v} = 0$. Для плоского течения удобно также выразить векторный потенциал через скалярную величину – функцию тока согласно $\mathbf{B} = -\mathbf{e}_y \psi$, $\Phi = -\mathbf{e}_y \phi$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot rot } \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{B} = \mathbf{e}_y \Delta \psi = (U'(z) + \Delta \phi) \mathbf{e}_y. \quad (36.2)$$

Уравнения приобретают гамильтонов вид, где роль обобщенного импульса играет одна из координат, а роль гамильтониана играет функ-

ция тока: $\dot{x} = \frac{\partial \psi}{\partial z}$, $\dot{z} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. Для возмущенной функции тока, которую ищем в виде плоской волны

$$\phi = \phi(z) \exp[i(kx - \omega t)], \quad (36.3)$$

закон сохранения завихренности (36.2) приводит к уравнению Рэлея:

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} - \left(k^2 - \frac{U''(z)}{U(z) - V} \right) \phi = 0, \quad (V \equiv \frac{\omega}{k}, U'' \equiv \frac{d^2 U}{dz^2}). \quad (36.4)$$

Следуя Рэлею, умножаем (36.4) на ϕ^* и, проинтегрировав по z от 0 до ∞ , получаем условие

$$\int_0^\infty dz \left[|\phi'|^2 + k^2 |\phi|^2 + \frac{U''(z)}{U(z) - \frac{\omega}{k}} |\phi|^2 \right] = \phi^* \phi' \Big|_0^\infty = -\phi_0^* \phi_0', \quad (36.4')$$

где правая часть комплексна. Полюсная особенность в уравнении Рэлея соответствует резонансу $U(z_c) = V$, о котором мы уже говорили. Ее наличие позволяет в резонансном приближении выразить мнимую часть логарифмической производной ϕ'/ϕ на возмущенной границе раздела через величину, которую можно оценивать значительно грубее, – отношение квадрата модулей функций тока в критическом слое и на границе. Правило обхода особенности $V \rightarrow V + i0$ соответствует адиабатическому включению возмущения на $-\infty$ по t .

Взяв мнимую часть, получим формулу Майлса

$$\text{Im} \frac{\phi_0'}{\phi_0} = -\pi \frac{U_c''}{|U_c'|} \left| \frac{\phi_c}{\phi_0} \right|^2, \quad \phi_c \equiv \phi(z_c). \quad (36.5)$$

Аналогично тому, как это делалось в терминах потенциала, получим граничные усло-

вия в терминах функции тока, а из непрерывности давлений на границе раздела получим “дисперсионное соотношение”

$$\rho_1 \left[(\omega - kU_0) \frac{\phi'_0}{\phi_0} + kU'_0 \right] (\omega - kU_0) = k\rho_2 \omega^2. \quad (36.6)$$

Кавычки поставлены потому, что в (3.б.6) входит величина ϕ'_0/ϕ_0 , которую еще следует найти из уравнения Рэля. Сделать это в общем случае невозможно из-за наличия профиля $U(z)$. Однако если ограничиться вычислением малого инкремента, то (при $U_0 = 0$, что нас вполне устраивает) находим из (36.6) для $\rho_2/\rho_1 \gg 1$

$$\gamma = \text{Im}\omega = -\frac{\rho_1}{\rho_2} V_\phi \text{Im} \frac{\phi'_0}{\phi_0}, \quad V_\phi \equiv -\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{U'_0}{k}. \quad (36.7)$$

(Заметим, что выражение для инкремента через V_ϕ является более общим, чем конкретное выражение для V_ϕ в (36.7)). Используя выражение для $\text{Im} \frac{\phi'_0}{\phi_0}$ (36.5), получаем

$$\gamma = \pi \frac{\rho_1}{\rho_2} V_\phi \frac{U''_c}{|U'_c|} \left| \frac{\phi_c}{\phi_0} \right|^2. \quad (36.8)$$

Оценить отношение модулей, входящее в (36.8), можно, например, со стороны больших k , где решение имеет простой вид поверхностной волны

$$\phi(z) = \phi(0) e^{-kz}$$

и, соответственно, инкремент экспоненциально убывает с ростом k :

$$\gamma(k) = \pi \frac{\rho_1}{\rho_2} V_\phi \frac{U''_c}{(U'_c)} \exp(-2kz_c), \quad kz_c \gg 1. \quad (36.9)$$

Учитывая, что при малых k инкремент мал (в силу того, что узкий резонансный слой неэффективно взаимодействует с очень длинной волной), приходим к важному выводу о том, что для ветровой неустойчивости $\gamma(k)$ имеет максимум при $kz_c \approx 1$. Это обстоятельство весьма существенно, поскольку приводит к возникновению выделенных масштабов, важных во многих приложениях. Инкремент пропорционален мнимой части интеграла, даваемой полувычетом в точке резонанса, и таким образом определяется величиной $U''(z)$ в этой точке.

Формула Майлса верна, если инкремент достаточно мал. Если отказаться от этого предположения, то левая сторона равенства (3.4') после взятия мнимой части примет вид:

$$\text{Im}V \int_0^\infty dz \left[\frac{U''(z)}{(U(z) - \text{Re}V)^2 + (\text{Im}V)^2} |\phi|^2 \right], \quad (36.10)$$

откуда в отсутствие резонанса и при жесткой границе, когда правая часть (36.4') обращается в нуль, следует известная теорема Рэля об устойчивости течений без точек перегиба. В условиях резонанса при $\text{Im}V \rightarrow 0$ и $U'_c \neq 0$, вынося числитель в точке резонанса за знак интеграла и используя разложение $U(z) - \text{Re}V \approx U'_c(z - z_c)^2$, возвращаемся к (36.5). Предоставляем читателю получить инкремент ветровой неустойчивости в случае $U'_c = 0$. Инкремент ВН для магнитогидродинамических систем см. в [5g] (магнитосферная модель облаков радиогалактик, космических струй (джетов), кометных хвостов). Здесь заметим только, что поверхностная МГД-волна распространяется с альфвеновской скоростью

$$\mathbf{v}_a = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho_{\text{эфф}}}}. \quad \text{Если скорость}$$

ветра меньше звуковой, результат соответствует приведенному в тексте с заменой $V_\phi \rightarrow v_a$. При сверхзвуковом движении максимум инкремента соответствует возбуждению спиральной волны, что на плоской границе раздела отвечает волнам, бегущим под углом к потоку.

4. Гамильтоновы уравнения для движений поверхности жидкости

Все разобранные выше примеры сводятся к гамильтоновой форме, что, однако, непосредственно не видно в естественных переменных ρ , \mathbf{v} и p , но, как было показано В. Е. Захаровым [2a,b], проявляется после перехода к каноническим переменным, которыми в данном случае являются возвышение $\zeta(\mathbf{r}, t)$ и потенциал на поверхности жидкости $\psi = \varphi(\mathbf{r}, \zeta(\mathbf{r}, t), t)$. Проверим это вначале на рассмотренных выше линеаризованных уравнениях. Роль функции Гамильтона будет играть энергия системы E , отнесенная к единице массы ($\rho = \text{const}$, h – глубина бассейна):

$$H = \frac{E}{\rho} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int_{-h}^{\zeta(\mathbf{r})} dz (\nabla\varphi)^2 + \int d\mathbf{r} \int_0^{\zeta(\mathbf{r})} dz gz. \quad (4.1)$$

Проварьируем ее по возвышению, ограничившись квадратичными слагаемыми по малым ζ и $\nabla\varphi$, что соответствует линейному приближению в уравнениях. Это означает, что верхний предел в кинетической энергии должен быть заменен нулем. Тогда имеем

$$\delta H = \int d\mathbf{r} g \zeta \delta \zeta, \quad g \zeta(\mathbf{r}) \equiv \frac{\delta H}{\delta \zeta(\mathbf{r})}. \quad (4.2)$$

Выписанная здесь функциональная производная является обобщением частной производной на случай континуальных (распределенных) систем. Сравнивая со вторым уравнением (2.9), видим, что оно принимает вид

$$\left. \frac{\delta \varphi}{\delta t} \right|_{z=0} = - \frac{\delta H}{\delta \zeta(\mathbf{r})}. \quad (4.3)$$

Проварьируем в этом же приближении H по φ . Интегрируя по частям, получаем,:

$$\delta H = \int d\mathbf{r} \int_{-h}^0 dz \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta \varphi \right) -$$

$$- \int d\mathbf{r} \int_{-h}^0 dz \Delta \varphi \delta \varphi = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} \delta \varphi(0). \quad (4.4)$$

Мы учли, что благодаря несжимаемости $\Delta \varphi = 0$. Таким образом, и первое из уравнений (2.9) приобретает гамильтонов вид

$$\frac{\delta \zeta}{\delta t} = \frac{\delta H}{\delta \psi}, \quad \text{где} \quad \frac{\delta H}{\delta \psi} \equiv \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad \psi = \varphi_0. \quad (4.5)$$

Замечательно, что гамильтонов вид имеют и точные нелинеаризованные уравнения для потенциального движения (В. Е. Захаров [2a,b]):

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=\zeta} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \Big|_{z=\zeta} + g \zeta = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \varphi \Big|_{z=\zeta} \nabla \zeta = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=\zeta}. \quad (4.7)$$

Вывод аналогичен предыдущему. При интегрировании по частям нужно учесть также вклад верхнего предела во внутреннем интеграле для кинетической энергии, а в выражении для ζ учесть конвективный член. Ответ:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\delta H}{\delta \zeta}, \quad \psi \equiv \varphi(\mathbf{r}, \zeta(\mathbf{r}, t), t). \quad (4.8)$$

Уравнения сохраняют вид (4.8) и при учете капиллярных членов [2b]. Дополнительное слагаемое в энергии имеет вид

$$\frac{\alpha}{\rho} \int d\mathbf{r} \left(\sqrt{1 + (\nabla_{\perp} \zeta)^2} - 1 \right).$$

Гамильтонова структура уравнений означает симметрию системы относительно канонических преобразований, скрытую в исходных переменных. Это, в свою очередь, позволяет осуществить выбор переменных, удобных для требуемого анализа, используя хоро-

шо разработанный и весьма общий подход. Существенная трудность состоит, однако, в нахождении канонических переменных (т. е., по существу, в конструктивном доказательстве гамильтоновости системы). Обсуждавшиеся выше переменные были, на самом деле, угаданы авторами [2]. Впоследствии было выяснено, что существует способ регулярного перехода от объемных к поверхностным каноническим переменным [6g, 5], который мы изложили ниже, и в Приложении 1.

Известно, что в баротропной жидкости каноническими переменными, описывающими потенциальное движение, являются плотность ρ и потенциал скорости ϕ ($\mathbf{v} = \nabla\phi$) [6a]:

$$\frac{\delta H}{\delta \rho} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \frac{\delta H}{\delta \phi} = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (4.9)$$

$$H = \int dV \left(\frac{\rho v^2}{2} + \varepsilon(\rho) \right),$$

где внутренняя энергия $\varepsilon(\rho)$ может включать потенциальные поля, например, однородное поле тяжести, а из термодинамических переменных зависит только от плотности. Используя это, рассмотрим переход от непрерывной неоднородной среды к двум несжимаемым жидкостям с плотностями ρ_1 и ρ_2 , разделенными резкой границей $z = \zeta(\mathbf{r}, t)$. Для этого введем представление

$$\rho = f(\zeta - z) \equiv \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)\Theta(\zeta - z), \quad (4.10)$$

где функцию Θ устремим к функции скачка

$$\Theta(\zeta - z) \rightarrow \theta(\zeta - z) = \begin{cases} 1, & \zeta > z \\ 0, & \zeta < z. \end{cases} \quad (4.11)$$

Естественно, что после предельного перехода изменение плотности в данной точке определяется только движением границы раздела и описывается функцией $\zeta(\mathbf{r}, t)$. Уравнения гидродинамики после предельного перехода

содержат, кроме обычных объемных слагаемых (различных при $\zeta > z$ и $\zeta < z$ в силу разрывности ρ), слагаемые с производной f' , которая при предельном переходе стремится к δ -функции. Последнее дает естественные граничные условия на поверхности разрыва.

Например, уравнение непрерывности переходит в

$$f' \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v}(\nabla \zeta - \mathbf{e}_z) \right) + f \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (4.12)$$

что после предельного перехода эквивалентно уравнению $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ в объеме несжимаемой жидкости ($z \neq \zeta$) и граничному условию

$$\frac{d\zeta}{dt} = v_z \quad \text{на разрыве } (z = \zeta \pm 0).$$

Перейдем теперь от старой координаты ρ и импульса ϕ к новым каноническим переменным, потребовав, чтобы возвышение ζ было новой координатой. Выбирая производящий функционал, зависящий от старого импульса и новой координаты $F(\phi, \zeta)$, в виде

$$F(\phi, \zeta) = \int dV \phi f(\zeta - z), \quad (4.13)$$

совершим предельный переход (4.11). Тогда

$$F(\phi, \zeta) = \int d\mathbf{r} \left\{ \int_{\zeta}^{\zeta} \rho_2 \phi_2 dz + \int_{\zeta} \rho_1 \phi_1 dz \right\}, \quad (4.14)$$

и вариация по ζ дает новый импульс

$$\frac{\delta F}{\delta \zeta} = (\rho_2 \phi_2 - \rho_1 \phi_1) \Big|_{z=\zeta} \equiv [\rho \phi]_{\zeta}. \quad (4.15)$$

Таким образом, замена (4.10), (4.11) с производящим функционалом (4.13) позволяет совершить переход от канонических переменных (ρ, ϕ) к поверхностным каноническим переменным $(\zeta, \Psi \equiv [\rho \phi]_{\zeta})$ в несжимаемой жидкости, которые при $\rho_1 \rightarrow 0$ (с точностью до

постоянного множителя ρ) переходят в переменные Захарова ζ , $\varphi(\mathbf{r}, \zeta(\mathbf{r}, t), t)$.

Указанный способ непосредственно обобщается на случай вихревого движения. Это обобщение, а также поверхностные гамильтоновы переменные в магнитной гидродинамике приведены в Приложении 1. В разделе 6 мы получим эти (и более общие) переменные, используя вариационный принцип со связями.

5. Комплексные нормальные координаты

Для анализа слабо нелинейных процессов, когда еще сохраняется индивидуальность линейных волн (волновых пакетов), но уже становятся существенными процессы их взаимодействия, чрезвычайно удобна аналогия волн с частицами, которая наиболее адекватно проявляется при некотором специальном выборе в качестве переменных линейных комбинаций канонических координат и импульсов. Указанная аналогия чрезвычайно широкое распространение получила не в классической, а в квантовой механике и теории поля.

Чтобы пояснить специфику и удобство новых переменных, рассмотрим сначала линейный осциллятор (чтобы не загромождать анализ будем считать его частоту и массу равными единице) с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2). \quad (5.1)$$

Его координата q и импульс p удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (5.2)$$

и для них выполняются следующие отсюда осцилляторные уравнения

$$\ddot{q} + q = 0, \quad \ddot{p} + p = 0. \quad (5.3)$$

Решение этих уравнений представляет собой сумму двух слагаемых, соответствующих “положительной” и “отрицательной” частотным ветвям:

$$q(t) = Ae^{it} + Be^{-it}. \quad (5.4)$$

Такое свойство осцилляторных переменных тесно связано с симметрией относительно изменения знака времени и вещественностью координаты $q(t)$ и импульса $p(t)$ осциллятора. Однако при анализе взаимодействий осцилляторов (волн) наличие положительной и отрицательной частот в одной переменной становится неудобным. Поэтому чрезвычайно полезным оказывается переход к комплексным переменным (решениям тех же линейных осцилляторных уравнений), в которых разделены положительные и отрицательные частоты. Достигается это факторизацией гамильтониана. Введя величину iq , мы получаем H в виде разности квадратов $\frac{1}{2}(p^2 - (iq)^2)$, которая разлагается на сомножители и определяет выбор новых переменных:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - iq), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + iq), \quad (5.5)$$

после чего гамильтониан приобретает вид квадрата модуля комплексной величины a : $H = a^* a$. При $\omega \neq 1$ для системы, представляющей собой счетную последовательность осцилляторов,

$$H = \sum_j \omega_j a_j^* a_j, \quad a_j = \sqrt{\frac{\omega_j}{2}} q_j - i \frac{p_j}{\sqrt{2\omega_j}}. \quad (5.6)$$

Переходу от переменных p и q к переменным a и a^* соответствует преобразование, приводящее уравнения (5.2) к виду

$$\dot{a}_i = -i \frac{\partial H}{\partial a_i^*}, \quad (5.7)$$

или в случае непрерывной среды:

$$\dot{a}_i(\mathbf{r}, t) = -i \frac{\delta H}{\delta a_i^*(\mathbf{r}, t)}. \quad (5.8)$$

Введем удобное в дальнейшем обозначение a_i^σ , где $\sigma = \pm$. По существу, мы ввели “спиновый” индекс σ , и набор a^σ представляется “столбцом”, причем мнемонически удобно комплексное сопряжение обозначать индексом (+), а его отсутствие индексом (-). Тогда уравнения (5.8) и комплексно-сопряженные к ним переписутся в виде:

$$\dot{a}_i^\sigma(\mathbf{r}, t) = i\sigma \frac{\delta H}{\delta a_i^{-\sigma}(\mathbf{r}, t)}. \quad (5.9)$$

В случае, когда нелинейность слаба (имеется малый параметр, например, малый угол наклона возвышений в случае поверхностных волн и т. п.), представляет интерес разложение гамильтониана в ряд по нелинейному взаимодействию. В терминах переменных a^σ это разложение выглядит весьма общим и (символически) простым:

$$H = H^L + H^{NL}, \quad H^L \equiv H^{(2)}, \\ H^{NL} = H^{(3)} + H^{(4)} + \dots,$$

или

$$H = \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{3} \int d\mathbf{l} d\mathbf{2} d\mathbf{3} V_{123} a_1 a_2 a_3 \delta^{(3)} + \\ + \frac{1}{4} \int d\mathbf{l} d\mathbf{2} d\mathbf{3} d\mathbf{4} V_{1234} a_1 a_2 a_3 a_4 \delta^{(4)} + \dots \quad (5.10)$$

Здесь использована символическая запись

$$\int d\mathbf{l} \dots \equiv \sum_{\sigma_1} \int d\mathbf{k}_1 \dots, \quad \delta^{(3)} \equiv \delta \left(\sum_{\sigma_i} \sigma_i \mathbf{k}_i \right), \quad (5.11)$$

$$V_{123} \equiv V_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}, \quad a_1 \equiv a_{\mathbf{k}_1}^{\sigma} \text{ и т. д.}$$

Множители $1/3$ в $H^{(3)}$, $1/4$ в $H^{(4)}$ выбраны так, чтобы после варьирования исчезал соответствующий коэффициент (3 или 4 соответственно), связанный с использованной симметризацией в приведенной выше символической записи. Уравнения движения приобретают в слабо нелинейном случае вид:

$$\dot{a}_{\mathbf{k}}^\sigma - i\sigma \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\sigma = i\sigma \int d\mathbf{l} d\mathbf{2} d\mathbf{3} V_{\mathbf{k} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}^{-\sigma \sigma_1 \sigma_2} a_{\mathbf{q}_1}^{\sigma_1} a_{\mathbf{q}_2}^{\sigma_2} \times \\ \times \delta(-\sigma \mathbf{k} + \sigma_1 \mathbf{q}_1 + \sigma_2 \mathbf{q}_2) + \dots \quad (5.12)$$

(легко выписываются и следующие члены разложения).

Получим критерий того, что преобразование к новым нормальным координатам $a \rightarrow b$ является каноническим, т. е. сохраняет вид уравнений (5.8). Так как $b = b\{a\}$, то

$$\dot{b}^\sigma(\mathbf{r}, t) = \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{r}' \frac{\delta b^\sigma(\mathbf{r}, t)}{\delta a^{\sigma'}(\mathbf{r}', t)} \dot{a}^{\sigma'}(\mathbf{r}', t),$$

и мы должны привести это выражение к виду (5.8). Подставляя \dot{a}^σ , из (5.9), где H рассматривается как функционал $H\{b\{a\}\}$, т. е.

$$\dot{a}^{\sigma'}(\mathbf{r}', t) = i\sigma' \sum_{\sigma''} \int d\mathbf{r}'' \frac{\delta H}{\delta b^{\sigma''}(\mathbf{r}'', t)} \frac{\delta b^{\sigma''}(\mathbf{r}'', t)}{\delta a^{-\sigma'}(\mathbf{r}', t)},$$

получим критерий каноничности в виде условия для скобки Пуассона (детальнее см. [1h]):

$$\sum_{\sigma'} \sigma' \int d\mathbf{r}' \frac{\delta b^{\sigma'}(\mathbf{r}'', t)}{\delta a^{-\sigma'}(\mathbf{r}', t)} \cdot \frac{\delta b^\sigma(\mathbf{r}, t)}{\delta a^{\sigma'}(\mathbf{r}', t)} \equiv \\ \equiv [b^{\sigma'}(\mathbf{r}''), b^\sigma(\mathbf{r})]_{a^{-\sigma'}, a^{\sigma'}} = \sigma \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}) \delta_{-\sigma', \sigma}. \quad (5.13)$$

Теперь нетрудно проверить, что переход от $a(\mathbf{r}, t)$ к фурье-образам $a_{\mathbf{k}}(t)$ является каноническим преобразованием. Согласно определению (d – размерность \mathbf{k} -пространства),

$$a^\sigma(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d/2}} a_{\mathbf{k}}^\sigma e^{-i\sigma\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

$$a_{\mathbf{k}}^\sigma(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^{d/2}} a^\sigma(\mathbf{r}) e^{i\sigma\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

функциональные производные новых координат по старым равны:

$$\frac{\delta a_{\mathbf{k}}^\sigma}{\delta a^\sigma(\mathbf{r})} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{i\sigma\mathbf{k}\mathbf{r}} \delta_{\sigma\sigma'}.$$

Вычисляя скобку $[a_{\mathbf{k}''}^{\sigma'}, a_{\mathbf{k}}^\sigma]_{a^\sigma(\mathbf{r}), a^{\sigma'}(\mathbf{r})}$, находим, что она равна $\sigma\delta_{\sigma', -\sigma}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'')$, т. е. требуемое условие выполняется. Видно, что нормировка фурье-преобразования должна быть симметричной. В физике, впрочем, часто используют несимметричную нормировку. Запишем, опуская несложные выкладки, уравнения движения (4.6), (4.7) в фурье-представлении, используя несимметричное преобразование Фурье (множители 2π собраны в интеграле по \mathbf{r}):

$$A_{\mathbf{k}} \equiv \langle A \rangle_{\mathbf{k}} \equiv \int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} A(\mathbf{r}), \quad (5.14)$$

$$A(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \langle A \rangle_{\mathbf{k}};$$

$$\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} \right\rangle_{\mathbf{k}} = \int d\mathbf{q} q \varphi_{\mathbf{q}}(t) \langle e^{q\zeta} \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{q}},$$

$$\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} \right\rangle_{\mathbf{k}} = \int d\mathbf{q} \frac{\delta\varphi_{\mathbf{q}}(t)}{\delta t} \langle e^{q\zeta} \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}, \quad (5.15)$$

$$\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{z=\zeta} \cdot \nabla\zeta \right\rangle_{\mathbf{k}} = -\int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 (\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) \varphi_{\mathbf{q}_1} \zeta_{\mathbf{q}_2} \langle e^{q\zeta} \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2},$$

$$\begin{aligned} \left\langle (\nabla\varphi)^2 \Big|_{z=\zeta} \cdot \nabla\zeta \right\rangle_{\mathbf{k}} &= \\ &= \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 (q_1 q_2 - \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) \varphi_{\mathbf{q}_1} \varphi_{\mathbf{q}_2} \langle e^{(q_1+q_2)\zeta} \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}. \end{aligned}$$

Потенциал скорости равен

$$\varphi(\mathbf{r}, z, t) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{k}}(z, t) \equiv \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{kz} \varphi_{\mathbf{k}}(t), \quad (5.16)$$

таким образом, величина $\varphi_{\mathbf{k}}(t)$ – фурье-компонента потенциала при $z=0$. Приведем также связь $\varphi_{\mathbf{k}}$ и фурье-компоненты потенциала скорости на границе раздела ζ (последняя является гамильтоновой переменной) $\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, \zeta(\mathbf{r}, t), t)$:

$$\psi_{\mathbf{k}}(t) = \int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{q} \varphi_{\mathbf{q}}(t) \langle e^{q\zeta} \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}. \quad (5.17)$$

Чтобы записать уравнения для $\psi_{\mathbf{k}}$ и $\zeta_{\mathbf{k}}$ с учетом квадратичных членов используем разложение $\langle e^{q\zeta} \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} = \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + q\zeta_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \dots$, после чего имеем из (5.15) – (5.16):

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) = \psi_{\mathbf{k}} - \int d\mathbf{q}_1 q_1 \psi_{\mathbf{q}_1} - \zeta_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_1} + \dots$$

Окончательно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_{\mathbf{k}}}{\partial t} + g\zeta_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \psi_{\mathbf{q}_1} \psi_{\mathbf{q}_2} \times \\ &\times (q_1 q_2 + \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2), \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\zeta_{\mathbf{k}}}{\partial t} + k\psi_{\mathbf{k}} &= \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \psi_{\mathbf{q}_1} \zeta_{\mathbf{q}_2} \times \\ &\times (\mathbf{k}\mathbf{q}_1 - kq) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2). \end{aligned}$$

Приведем квадратичную часть гамильтониана, выраженную через $\psi_{\mathbf{k}}$ и $\zeta_{\mathbf{k}}$:

$$H^L = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \mathbf{dr} \int (\nabla\phi)^2 dz + \int_{\mathbf{dr}} \int_0^{\xi} dz gz =$$

$$= \frac{(2\pi)^2}{2} \int d\mathbf{q} (q\psi_{\mathbf{q}}\psi_{-\mathbf{q}} + g\zeta_{\mathbf{q}}\zeta_{-\mathbf{q}}). \quad (5.19)$$

Перейдем теперь от $\psi_{\mathbf{k}}$ и $\zeta_{\mathbf{k}}$ к комплексным нормальным координатам и вычислим “матричные элементы” для системы (5.18). Отличие от (5.6) состоит в том, что исходные “координата” и “импульс” теперь комплексные и связь имеет вид:

$$\zeta_{\mathbf{k}} = \gamma_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^*), \quad \psi_{\mathbf{k}} = -i\beta_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}} - a_{-\mathbf{k}}^*). \quad (5.20)$$

Ответ [2]:

$$H = \int d\mathbf{q} \omega_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^*, \quad \omega_{\mathbf{q}} = \sqrt{gq}, \quad V \equiv \frac{\omega}{q} \quad (5.21)$$

$$\beta_{\mathbf{k}}^2 = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2(2\pi)^2 k}, \quad \gamma_{\mathbf{k}}^2 = \frac{k}{2(2\pi)^2 \omega_{\mathbf{k}}};$$

$$V_{123} = \frac{(2\pi)^2}{4} \beta_1 \beta_2 \beta_3 \sum_{\text{перестановки}} \frac{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 + \sigma_1 \sigma_2 q_1 q_2}{V_3}, \quad (5.22)$$

Чтобы вычислить “матричные элементы” V_{1234} для системы (4.6) – (4.7) нужно провести значительно более громоздкие выкладки, результат которых приведен в [2]. См. также Приложение 2.

6. Вариационный принцип со связями и введение гамильтоновых переменных

В настоящем разделе принцип наименьшего действия формулируется в таком виде, что позволяет ввести гамильтоновы потенциалы в объеме как лагранжевы множители при связях, используя в качестве последних законы сохранения. Заметим, что обычно вариацион-

ный принцип применяется для вывода уравнений. Мы же будем считать уравнения (или законы сохранения, которые, по существу, эквивалентны уравнениям движения) известными и будем использовать их как связи для отыскания условного экстремума действия. При таком подходе лагранжевы множители при связях оказываются ни чем иным, как гамильтоновыми переменными (ГП). Отметим, что такой подход плодотворно использовался Дираком в квантовой электродинамике, а применительно к сплошным средам – спорадически в отдельных работах, из которых следует отметить раннюю работу Давыдова [6b]. Излагается также способ вывода этим методом поверхностных ГП (как естественных граничных условий вариационной задачи). Он является более общим, чем описанный выше предельный переход от гамильтоновых переменных в плавно неоднородной среде к разрывным течениям. Оба подхода могут быть использованы и в других случаях: магнитная гидродинамика, плазма, магнетики, сверхтекучая [12a] или релятивистская [12b] среда и т. п.

Вариационный принцип со связями

Объемные гамильтоновы уравнения должны быть эквивалентны уравнениям гидродинамики идеальной жидкости:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \quad (6.2)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla). \quad (6.3)$$

Будем получать их используя вариационный принцип для действия:

$$A = \int dt L = \min, \quad L = \int d\mathbf{r} L, \quad L = \frac{\rho v^2}{2} - p\epsilon. \quad (6.4)$$