

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
УКРАИНЫ**

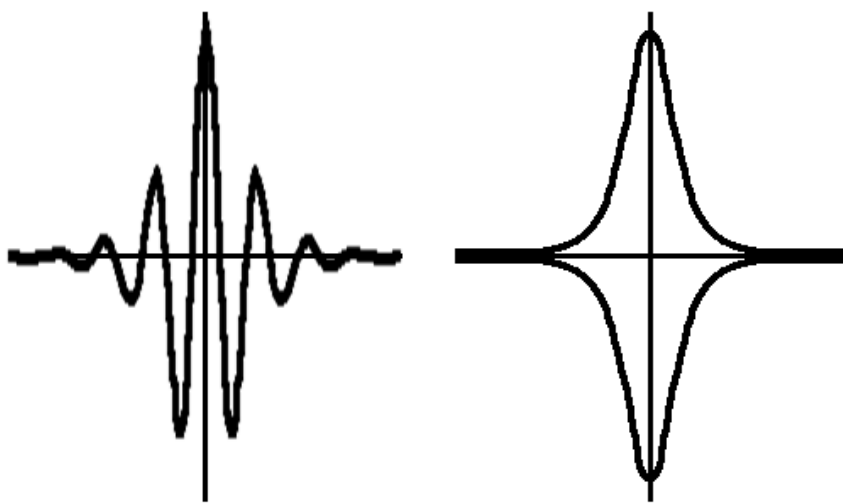
**ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. Н. КАРАЗИНА**

О. В. ЛАЗОРЕНКО, Л. Ф. ЧЕРНОГОР



**НЕЛИНЕЙНАЯ
РАДИОФИЗИКА**

СБОРНИК ЗАДАЧ



Харьков 2020

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
УКРАИНЫ**

**ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. Н. КАРАЗИНА**

О. В. ЛАЗОРЕНКО, Л. Ф. ЧЕРНОГОР



**НЕЛИНЕЙНАЯ
РАДИОФИЗИКА**

СБОРНИК ЗАДАЧ

Учебник

Издание шестое, исправленное

Харьков 2020

УДК 530.18 + 534.1: 550.338

Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Нелінійна радіофізика: Збірник задач. Підручник.
– Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2020. – 173 с.

Представлено основні поняття та співвідношення, приклади розв’язання типових задач, а також задачі для самостійного розв’язання з відповідями.

Для студентів старших курсів фізичних спеціальностей університетів.

35 іл., 5 табл., 66 бібл.

Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Нелинейная радиофизика: Сборник задач. Учебник. – Харьков: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2020. – 173 с.

Представлены основные понятия и соотношения, примеры решения типовых задач, а также задачи для самостоятельного решения с ответами.

Для студентов старших курсов физических специальностей университетов.

35 ил., 5 табл., 66 библиографических ссылок.

Lazorenko O. V., Chernogor L. F. Nonlinear Radio Physics: Book of problems. Handbook. – Kharkiv, Kharkiv V. N. Karazin National University, 2020. – 173 pp.

Basic concepts and relations, examples of the typical problems solving, problems for self-dependent solving with answers are given.

For graduate students of physics and radio physics.

35 Figures, 5 Tables, 66 References.

Рекомендовано ученым советом факультета радиофизики, биомедицинской электроники и компьютерных систем Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина

(протокол № 5 от 15 января 2020 г.).

Рецензенты: академик НАН Украины В. М. Яковенко,
доктор физ.-мат. наук, профессор С. Н. Шульга.

ISBN 966-623-434-3

© Харьковский национальный университет имени
В. Н. Каразина, 2020

© О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор, 2020



СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	5
Введение.....	6
Глава 1. Краткая характеристика нелинейности, основных явлений и методов нелинейной физики.....	7
1.1. Нелинейность – универсальное фундаментальное и главное свойство мира.....	7
1.1.1. Вводные сведения.....	7
1.1.2. О линейном мышлении и линейном мировидении.....	7
1.1.3. Азы из математики.....	8
1.1.4. Знакомство с нелинейностью.....	9
1.1.5. Основные периоды эволюции представлений о нелинейности мира.....	10
1.1.6. Примеры нелинейных явлений.....	11
1.1.7. Порядок и хаос.....	19
1.1.8. Нелинейная парадигма.....	25
1.1.9. Роль нелинейных явлений и их моделей.....	26
1.1.10. Основные особенности нелинейных систем и процессов.....	26
1.1.11. Особенности нелинейного мировидения.....	27
1.1.12. Нелинейность в XXI веке.....	28
1.2. Общие сведения о нелинейной физике, ее методах и приложениях.....	29
1.3. Основные положения нелинейной парадигмы.....	33
Глава 2. Методы нелинейной электродинамики.....	34
2.1. Основные понятия и соотношения.....	34
2.2. Примеры.....	40
2.3. Задачи для самостоятельного решения.....	49
Глава 3. Ударные волны.....	52
3.1. Основные понятия и соотношения.....	52
3.2. Примеры.....	53
3.3. Задачи для самостоятельного решения.....	57
Глава 4. Солитоны.....	60
4.1. Основные понятия и соотношения.....	60
4.2. Примеры.....	62
4.3. Задачи для самостоятельного решения.....	65

Глава 5. Когерентное взаимодействие волн. Неустойчивости.....	69
5.1. Основные понятия и соотношения.....	69
5.2. Примеры.....	71
5.3. Задачи для самостоятельного решения.....	79
Глава 6. Нелинейная квантовая радиофизика.....	85
6.1. Основные понятия и соотношения.....	85
6.1.1. Тепловой механизм.....	85
6.1.2. Стрикционный механизм.....	87
6.1.3. Атомный механизм.....	88
6.1.4. Релятивистский механизм.....	89
6.1.5. Вакуумный механизм.....	89
6.1.6. Сравнение механизмов.....	90
6.2. Генерация второй гармоники.....	91
6.2.1. Исходные уравнения.....	92
6.2.2. Амплитуда второй гармоники.....	93
6.3. Задачи для самостоятельного решения.....	95
Глава 7. Нелинейная плазменная радиофизика.....	99
7.1. Основные понятия и соотношения.....	99
7.2. Примеры.....	102
7.3. Задачи для самостоятельного решения.....	107
Глава 8. Нелинейная и космическая радиофизика....	112
8.1. Основные понятия и соотношения.....	112
8.2. Примеры.....	117
8.3. Задачи для самостоятельного решения.....	119
Глава 9. Математические методы нелинейной статистической радиофизики.....	124
9.1. Основные понятия и соотношения.....	124
9.2. Примеры.....	126
9.3. Задачи для самостоятельного решения.....	131
Глава 10. Детерминированный хаос и самоорганизация.....	133
10.1. Основные понятия и соотношения.....	133
10.2. Примеры.....	135
10.3. Задачи для самостоятельного решения.....	138
Литература.....	140
1. Основная.....	140
2. Дополнительная.....	140
Приложение.....	144
Ответы.....	148



ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник задач по курсу “Нелинейная радиофизика” представляет собой первую и удачную попытку подготовки учебника по данной дисциплине. Он охватывает все основные разделы современной радиофизики. Сборник написан на высоком методическом уровне. В начале каждого раздела сжато даются основные положения теории и примеры решения типовых задач, а затем предлагаются задачи для самостоятельного решения. В конце сборника приведены ответы на задачи и некоторые справочные материалы. Следует добавить, что почти все задачи – оригинальные. Это является большой заслугой авторов. Несколько слов об авторах.

О. В. Лазоренко – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой общей физики, профессор кафедры высшей математики ХНУ имени В. Н. Каразина, академик АН Прикладной радиоэлектроники Беларуси, России, Украины – имеет большой опыт проведения практических занятий по курсу “Нелинейная радиофизика”, в последние годы на физическом факультете ХНУ имени В. Н. Каразина преподает курс “Нелинейная физика”.

Л. Ф. Черногор – доктор физико-математических наук, профессор, академик АН Высшего образования Украины, академик АН Прикладной радиоэлектроники Беларуси, России, Украины, лауреат Государственной премии УССР, дважды лауреат Премии СМ СССР, лауреат Премии МВССО СССР, Заслуженный профессор ХНУ имени В. Н. Каразина, Заслуженный деятель науки и техники Украины, Почетный профессор Харбинского инженерного университета (КНР) – является известным специалистом в области космической физики, нелинейной радиофизики, распространения радиоволн, дистанционного радиозондирования геокосмоса и физической экологии. По его инициативе в 1980-е гг. впервые в бывшем СССР (как и в дальнем зарубежье) на радиофизическом факультете Харьковского государственного университета поставлен курс “Нелинейная радиофизика”. Курс, завершающий радиофизическое образование, существенно расширяет его и способствует формированию нелинейного мышления, нелинейного подхода к процессам и эффектам.

Учебное пособие будет весьма полезным при подготовке новых поколений специалистов для работы на переднем крае науки.

Научный редактор
академик НАН Украины

В. М. Яковенко



ВВЕДЕНИЕ

При подготовке сборника задач учитывался опыт чтения Л. Ф. Черногором курса “Нелинейная радиофизика” объемом 32 часа и проведения авторами практических занятий объемом 48 часов на радиофизическом факультете (в настоящее время факультет радиофизики, биомедицинской электроники и компьютерных систем), начиная с 1980-х гг. Каждый раздел состоит из краткого перечня основных понятий и соотношений, полезных при решении задач, примеров решения типовых задач, а также задач для самостоятельного решения с ответами. Составители сборника надеялись, что такая структура разделов способствует обучению самостоятельному решению задач, развивает навыки практического применения знаний, полученных в лекционном курсе. Ввиду малого объема практических занятий не все разделы курса нашли отражение в сборнике. Обозначения в данном сборнике соответствуют используемым в лекционном курсе.

Первое издание сборника вышло в 1994 г. Второе, третье, четвертое и пятое издания – исправленные и дополненные – в 1998, 2008, 2018 и 2019 гг. соответственно.

В настоящем, шестом, издании исправлены замеченные опечатки.



Глава 1. КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕЛИНЕЙНОСТИ, ОСНОВНЫХ ЯВЛЕНИЙ И МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЗИКИ

Физика была бы скучна, а жизнь совершенно невозможна, если бы все физические явления вокруг нас были линейными. К счастью, мы живем в нелинейном мире, и если линеаризация украшает физику, то нелинейность делает ее захватывающей.

Профессор И. Р. Шен

1.1. Нелинейность – универсальное фундаментальное и главное свойство мира

1.1.1. Вводные сведения

Как родилась и эволюционирует наша Вселенная? Почему кольца Сатурна такие тонкие, но протяженные? Почему активность Солнца изменяется периодически с периодом около 11 лет? Что вызвало гибель динозавров? Отчего нас так пугают ослепительные вспышки молний, оглушительные удары грома, неистовые землетрясения, разбушевавшиеся вулканы? Отчего во время шторма возникает “девятый вал”? Почему цунами – столь грозная стихия? Почему рельеф снежных заносов волнистый? Почему у ягуара тело пятнистое, а хвост полосатый? И что объединяет эти совершенно не связанные между собой явления? Оказывается все они – результат нелинейности.

1.1.2. О линейном мышлении и линейном мировидении

Расстояние до ближайшей звезды составляет четыре световых года (а не столько-то километров). Для выполнения заданного объема работ потребуется

сколько-то человеко-дней. Чем больше (в других случаях, чем меньше) – тем лучше. Целое состоит из частей. Что общего в этих высказываниях? Общим является то, что равным изменениям одной (независимой) величины обязательно соответствуют равные изменения другой (зависимой) величины. Такое поведение описывается линейной зависимостью. Такой способ мышления относится к линейному. Такое мировидение именуется линейным. Линейное мировидение свойственно человеку. Оно наглядное, оно соответствует “здравому смыслу”.

Линейность предполагает простую пропорциональность, график линейной функции – прямая линия. Многие явления в природе подчиняются такой закономерности. Во сколько раз изменен параметр какого-либо воздействия, во столько же раз изменяется результат воздействия.

Линейность предполагает выполнение принципа суперпозиции (наложения, сложения). В этом смысле линейность – категория конструктивная. Зная результат действия каждой из двух (или многих) сил на тело заданной массы и пользуясь принципом суперпозиции, можно ответить на вопрос: “Как будет двигаться это же тело под действием суммарной силы?”. Это же можно сказать и о действии суммарного электрического или магнитного полей. Примеры можно продолжить.

В природе встречаются линейные процессы, линейные закономерности и линейные зависимости. Как теперь стало понятно, линейные закономерности скорее исключение. Природа оказалась сложнее. Чаще всего ее не удастся удовлетворительно описать в рамках линейного подхода, линейного мышления и линейного мировидения.

1.1.3. Азы из математики

Понятие нелинейности в науку пришло из математики. Если в математическом уравнении искомые величины (функции, их производные и т. д.) входят в первой степени, такое уравнение называется линейным. Во всех остальных случаях мы имеем дело с нелинейными уравнениями.

Еще на заре цивилизации научились решать линейное уравнение. Квадратное уравнение удалось решить в древнем Египте и в древнем Вавилоне. Только в средние века итальянцы решили сначала уравнение третьей степени (Н. Тарталья), а затем и уравнение четвертой степени (Л. Ферари).

В XVII – XVIII веках сформировались основные понятия о свойствах нелинейных функций. В дальнейшем число достижений математиков увеличивалось как снежный ком. Чаще всего методы анализа нелинейных систем и методы решения модельных уравнений разрабатывались применительно к решению практических задач механики, физики и естествознания в целом.

Хорошо известно, что линейное уравнение имеет один корень. Уравнения второй, третьей и т. д. степеней имеют два, три и т. д. корня. Совсем простое нелинейное уравнение (например, $\operatorname{tg} x = x$) имеет бесчисленное множество решений. Последнее свойство нелинейных уравнений приобретает исключи-

тельную важность. Множеству решений соответствует множество путей эволюции нелинейной системы, т. е. такой системы, которая описывается нелинейными уравнениями. Одна и та же система может пойти по одному или качественно иному пути развития. Такое раздвоение “судьбы” системы проходят в точках бифуркаций (бифуркация по-латыни означает раздвоение). Само событие для краткости также именуют бифуркацией. По какому из путей пойдет нелинейная система “предсказывает” математическая теория – теория катастроф.

1.1.4. Знакомство с нелинейностью

Что же такое нелинейность? Нелинейность – это отрицание линейности, это ее противоположность. Категория нелинейности не обладает силой конструктивизма. Отрицая принцип суперпозиции, она ничего не предлагает взамен.

Нелинейность – понятие очень ёмкое, оно имеет множество оттенков и градаций. Нелинейный эффект – это эффект, описываемый нелинейной зависимостью, нелинейным уравнением. Нелинейная теория – это теория, в основе которой лежат нелинейные связи между объектами (а значит и нелинейные соотношения), которые она изучает.

Откуда возникает нелинейность? Всё многообразие причин нелинейности можно попытаться свести к двум случаям. В первом из них нелинейность является “врожденной”, т. е. следствием внутренних причин, которые отображаются нелинейными уравнениями, описывающими состояние достаточно сложной системы. Во втором случае нелинейность является “привнесенной”. Сюда относятся системы со значительным энергосодержанием и энерговыделением, высокоскоростные и высокотемпературные процессы, колебания и волны со значительной амплитудой и т. д. И тем, и другим системам свойственны процессы самовоздействия, обусловленные наличием своеобразной обратной связи.

Еще далеко не все осознали, что мы живем в нелинейном мире, в котором свои законы. И эти законы совсем не похожи на привычные линейные законы. Но даже среди тех, кто в той или иной степени знаком с нелинейностью нет единого мнения в том, что же представляет собой нелинейность. Одним кажется, что это просто лозунг. Тогда почему разные процессы в разных естественных науках (физике, химии, биологии и др.), а также в экономике, социологии, медицине, в технических приложениях описываются одинаковыми или сходными моделями? Почему эти модели предсказывают сходные конечные результаты? Да, аналогия есть, сходство есть – говорят другие. По их мнению, нелинейность – это совокупность нелинейных моделей. И не больше. Почему же нелинейные процессы вездесущи? Почему их несравненно больше, чем линейных? Не потому ли, что линейные процессы и модели лишь частный и крайне “небольшой” предельный случай нелинейных процессов и моделей? Чем больше мы изучаем нелинейные явления и процессы, тем больше понимаем, что нелинейность многолика, что нелинейность неисчерпаемо разнообразна. Нели-

нейность проявляется во всем: в связи простого и сложного, в большом и малом, в явлениях быстротечных и длящихся порядка времени существования Вселенной, переходах порядок – хаос и хаос – порядок и т.д. Все это позволяет утверждать, что нелинейность – универсальное, фундаментальное и главное свойство природы, свойство мира. Для всестороннего изучения этого свойства требуется современное нелинейное мышление, нелинейное мировидение.

1.1.5. Основные периоды эволюции представлений о нелинейности мира

Представления о нелинейности природы, нелинейности науки, описывающей природу, формировались постепенно. Условно можно выделить следующие периоды.

Натурфилософский период (XVII – XVIII веке). Естествоиспытатели впервые столкнулись с нелинейностью. Для них это была частная сложность в решении задач.

Классический период (XIX век). Были осознаны отдельные необычные свойства нелинейных явлений, были проведены первые наблюдения нелинейных процессов (и, прежде всего волнового типа), получены первые эталонные нелинейные уравнения и их точные решения, разработаны приближённые методы анализа некоторых нелинейных задач физики, опирающиеся в основном на метод возмущений.

В течение этого периода нелинейные задачи в различных областях представлялись специфическими и, как правило, каждая задача решалась своим методом. Нелинейность обычно предполагалась малой.

Новый период (первая половина XX век). В основном была завершена разработка теории нелинейных колебаний. Было осознано, что многие практические задачи являются нелинейными. Без их решения было невозможным создание новых технологий. Начал формироваться нелинейный язык, зародилось нелинейное мышление, появились первые школы “нелинейных физиков”. Было высказано мнение, что “будущие физические теории” будут нелинейными. Вплотную подошли к использованию простейших компьютеров для решения нелинейных задач. С их помощью получены первые нетривиальные результаты. В целом нелинейность всё еще воспринималась как частная характеристика объектов.

Современный период (вторая половина XX век – начало XXI века). Интенсивно исследовались и исследуются нелинейные явления в различных науках, к которым относятся естественные, экологические, технические, экономические, социальные и др. Компьютеры в численных экспериментах позволили выявить ряд нетривиальных и поистине потрясающих закономерностей нелинейного мира, выходящих далеко за рамки линейной интуиции и линейного мировидения. Возникли междисциплинарные системы знаний – детерминированный хаос и синергетика.

Наблюдались революционные изменения в представлениях о нелинейности мира. Произошло философское осмысление представлений о нелинейности мира. Сформулированы основные положения системной парадигмы. Стало понятным, что нелинейность – универсальное и фундаментальное свойство мира. Это свойство – всеобщее, оно более объемное, более разнообразное, чем свойства нелинейных колебательных и волновых процессов, чем свойства детерминированного хаоса или самоорганизации, чем те другие свойства, через которые нелинейность проявляется.

Автору [5, 58, 59] удалось сформулировать следующие далеко идущие утверждения. Понятие нелинейности столь же фундаментально, сколь фундаментально понятие материи, понятие движения (эволюции) материи. Сама материя в общем случае должна рассматриваться как нелинейная система. Вообще говоря, нелинейным является и движение материи. И материя, и её эволюция описываются нелинейными соотношениями, которые отражают нетривиальные процессы в движущейся материи.

У автора [5, 58, 59] появились веские основания для вывода о том, что нелинейность – главное свойство мира. Именно она управляет эволюцией мира.

1.1.6. Примеры нелинейных явлений

Многоликость нелинейности. Чаще всего нелинейность – внутреннее свойство объектов и процессов – связана с большим энергосодержанием, значительным энерговыделением, высокими скоростями и температурами и т. п. Поэтому не вызывает никаких сомнений, что Большой взрыв, рождение, жизнь и смерть галактик и звезд – это нелинейные процессы (рис. 1.1, 1.2, 1.3). Солнечная система является нелинейной, что вызвано, в частности, нелинейной зависимостью силы всемирного тяготения от расстояния. Как правило, нелинейными являются процессы на Солнце и на планетах, а также внутри их (рис. 1.3, 1.4, 1.5). Большинство процессов на Земле, внутри ее и во внешних оболочках – также нелинейные. Сюда относятся землетрясения, цунами, вулканизм, вихри в атмосфере и океане, процессы в ионосфере и магнитосфере (рис. 1.6, 1.7, 1.8, 1.9). Процессы горообразования, формирование рельефа, океанообразование – нелинейные. Нелинейные также такие явления, как молниевые разряды, падения метеоритов, а тем более комет и астероидов (рис. 1.10, 1.11, 1.12). Процессы, отвечающие за формирование погоды и климата, обычно нелинейные (рис. 1.13, 1.14, 1.15, 1.16). Примеров существует очень много. Как правило, все катастрофические явления природы относятся к нелинейным. Разумеется, нелинейными есть и рукотворные катастрофы (рис. 1.17, 1.18).

А как обстоит дело с нелинейностью в микромире? Оказывается, она не обошла, не “обделила” его своим вниманием. Рождение, превращение, взаимодействие частиц в микромире представляют собой нелинейные процессы.



Рис. 1.1. Большой взрыв, породивший Вселенную – самое грандиозное нелинейное явление (модель)



Рис. 1.2. Взрыв звезды – сверхвысокоэнергичное нелинейное явление в космосе.



Рис. 1.3. Вспышка на Солнце – сильнейшее нелинейное явление в Солнечной системе

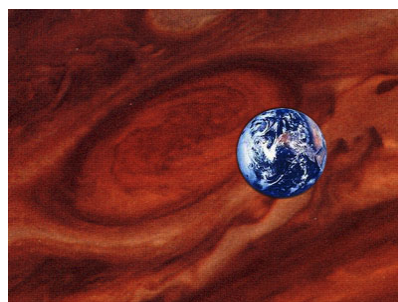


Рис. 1.4. Большое Красное Пятно в атмосфере Юпитера – самый большой нелинейный вихрь (циклон) в Солнечной системе (рис. слева). Под ним находится Белое Пятно – несколько меньший вихрь. Сопоставление размеров Большого Красного Пятна и диаметра Земли (рис. справа)



Рис. 1.5. Последовательные стадии падения обломков кометы Шумейкеров – Леви 9 на Юпитер 16 – 22 июля 1994 г. Эта сверхмощная бомбардировка привела к сильнейшим нелинейным эффектам в атмосфере и околопланетной космической среде.



Рис. 1.6. Мощное землетрясение – источник многих нелинейных явлений в литосфере, атмосфере и даже в геокосмосе. На рисунке видны глубокие трещины от Чуйского землетрясения.



Рис. 1.7. Цунами – катастрофическое нелинейное явление в океане (море). Высота уединенной волны у берега может достигать 50 метров, а скорость – 200 м/с.



Рис. 1.8. Извержение вулкана – источник сильнейших нелинейных явлений в литосфере, атмосфере и геокосмосе.



Рис. 1.9. Нелинейный вихрь в океане



Рис. 1.10. Разряды молнии сопровождаются целым комплексом нелинейных явлений в атмосфере и даже в геокосмосе



Рис. 1.11. Падение обломков крупного метеорита или астероида вызывает сильнейшие нелинейные явления во всех земных оболочках и геополях (модель).



Рис. 1.12. Кратер Бэрринджера (штат Аризона, США) – свидетель нелинейных явлений, обусловленных падением астероида в доисторические времена.



Рис. 1.13. Циклон – крупномасштабный нелинейный вихрь в атмосфере Земли.



Рис. 1.14. Торнадо (смерч) – пример среднемасштабного высокоэнергичного нелинейного явления в атмосфере



Рис. 1.15. Протяженная упорядоченная облачная структура над Украиной и Венгрией (вид с самолета) – результат сложных процессов в системе суша – атмосфера.
(Фото В. Г. Галушко.)



Рис. 1.16. Яркий пример самоорганизации в природе: полярное сияние, квазипериодически распределенное в пространстве, которое наблюдалось над Швецией 23 февраля 2016 г. (фото S. Skinner).



Рис. 1.17. Ядерный взрыв в атмосфере (вид с самолета, высота около 10 км) – источник целого комплекса нелинейных явлений во всех геооболочках.



Рис. 1.18. Атмосферный термоядерный взрыв вызывает целый комплекс нелинейных процессов во всех земных оболочках.

Таким образом, окружающий мир – нелинеен. Он описывается сложными нелинейными уравнениями, методы решения которых развиты значительно хуже, чем линейных. Часто приходится использовать линеаризацию, т. е. переход от нелинейного к приближенному и более простому линейному уравнению. Естественно, что при этом “с водой можно выплеснуть и ребенка”.

Нелинейный мир обладает удивительными свойствами, некоторые из них будут упомянуты ниже. В целом же надо отметить, что мы очень мало знаем о нелинейных явлениях природы, но еще меньше умеем их использовать.

С одним из красивейших проявлений нелинейного мира – солитоном – мы познакомимся ниже.

Солитон. Классическим примером солитона является бегущая одногорбая уединенная волна на воде. Наиболее яркий их представитель – цунами (см. рис. 1.7). Главной особенностью солитона является неизменность его профиля (т. е. вида, очертания) в процессе распространения. Как правило, это обусловлено притоком энергии извне. Поэтому такая волна имеет место в открытых системах. К тому же система должна быть нелинейной. Таким образом, солитон – нелинейная уединенная волна.

Термин солитон происходит от латинского слова “солус”, т. е. один, а окончание -тон подчеркивает, что объект по своим свойствам похож на частицу (протон, нейтрон и т. п.).

Впервые солитоны на воде описал в 1834 г. шотландский инженер и кораблестроитель Дж. С. Рассел. Вот как он изложил результаты своих наблюдений [42].

“Баржа неожиданно остановилась; но масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась. Вместо этого она собралась около носа судна в состоянии бешеного движения, затем неожиданно оставила его позади, катясь вперед с огромной скоростью и принимая форму большого одиночного возвышения, т. е. округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, нисколько не меняя своей формы и не снижая скорости. Я последовал за ним верхом, и когда я нагнал его, он по-прежнему катился вперед со скоростью приблизительно восемь или девять миль в час, сохранив свой первоначальный профиль возвышения длиной около тридцати футов и высотой от фута до фута с половиной. Его высота постепенно уменьшалась”.

Уменьшение высоты холма обусловлено тем, что солитон не подпитывался энергией. Солитон на воде использует только свою энергию. Но, тем не менее, он весьма устойчив. Почему? Дело в том, что в этом случае конкурируют два процесса. С одной стороны, явление дисперсии стремится “размазать” одногорбую волну вдоль направления ее распространения. С другой стороны, нелинейные явления “удерживают” ее от этого, и волна, двигаясь, сохраняет свою форму. Такой объект именуется классическим солитоном. Он – одномерный.

Чаще, как уже отмечалось, солитоны существуют благодаря притоку энергии, и поэтому их называют диссипативными.

Солитоны бывают двухмерными. К ним относится, например, циклон.

Оказалось, что солитон – вездесущ. Он имеет место в микромире, макромире и мегамире.

По современным представлениям элементарные частицы – это солитоноподобные объекты, или солитоны квантовых полей. К ним относится монополю Дирака – гипотетический элементарный магнит с одним полюсом.

Примеры солитонов из области макромира уже приводились. Следует добавить, что солитоны возникают при значительных энерговыделениях в литосфере, атмосфере, ионосфере и магнитосфере, т. е. при землетрясениях, извержениях вулканов, мощных взрывах, стартах и полетах ракет и т. д. “Родственником” солитона является шаровая молния.

Другим примером “родственника” является знаменитый “девятый вал” во время шторма на море. Вал, как известно, обычно образован семнадцатью уединенными волнами. Самая сильная из них – девятая, она же – центральная. Собственно солитоном является огибающая этого семейства из семнадцати волн.

Солитоноподобные объекты существуют в мегамире. К ним относятся Большое Красное Пятно в атмосфере Юпитера, черные дыры, спиральные галактические структуры и др. (см. рис. 1.4).

“Родственники” солитонов обнаруживаются и в мире живой природы. Их примером являются нервные импульсы.

Процессы со свойствами солитонов характерны для экономики и общества.

Таким образом, солитон – это не экзотическое образование, как считалось ранее. Он – проявление универсальных фундаментальных свойств природы. Понятие солитона существенно расширилось. Теперь к ним относят многие локализованные нелинейные структуры.

1.1.7. Порядок и хаос

Настало время ответить на вопрос: “Могут ли существовать детерминированный хаос, хаотический порядок?” Оказывается, могут. Первый также именуется динамическим хаосом, а второй называется самоорганизацией.

Общие сведения. Порядок и хаос эквивалентны устойчивости и неустойчивости динамической (т. е. изменяющейся во времени) системы. Природа устроена так, что не бывает ни абсолютного хаоса, ни абсолютного порядка. Реальная система, как правило, находится в некотором промежуточном состоянии.

Категория “хаос” отражает факт непредсказуемости поведения системы, а категория “порядок”, напротив, – ее предсказуемость.

Следует подчеркнуть, что детерминированный хаос – результат нелинейности и открытости системы – отличается от просто случайного процесса. В динамическом хаосе есть гармония, он значительно “красивее” обычного случайного процесса. Грубо говоря, детерминированный хаос – лишь отчасти хаотичный, а отчасти – детерминированный, он как бы находится посередине между порядком и хаосом.

Как же зарождались столь непривычные и противоречивые представления о динамическом хаосе?

Эволюция представлений о детерминированном хаосе. Математические основы описания детерминированного хаоса (неустойчивости решений дифференциальных уравнений) берут свое начало в работах профессора Харьковского университета А. М. Ляпунова и французского математика А. Пуанкаре, выполненных на рубеже XIX – XX веков. Первая математическая модель, описывающая такой хаос, была построена и численно исследована американским метеорологом Э. Лоренцом в 1963 г. Он впервые обнаружил неустойчивый характер поведения системы. В отсутствие случайных сил в детерминированной системе почему-то возникали хаотические процессы. Чем они вызываются? Оказалось, что главная причина появления хаоса – нелинейность системы. Еще одна причина состоит в том, что система – открытая, т. е. с притоком извне энергии (вещества, информации). Нелинейность приводит к бифуркации, т. е. к выбору пути эволюции, который и является случайным. Это означает, что две одинаковые системы спустя некоторое время оказываются в совершенно разных условиях. Иначе говоря, незначительно изменив начальное условие, удастся перевести систему в совсем другое состояние. Например, легкий взмах крыльев бабочки в Европе теоретически сможет вызвать обильный снегопад в летнее время на территории США. Такая сильная зависимость от исходных или начальных условий получила название “эффекта бабочки” (или баттерфляй-эффекта).

Динамику нелинейных систем удобно описывать при помощи траекторий в так называемом фазовом пространстве (в простейшем случае осями на фазовой плоскости является координата и скорость объекта исследования). В случае детерминированного хаоса набор траекторий образуют густое множество кривых, именуемых странным аттрактором (рис. 1.19).

В математическом плане подобными эффектами занимается уже упоминавшаяся теория катастроф.

Настоящий всплеск интереса к детерминированному хаосу наблюдается с 70-х гг. XX века, когда было обнаружено, что в простейших радиотехнических генераторах в отсутствие случайных внешних сил могут возникать хаотические колебания.

С тех пор проявления динамического хаоса были обнаружены во всех разделах современного естествознания. Например, появление хаоса не позволяет надежно прогнозировать погоду, климат, моменты наступления землетрясения или извержения вулкана и многое другое.

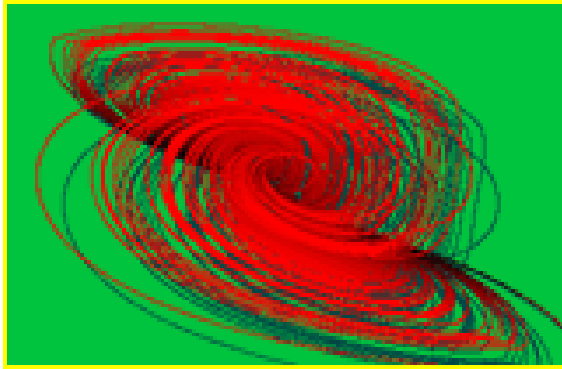


Рис. 1.19. Пример странного аттрактора – неперменного “спутника” эволюционирующей нелинейной системы, детерминированного хаоса.

Таким образом, возникновение хаоса в простых детерминированных, но непременно нелинейных и открытых системах – универсальное фундаментальное свойство природы, мира.

Хаотизация, деградация и самоорганизация. Может ли из беспорядка возникнуть порядок? Классическая физика на этот вопрос дает отрицательный ответ. Такой же ответ подсказывает нам повседневная жизнь: предоставленный самому себе огород быстро зарастает сорняками, дом без ремонта и ухода стареет и разваливается, разбитая рюмка потеряна безвозвратно, сожженный уголь превратился в тепло и дым. Примеры можно продолжать до бесконечности. Но посмотрим на природу с другой стороны. Почему же во Вселенной царит достаточно хорошо выраженный порядок, почему он наблюдается в Солнечной системе? Почему относительно упорядочены границы океанов и континентов? Почему существуют циклоны и антициклоны в атмосфере, ринги (вихри) в океанах? Ведь они – проявления порядка! Почему, наконец, на Земле зародилась жизнь, и появилось мыслящее существо – человек? Эти и другие вопросы, связанные с возникновением порядка из беспорядка, издавна волновали естествоиспытателей. Но ответ был получен лишь во второй половине XX века. И не сразу, а постепенно.

Формирование идеи самоорганизации. Под самоорганизацией понимается возникновение порядка из беспорядка.

Давно был замечен порядок во Вселенной, в Солнечной системе, обнаружен 11-летний цикл активности Солнца, открыты кольца Сатурна. В 1900 г. Г. Бенар описал возникновение упорядоченных структур на сковороде при нагреве масла в ней (рис. 1.20). Теперь их называют ячейками Бенара. Они представляют собой тесно прилегающие друг к другу шестиугольные образования (структуры). “Родственниками” ячеек являются облака почти правильной формы, которые располагаются на небе в шахматном порядке (см. рис. 1.15). И те, и другие возникают за счет притока тепла и последующей конвекции жидкости или газа. На рис. 1.16 показан еще один пример упорядоченности.

Хорошо известны явления возникновения волнового рельефа песка или снега под действием ветра, явление образования периодических ступенек в горных реках или в водосливах плотин (рис. 1.21).



Рис. 1.20. Упорядоченные шестиугольные структуры на дне сковородки (ячейки Бенара) – пример самоорганизации в лабораторных, точнее кухонных, условиях.



Рис. 1.21. Волнообразные структуры на песке – проявления самоорганизации.

Еще в середине XIX в. Г. Мендель открыл свои знаменитые законы. С незапамятных времен известно, что сердцебиение – упорядоченный процесс, что шкура у ягуара пятнистая, а хвост полосатый.

Примеры таких удивительных “подарков” природы можно продолжить. Но что в них общего? Общее оставалось незамеченным до появления классических работ химика Б. П. Белоусова. В 1951 г. он обнаружил, что в процессе химической реакции цвет раствора периодически менялся (красный – синий – красный). Это было открытие. Ведь до опытов Б. П. Белоусова считали, что химические реакции необратимы. И это верно, но только для закрытых систем и лишь вблизи состояния равновесия. Вдали от него процессы могут стать не только обратимыми, но и периодическими. Эта идея, как и всякая нетривиальная идея, утвердилась не сразу. Опыты Б. П. Белоусова были продолжены А. М. Жаботинским, а также повторены за рубежом. С тех пор реакция обрела статус классической и получила название реакции Белоусова – Жаботинского.

Подобные периодические процессы стали именоваться автоволнами. Они распространяются в активных средах, т. е. в средах с подпиткой, или в открытых системах. Несколько позже были обнаружены спиральные автоволны. Такие волны хорошо изучены в биофизике.

По-настоящему процессы самоорганизации были осмыслены лишь после создания основ неравновесной (нелинейной) термодинамики в 60 – 70-х гг. XX века. Ее родоначальником считается бельгийский физик И. Пригожин. С 1970-х гг. теория самоорганизации становится междисциплинарной системой знаний. Ее стали называть синергетикой, что в переводе с греческого означает “совместный”. В синергетике главная роль отводится совместным или кооперативным процессам.

Примеры самоорганизации. Выше уже были приведены примеры самоорганизации. Их круг непрерывно расширяется. Вот некоторые из них.

Цунами – упорядоченная волна при хаотических процессах, сопровождающих землетрясение (см. рис. 1.7). Волны-убийцы – внезапно возникающие гигантские волны в океане высотой, вероятно, до 50 метров (высота штормовых волн не превышает 14 м).

Шаровая молния – устойчивое образование, возникающее при некоторых грозах.

В приземных слоях атмосферы время от времени возникают облака достаточно правильной формы (рис. 1.15).

Полярные сияния, некоторые аномальные аэрокосмические явления и даже так называемые НЛО представляют собой упорядоченные структуры (см. рис. 1.16).

Большое Красное Пятно в атмосфере Юпитера – это гигантский упорядоченный, долгоживущий вихрь, напоминающий земной циклон (см. рис. 1.4).

Другим не менее ярким примером самоорганизации может служить Гексагон (шестиугольник) возле северного полюса в атмосфере Сатурна, обнаруженный в 1988 г. при помощи межпланетной космической станции «Вояджер» (рис. 1.22). Гексагон представляет собой гигантский атмосферный вихрь удивительной и до конца не объясненной формы диаметром около 32 тыс. км.

Скорее всего, благодаря самоорганизации возникла Солнечная система из некогда существовавшей хаотически разбросанной космической пыли.

Заметим, что возникновение биосферы и ее эволюция – лучшие доказательства проявлений законов синергетики. Например, пчелы, “совсем не зная” азов синергетики, прекрасно строят упорядоченные структуры – соты (рис. 1.23).

С. П. Капица показал, что население Земли также является самоорганизующейся системой.

Примеров, думается, достаточно. Можно сделать обобщение: процессы самоорганизации – вездесущи.

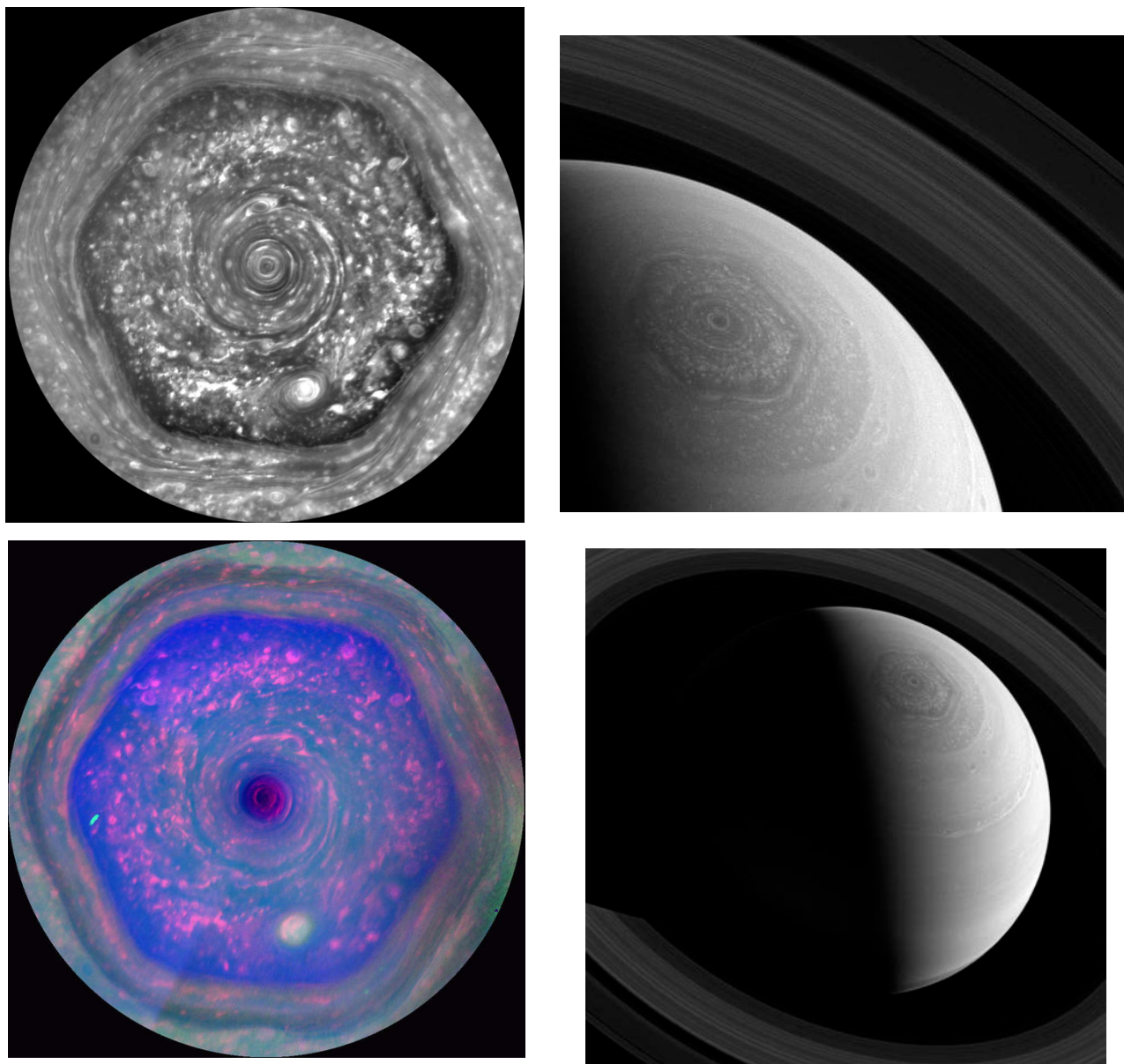


Рис. 1.22. Гексагон в атмосфере Сатурна.



Рис. 1.23. Упорядоченные структуры – результат действия нелинейных процессов в биосфере.

Условия возникновения самоорганизации. На поддержание порядка требуется затрачивать энергию. Для этого ее необходимо подвести к системе, где она должна рассеяться (диссипировать). Следовательно, система должна быть открытой и диссипативной.

В условиях беспорядка параметры системы флуктуируют, т. е. изменяются случайным образом. Флуктуации можно представить в виде большого (или бесконечного) набора простых волн – мод. И если среди этих волн находятся моды с быстро увеличивающейся амплитудой, то они и отбирают энергию у других мод. Обмен энергией возможен за счет нелинейного взаимодействия мод. Быстрорастущие моды обычно оказываются долгоживущими. Они подчиняют себе слабые моды. Так возникает упорядоченное поведение, так формируются образования, которые получили название структур. Благодаря упорядоченности эти структуры – когерентные.

Интересно, что переход от восприятия к мысли представляет собой процесс самоорганизации. Мысль – это когерентная структура, зарождающаяся в мозгу.

Таким образом, самоорганизация возможна только в открытых диссипативных нелинейных системах.

Теперь можно дать строгое определение синергетики. Синергетика – это теория самоорганизации нелинейных открытых диссипативных систем.

Важно, что детерминированный хаос также возникает только в нелинейных открытых диссипативных системах. Детерминированный хаос может привести к деградации (распаду) системы.

Следовательно, самоорганизация и хаотизация (деградация) – универсальные фундаментальные понятия в современной науке. Они представляют собой две реализации одного и того же процесса, два возможных пути эволюции. Не бывает ни абсолютного хаоса, ни абсолютного порядка. Реальная система обычно находится в некотором промежуточном состоянии.

1.1.8. Нелинейная парадигма

Парадигма – это система взглядов, исходных положений данной науки.

Основные положения нелинейной парадигмы были сформулированы одним из авторов (Л. Ф. Черногором) более четверти века тому назад и опубликованы в ряде работ. Эти положения излагаются при чтении общего курса “Нелинейная радиофизика” студентам радиофизикам Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина. Они сводятся к следующему (см., например, [4, 58 – 60]).

Окружающий нас мир, вообще говоря, – нелинеен, он описывается нелинейными уравнениями. Поэтому нелинейные явления в современной науке не исключение, а закономерность.

1. Нелинейность – универсальное, фундаментальное и главное свойство мира. Оно изначально присуще природе.
2. Материя – сверхсложная нелинейная система. Ее эволюция (движение) описывается нелинейными соотношениями.
3. Нелинейность – движущая сила направленной эволюции.

4. Нелинейная наука сложнее и богаче явлениями, чем линейная (или же линеаризованная) наука. Последняя представляет собой предел (и весьма “скромный”) нелинейной науки.
5. Нелинейное мировидение – более адекватное, оно более объёмное и более многообразное, чем линейное мировидение.
6. Сегодня мы еще очень мало знаем о многих удивительных свойствах нелинейного мира, но еще меньше умеем их использовать.
7. Возможность перехода нелинейной системы от порядка к хаосу и от хаоса к порядку – два важнейших свойства нелинейного мира.

1.1.9. Роль нелинейных явлений и их моделей

В формировании нелинейного мировидения неоценимую роль сыграли “веховые” наблюдения и эксперименты, а также “веховые” модели. Перечислим некоторые из них.

Без сомнения, к “веховым” наблюдениям следует отнести обнаружение уединенных волн, проявлений ударных волн в газах и жидкостях, ячеек Бенара, периодичности в химических реакциях, периодических колебаний числа хищников и их жертв, упорядоченных процессов в лазерах, хаотических колебаний в простых детерминированных системах и многое другое.

“Веховые” модели следует разделить на аналитические и компьютерные.

Определяющую роль сыграли эталонные нелинейные уравнения и их точные аналитические решения. Примерами таких уравнений являются уравнения Римана, Бюргерса, Кортевега – де Вриза, Кадомцева – Петвиашвили, нелинейное уравнение Шредингера и ряд других [1, 42]. Анализ решений эталонных уравнений позволил “прочувствовать” нетривиальность нелинейных процессов, их специфику, подойти к выработке нелинейной интуиции, заложить основы нелинейного мировидения.

Исключительная роль в формировании нелинейных представлений сыграли решения нелинейных задач на ЭВМ. “Веховыми” были проблема Ферми-Пасты-Улама (изучение колебаний нелинейной струны), исследование модели А. Тьюринга (моделирование явления морфогенеза), задача о взаимодействии уединённых волн (солитонов), изучение метеорологической модели Э. Лоренца, исследование процессов “обострения” при нелинейном нагреве вещества и многие другие. Компьютерное решение “веховых” нелинейных задач способствовало ускорению процесса выработки нелинейной интуиции и, в конечном итоге, нелинейного мировидения.

1.1.10. Основные особенности нелинейных систем и процессов

Нелинейные системы и протекающие в них процессы обладают рядом непривычных для линейного мировидения свойств. Рассмотрим их несколько подробнее (см. также [58 – 60]).

Свойство эмержентности (появляемости). Система не просто состоит из подсистем. Целое не равно сумме частей, оно качественно иное. У системы появляются свойства, отсутствующие в подсистемах. Благодаря этим свойствам, к примеру, может взорваться “правильно устроенная” атомная электростанция или начаться третья мировая и, конечно же, ракетно-ядерная война из-за нелинейных процессов (“сбоев”) в системах предупреждения о ракетном нападении, хотя “противник” и не собирался нападать. Непознанное свойство эмержентности для вновь созданной сложной, а значит и нелинейной системы, является опасным для человека, больших групп людей и даже всего человечества.

Свойство пороговости систем. При определенном диапазоне варьирования параметров нелинейной системы качественное изменение ее состояния не происходит. При достижении этими параметрами критического (порогового) значения состояние системы может качественно измениться. Это происходит в точках бифуркаций.

Свойство поливариантности эволюции. Это свойство связано с раздвоением траекторий в точках бифуркаций. Если точек бифуркаций много – возникает поливариантность эволюции нелинейных систем. Поливариантность не всегда приемлема. Особенно в жизни общества, страны и даже человечества. Вот почему выбор, к примеру, той или иной политической силы является исключительно важным.

Созидательная роль флуктуаций. Малые флуктуации в окрестности точек бифуркаций способны увести нелинейную систему по той или иной траектории, по тому или иному пути эволюции. Политическая воля одного человека может увести страну или группу стран совсем по другому пути развития. Как тут не вспомнить роль личности в истории – роль Наполеона, Гитлера, Сталина и им подобных.

Свойство дискретности путей эволюции. Это свойство связано с конечностью числа возможных траекторий, по которым может пойти развитие нелинейной системы. После развала СССР, например, каждая, вновь образовавшаяся суверенная страна, могла пойти по капиталистическому, некапиталистическому или какому-то еще пути развития.

Свойство необратимости нелинейной открытой системы. Это свойство также связано с ключевой ролью случайных флуктуаций вблизи точек бифуркаций, со случайностью выбора пути эволюции.

1.1.11. Особенности нелинейного мировидения

Перечислим кратко особенности нелинейного мировидения.

1. Нелинейная картина мира намного сложнее, более объёмная, более многогранная, чем линейная картина мира.
2. Нелинейность проявляется как универсальное и фундаментальное свойство мира. Скорее всего, это свойство – главное.

3. Нелинейность порождает нетривиальность гипотез, идей, результатов и следствий.
4. Реакция системы изменяется не пропорционально приложенному воздействию. Значительные усилия могут приводить к ничтожному результату. Кому не знакомо выражение “Все усилия уходят в песок”.

В других условиях слабые, но согласованные с системой воздействия приводят к самоускоряющейся ее эволюции. Возникает самораскачивающийся процесс, например, “экономическое чудо”, “деньги, умноженные на деньги” и т. п. Причиной такой эволюции есть нелинейность положительной обратной связи.

1. Самоорганизованность сложных нелинейных систем и процессов. В результате срабатывания многочисленных прямых и обратных, положительных и отрицательных связей между подсистемами развитие системы происходит самоорганизовано. Такой системе нельзя (не имеет смысла) навязывать свой “план развития”. Вот почему часто всякие новшества, реформы, революции бывают столь вредными. По этой причине медикаментозное “лечение” человека (живого организма) так часто оказывается бесполезным и даже небезопасным.
2. Если в линейных системах хаос неизбежно приводит к их деградации, в нелинейных системах хаос может играть созидательную роль.
3. Хаос может возникнуть в полностью детерминированных условиях.
4. Порядок и хаос, самоорганизация и деградация – две стороны “одной и той же медали”.
5. В сложных системах возможна поливариантность их эволюции.
6. В консервативных нелинейных системах без флуктуаций процессы обладают обратимостью и периодичностью. Периодическими могут быть процессы в открытых нелинейных системах.

1.1.12. Нелинейность в XXI в.

Термины “синергетика”, “динамический хаос” прочно вошли в обиход. За рубежом используется более емкий и адекватный термин “Nonlinear Science”. “Нелинейная наука” должна охватывать все существующее в природе разнообразие нелинейных процессов и нелинейных систем.

Для обмена научными знаниями проводились и проводятся “нелинейные” конференции.

С конца XX века издаётся журнал “Chaos”. В России с 2003 г. стал выходить журнал “Нелинейный мир”, в котором освещаются самые различные нелинейные процессы. Девизом этого журнала стали слова его главного редактора А. А. Потапова: “Мы все живем в сложном и удивительном нелинейном мире, пронизанном огромным числом отрицательных и положительных связей. При их учете уже не справедлив принцип суперпозиции, позволяющий полу-

чать решение сложных задач из решения более простых. Одной из принципиальных концепций науки становится теория самоорганизации, или синергетика.

Базовые модели нелинейной динамики позволяют более точно описывать явление Природы, по-новому взглянуть на развитие Науки, Общества, Человека”.

Совершенствуется и “нелинейное” образование. Курсы по нелинейной теории колебаний и волн давно стали традиционными (см., например, [3]). Читаются курсы по нелинейной оптике [9, 12, 62,63], нелинейной акустике, нелинейной физической механике, синергетике и т.д. С 80-х гг. прошлого века только в нашем университете читается общий курс “Нелинейная радиофизика”, главной целью которого является формирование у студентов нелинейного мышления и нелинейного мировоззрения. После выхода в 2004 г. из печати второго издания учебного пособия автора “Нелинейная радиофизика” [4] подобный курс введен в ряде университетов Украины, а также Грузии и России.

В Саратовском государственном университете (Россия) основан, по-видимому, первый в своем роде факультет нелинейных процессов. Появилась университетская специальность “Физика открытых нелинейных систем”.

В Сан-Диего (США) в составе университета Калифорнии функционирует институт нелинейных исследований.

Предпринимаются попытки ввести элементы нелинейности в среднее образование. Этой цели служит один из разделов учебного пособия автора “Естествознание. Интегрирующий курс”, четвертое издание которого вышло в 2007 г. [55].

Можно утверждать, что в XXI веке нелинейная наука находится на подъеме. Без сомнения, ей принадлежит будущее.

1.2. Общие сведения о нелинейной физике, ее методах и приложениях

В курсе изучаются основные явления нелинейной физики и радиофизики, методы их описания, а также возможные применения явлений (табл. 1.1, 1.2, 1.3).

Нелинейные явления в физике (см. табл. 1.1) не исключение, а закономерность. При наиболее общем подходе большинство физических процессов оказываются нелинейными. Линейная физика представляет собой своеобразный предел нелинейной физики. Поэтому последняя оказывается “богаче” линейной.

Нелинейные явления в физике начали изучаться еще в XIX веке. Такие задачи возникали в небесной механике, в гидро- и аэромеханике, а затем в теории относительности (начало XX-го века). Особенно богата нелинейными явлениями теория колебаний и волн.

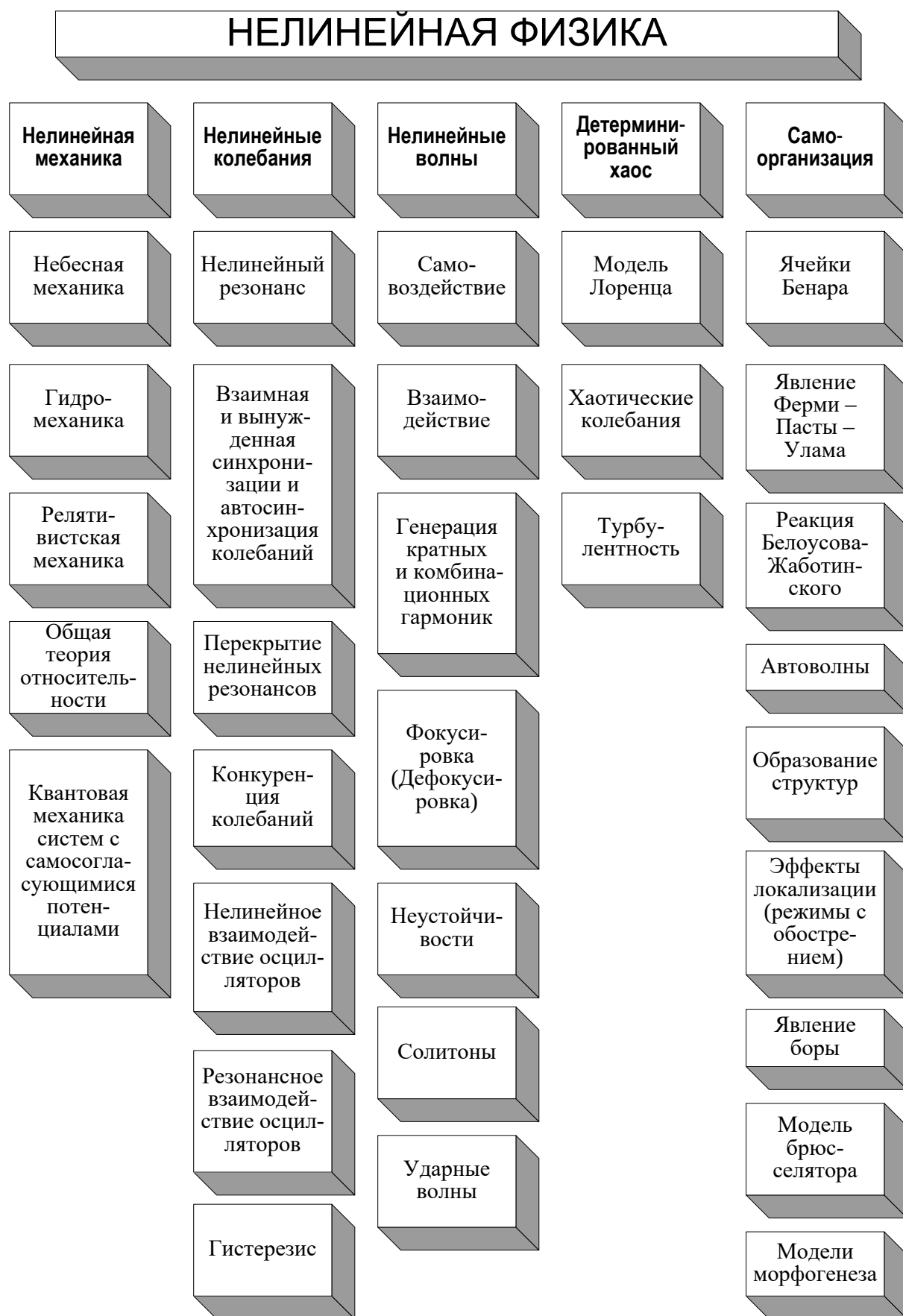


Таблица 1.1. Структура нелинейной физики.

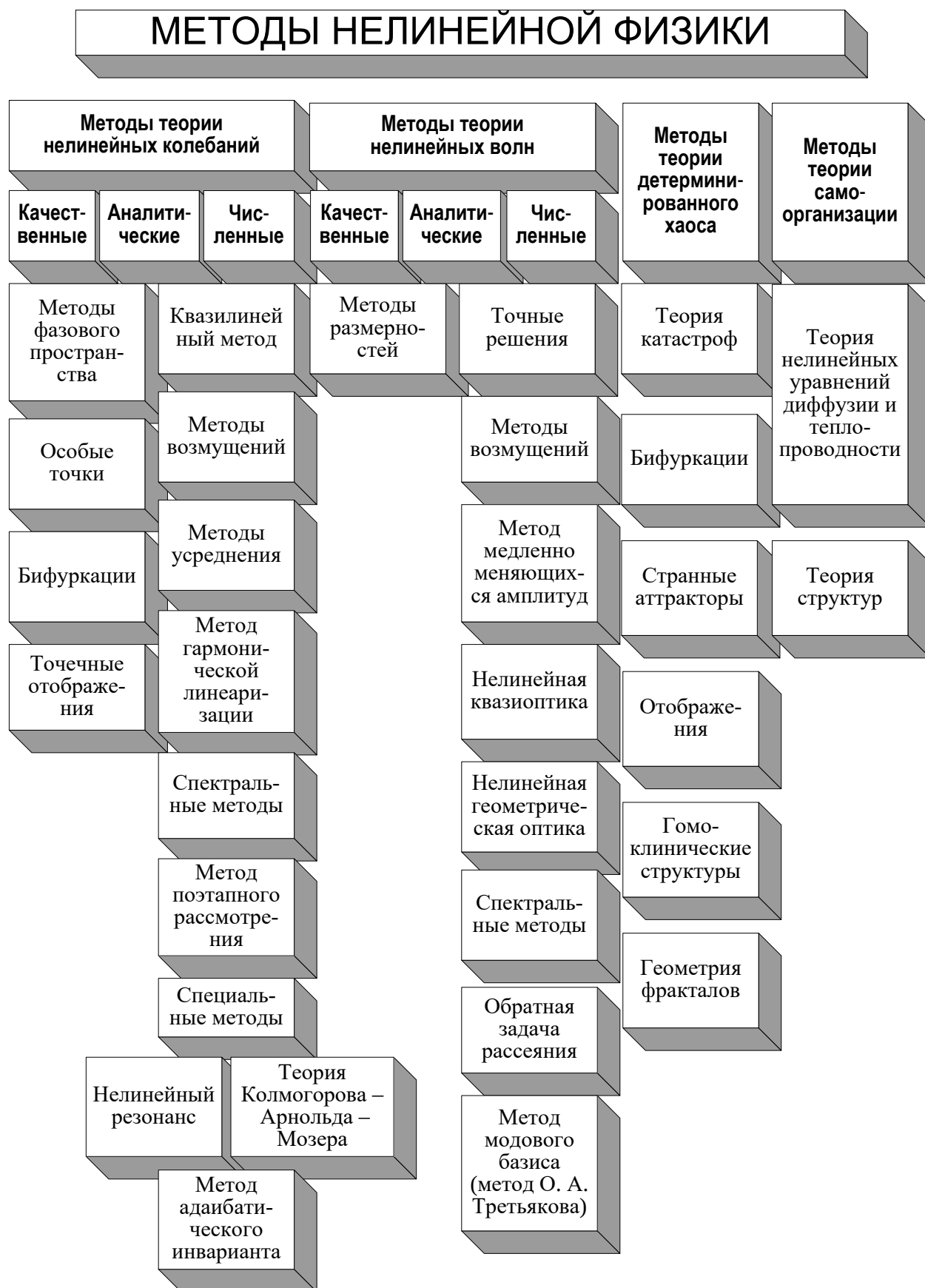


Таблица 1.2. Методы нелинейной физики.

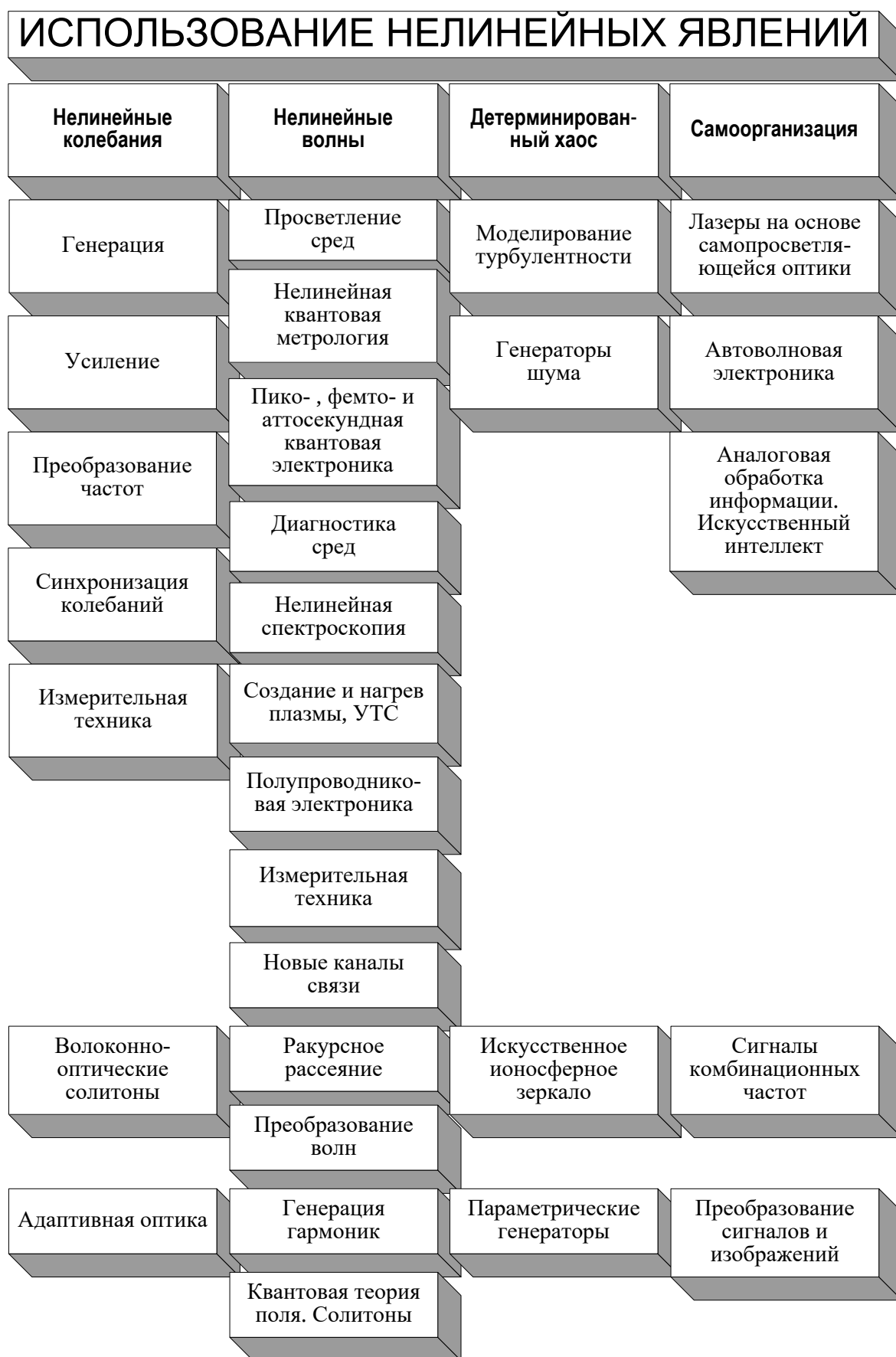


Таблица 1.3. Использование нелинейных явлений.

Во второй половине XX-го века нелинейные явления интенсивно изучаются во всех разделах физики и радиофизики. Значительное внимание уделяется изучению локализованных структур и нелинейных волн (солитонов), хаоса в простых детерминированных системах, явлений самоорганизации, т. е. возникновения порядка из хаоса.

Разработаны методы нелинейной физики (см. табл. 1.2), “нелинейный язык”, которые часто оказываются общими при решении задач в различных разделах физики. Ряд нелинейных явлений (см. табл. 1.3) уже широко используется на практике. В целом же мы пока очень мало знаем о нелинейных явлениях, но еще меньше умеем их использовать.

1.3. Основные положения нелинейной парадигмы

1. Процесс формирования представлений о нелинейности мира и науки, его описывающей, был долог и труден. Он завершился подготовкой предпосылок для формулировки основных положений нелинейной парадигмы.

2. Осознание роли и места нелинейности в современной научной картине мира привело к новой – нелинейной – парадигме, к смене способа мышления, методологии науки и мировидения в целом.

3. Нелинейность – универсальное и фундаментальное свойство мира. Это свойство – всеобщее, оно более объёмное, более разнообразное, чем свойства нелинейных колебательных и волновых процессов, чем свойства детерминированного хаоса или самоорганизации, чем многие другие свойства, через которые нелинейность проявляется. Не следует, поэтому, отождествлять (как это делают многие философы) самоорганизацию или синергетику с нелинейностью.

4. Нелинейность заставила пересмотреть взгляды на детерминизм и случайность, порядок и хаос, самоорганизацию и деградацию, на возможность прогноза поведения сложных нелинейных систем.

5. Понятие нелинейности столь же фундаментально, сколь фундаментально понятие материи, понятие движения (эволюции) материи. В общем случае сама материя должна рассматриваться как сверхсложная нелинейная система. Вообще говоря, движение (эволюция) материи также описывается нелинейными законами.

6. Нелинейность соотношений отражает факт нетривиальности процессов в движущейся материи.

7. Нелинейность удивляет исследователя необычностью и глубиной гипотез, идей, результатов и следствий.

8. Нелинейность – главное свойство мира, так как она управляет процессом эволюции мира.



Глава 2. МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

2.1. Основные понятия и соотношения

Нелинейные явления в радиофизике (электродинамике) обычно связаны со *значительной амплитудой* колебаний или распространением *сильных* электромагнитных волн в средах. Лишь в очень небольшом числе задач нелинейной электродинамики удастся найти *точное* аналитическое решение. К ним относится задача о распространении сильной плоской волны в изотропной, недиспергирующей, недиссипативной среде. Направляя векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ вдоль осей y и z соответственно, запишем роторные уравнения Максвелла в виде:

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad (2.2)$$

где $\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{dD}{dE} \frac{\partial E}{\partial t} \equiv \varepsilon_a(E) \frac{\partial E}{\partial t}$, $H = H(E)$, $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$, $B = \mu_0 H$, ε — относительная диэлектрическая проницаемость, ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные.

Нетривиальное решение системы существует при условии, что

$$\begin{vmatrix} \frac{dH}{dE} & \varepsilon_a \\ 1 & \mu_0 \frac{dH}{dE} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$H = \pm \int_0^E \sqrt{\frac{\varepsilon_a(E)}{\mu_0}} dE. \quad (2.3)$$

Тогда для E имеем следующее уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial x} \pm \frac{\sqrt{\varepsilon(E)}}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}.$$

Решая его методом характеристик, получим:

$$x = \pm \frac{ct}{\sqrt{\varepsilon}} + C(E),$$

где $C(E)$ – произвольная функция. Введем функцию f , обратную функции C . Тогда

$$E(x, t) = f\left(x \mp \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(E)}} t\right). \quad (2.4)$$

Фазовая скорость волны зависит от E :

$$u(E) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(E)}}. \quad (2.5)$$

С этим связан эффект *укручения* профиля волны.

Рассмотрим далее приближенные методы нелинейной электродинамики. Они обычно связаны с введением различных *малых параметров*.

Метод *малых возмущений* предполагает, что амплитуда волны E намного меньше характерного поля E_x , тогда малым параметром является $\mu = |E| / E_x$. Решение уравнений нелинейной электродинамики ищут в виде ряда по степеням μ . Приравнивая члены при одинаковых степенях μ , получают бесконечную цепочку уравнений, в которой первое уравнение решается независимо от остальных, затем второе и т. д.

В методе *медленно меняющихся амплитуд (ММА)* считается, что относительные изменения амплитуды волны на расстояниях порядка длины волны λ (а в нестационарных задачах и за время порядка периода поля) малы. Решение ищется в виде:

$$E(x) = \tilde{A}(\mu x) e^{-ikx},$$

где

$$\mu = \lambda \left| \frac{\nabla \tilde{A}}{\tilde{A}} \right| \ll 1,$$

$\tilde{A}$ – комплексная амплитуда, точнее огибающая.

Вместо волнового уравнения получают приближенное соотношение для амплитуды $\tilde{A}$, которое называют *укороченным уравнением*. При наличии только затухания укороченное уравнение для амплитуды имеет вид:

$$\frac{dA}{dx} + \alpha(A)A = 0, \quad (2.6)$$

где α – коэффициент затухания (поглощения).

Метод *нелинейной квазиоптики* (НК) является обобщением ММА на многомерный случай и описывает распространение пучков волн. Решение ищется в виде:

$$E = \tilde{A}(\mu x, \sqrt{\mu}y, \sqrt{\mu}z)e^{-ikz}.$$

Для комплексной амплитуды $\tilde{A}(x, y, z)$ имеем следующее уравнение:

$$2ik \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} = \Delta_{\perp} \tilde{A} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_{\text{нл}}(|\tilde{A}|) \tilde{A}, \quad (2.7)$$

где $\varepsilon_{\text{нл}} = \varepsilon - \varepsilon_{\text{л}}$. Члены в правой части описывают дифракцию и нелинейную рефракцию. Если ввести эйконал ψ и действительную амплитуду в виде:

$$\tilde{A} = A e^{-ik\psi}.$$

то из (2.7) получим уравнения эйконала и переноса:

$$2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + (\nabla_{\perp} \psi)^2 = \frac{\varepsilon_{\text{нл}}(A)}{\varepsilon_{\text{л}}} + \frac{\nabla_{\perp}^2 A}{k^2 A}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \nabla_{\perp} A \nabla_{\perp} \psi + \frac{1}{2} A \nabla_{\perp}^2 \psi = 0. \quad (2.9)$$

В методе *нелинейной геометрической оптики* (НГО) $\lambda \rightarrow 0$, т.е. $k \rightarrow \infty$, и в правой части уравнения (2.8) исчезает последний член. В одномерном случае и в отсутствие поглощения уравнения НГО имеют вид:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{\text{нл}}(A_0)}{\varepsilon_{\text{л}}}; \quad A|_{x=0} = A_0,$$

отсюда

$$A(x) = A_0, \quad \psi = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\varepsilon_{\text{нл}}(A)}{\varepsilon_{\text{л}}} dx.$$

В однородной невозмущенной среде

$$\psi = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{\text{нл}}(A_0)}{\varepsilon_{\text{л}}} x.$$

Если ввести показатель преломления $n = n_0 + n_{\text{нл}} = (\varepsilon_{\text{л}} + \varepsilon_{\text{нл}})^{1/2}$, то при $|\varepsilon_{\text{нл}}| \ll \varepsilon_{\text{л}}$ эйконал и нелинейная добавка к фазе даются выражениями:

$$\psi = \int_0^x \frac{n_{\text{нл}}}{n_{\text{л}}} dx,$$

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} \int_0^z n_{\text{нл}} dz.$$

При распространении сильных электромагнитных волн в средах возникает комплекс явлений, объединяемых понятием *самовоздействие* волн. Амплитудное самовоздействие плоских волн описывается уравнением (2.6), решение которого имеет вид:

$$\int_{A_0}^A \frac{dA}{\alpha(A)A} = -x, \quad A|_{x=0} = A_0.$$

По определению множитель самовоздействия равен

$$P = \frac{A(x)}{A_0 e^{-k_0(x)}},$$

где

$$k_0(x) = \int_0^x \alpha_0 dx,$$

α_0 , k_0 – коэффициент поглощения и интегральный коэффициент поглощения в невозмущенной среде. В линейной теории $P = 1$, при $P < 1$ и $P > 1$ имеют место эффекты помутнения и просветления среды.

Нелинейная добавка к фазе за счет фазового самовоздействия дается выражением:

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} \int_0^x (n(A) - n_0) dx, \quad (2.10)$$

где n_0 – показатель преломления в линейной теории.

При распространении двух волн принцип суперпозиции нарушается и возникает *нелинейной взаимодействие* волн. Амплитудное и фазовое взаимодействия описываются такими соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dx} + \alpha_1(A_1, A_2)A_1 &= 0; & A_1|_{x=0} &= A_{10}, \\ \frac{dA_2}{dx} + \alpha_2(A_1, A_2)A_2 &= 0; & A_2|_{x=0} &= A_{20}, \\ \Delta\varphi_1 &= \frac{\omega_1}{c} \int_0^x (n_1(A_1, A_2) - n_{10}) dx_1, \\ \Delta\varphi_2 &= \frac{\omega_2}{c} \int_0^x (n_2(A_1, A_2) - n_{20}) dx. \end{aligned}$$

Множители амплитудного взаимодействия имеют вид:

$$P_1 = \frac{A_1}{A_{10}e^{-k_{10}}}, \quad P_2 = \frac{A_2}{A_{20}e^{-k_{20}}}, \quad k_{10} = \int_0^x \alpha_{10} dx, \quad k_{20} = \int_0^x \alpha_{20} dx.$$

В линейной теории $P_{1,2} = 1$, если же $P_{1,2} < 1$ или $P_{1,2} > 1$, то имеют место эффекты *помутнения* и *просветления* среды.

В цилиндрической системе координат уравнение (2.8) имеет вид:

$$2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 = \frac{\varepsilon_{\text{нл}}(A)}{\varepsilon_{\text{л}}} + \frac{1}{k^2 A} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right). \quad (2.11)$$

Качественные результаты, справедливые по порядку величины, можно получить, не решая уравнения. Для этого можно воспользоваться методом *оценки производных*. Покажем это на примере уравнения (2.11). Сначала введем угол

$$\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

который образует волновой вектор (луч) с осью x , продифференцируем (2.11) по r и получим:

$$2 \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{\varepsilon_{\text{л}}} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{k^2 A} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) \right].$$

Скорость изменения угла наклона луча в направлении, перпендикулярном направлению распространения, описывается членом $\frac{\partial \theta}{\partial r}$. Полагая, что толщина пучка волн равна r_0 , максимальное значение амплитуды волны на оси пучка A_0 , отклонение луча за счет дифракции $\theta_{\text{д}}$ и *нелинейной рефракции* $\theta_{\text{нл}}$, получим для этих случаев

$$\left| \frac{\partial \theta}{\partial r} \right| \sim \frac{\theta_{\text{д}}}{r_0}, \quad \left| \frac{\partial \theta}{\partial r} \right| \sim \frac{\theta_{\text{нл}}}{r_0}.$$

Аналогично

$$\left| \frac{\partial A}{\partial r} \right| \sim \frac{A_0}{r_0}, \quad \left| \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \right| \sim \frac{A_0}{r_0^2}.$$

Тогда “дифракционная сила” описывается выражением:

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{k^2 A} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right] \right| \sim \frac{A_0}{A_0 k^2 r_0^3} \sim \frac{1}{k^2 r_0^3}.$$

Для “рефракционной силы” имеем:

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{\varepsilon_{\text{л}}} \right) \right| \sim \frac{1}{r_0} \frac{|\varepsilon_{\text{нл}}|}{\varepsilon_{\text{л}}}.$$

Тогда искривления лучей за счет дифракции и рефракции по порядку величины равны:

$$\theta_d \sim \left(\frac{1}{k^2 r_0^2} \right)^{1/2}, \quad |\theta_{\text{нл}}| \sim \left(\frac{|\varepsilon_{\text{нл}}|}{\varepsilon_{\text{л}}} \right)^{1/2}.$$

Важно, что $\theta_d > 0$, т. е. за счет дифракции пучок волн всегда уширяется. В то же время $\theta_{\text{нл}}$ может быть как положительным при $\varepsilon_{\text{нл}} < 0$ (эффект дефокусировки), так и отрицательным при $\varepsilon_{\text{нл}} > 0$ (эффект фокусировки). При $\theta_d = |\theta_{\text{нл}}|$ наступает эффект самоканалирования. Ширина пучка при распространении волны не изменяется, так как дифракционное уширение в точности скомпенсировано самофокусировкой пучка. Этот эффект наступает при условии:

$$\frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{\varepsilon_{\text{л}}} \sim \frac{1}{k^2 r_0^2}. \quad (2.12)$$

При фокусировке фокусное расстояние составляет

$$R_{\text{ф}} \approx \frac{r_0}{\theta_{\text{нл}}}.$$

2.2. Примеры

Пример 1

Считая среду изотропной, недиспергирующей и недиссипативной, получить точное решение нелинейных уравнений электродинамики, вычислить фазовую скорость u , E , H для $\varepsilon(E) = \varepsilon_{\text{л}} (1 + \alpha E)^4$. Считать, что до падения волны на среду (т. е. $x < 0, t < 0$)

$$\vec{E}(0) = \vec{E}_0 \cos k_0(x - ct). \quad (2.13)$$

Решение

Используя соотношения (2.3) – (2.5), получим:

$$\begin{aligned}
 H &= \pm \int_0^E \sqrt{\frac{\varepsilon_a(E)}{\mu_0}} dE = \pm \frac{\varepsilon_{\pi}^{1/2}}{\alpha \mu_0^{1/2}} \int_0^E (1 + \alpha E)^2 d(1 + \alpha E) = \\
 &= \pm \frac{\varepsilon_{\pi}^{1/2}}{3\alpha \mu_0^{1/2}} \left[(1 + \alpha E)^3 - 1 \right], \\
 u &= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(E)}} = \frac{c}{\varepsilon_{\pi}^{1/2}} (1 + \alpha E)^{-2}, \\
 E(x, t) &= f \left(x \mp \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(E)}} t \right).
 \end{aligned}$$

Вид функции f определяется с помощью начального и граничного условий. Решение должно быть непрерывным в каждой точке среды и вне ее, поэтому

$$E(x, t) = E_0 \cos k_0 \left(x - \frac{c}{\varepsilon_{\pi}^{1/2} (1 + \alpha E)^2} t \right).$$

Видно, что решение $E(x, t)$ получено в неявной форме, фазовая скорость волны u зависит от искомого решения. Именно в этом и состоит принципиальное отличие нелинейной волны от линейной.

Пример 2

Решить задачу об амплитудном самовоздействии волны при виде коэффициента поглощения $\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + aA^2}$, где $a = \text{const}$, A – амплитуда волны. Исследовать поведение решения в зависимости от величины и знака a . Сделать оценки эффекта при $|a| = A_0^{-2}$, где A_0 – амплитуда волны на границе среды.

Решение

Укороченное уравнение для амплитуды (2.6) в данном случае имеет вид:

$$\frac{dA}{dx} + \frac{\alpha_0 A}{1 + aA^2} = 0, \quad A(0) = A_0.$$

Такое уравнение решается методом разделения переменных:

$$\left(\frac{1 + aA^2}{A} \right) dA = -\alpha_0 dx.$$

Отсюда

$$\frac{dA}{A} + aAdA = -\alpha_0 dx,$$

$$\ln A + \frac{a}{2} A^2 = -k_0 + \ln C; \quad k_0 = \int_0^x \alpha_0 dx, \quad Ae^{\frac{aA^2}{2}} = Ce^{-k_0}.$$

С учетом граничного условия

$$C = A_0 e^{\frac{aA_0^2}{2}}.$$

Тогда

$$Ae^{\frac{aA^2}{2}} = A_0 e^{\frac{aA_0^2}{2}} e^{-k_0}.$$

В глубине среды $k_0 \gg 1$, $A \rightarrow 0$. Поэтому

$$A \approx A_0 e^{\frac{aA_0^2}{2}} e^{-k_0}.$$

Отсюда множитель амплитудного самовоздействия

$$P = \frac{A}{A_0 e^{-k_0}} = e^{\frac{aA_0^2}{2}}.$$

При $a > 0$ имеем $P > 1$, т. е. возникает эффект самопросветления среды, который тем больше, чем больше a . При $a < 0$ множитель $P < 1$ и величина эффекта помутнения возрастает с ростом $|a|$. При $a = 0$ множитель $P = 1$, т. е. распространение волны описывается линейной теорией.

Далее оценим P для заданных значений $|a|$.

Если $|a| = A_0^{-2}$, то $P = e^{1/2} \approx 1.65$ или $P = e^{-1/2} \approx 0.61$.

Пример 3

Вычислить множитель амплитудного взаимодействия сильной (1) и слабой (2) волн в глубине среды $P_{12} = \frac{A_2}{A_{20}} e^{k_{20}}$.

Ограничиться распространением обеих волн в одном направлении. Принять коэффициенты поглощения среды

$$\alpha_{1,2} = \frac{\alpha_{10,20}}{1 + a_{1,2}A_1^2}, \quad a_{1,2} = \text{const.}$$

Решение

Запишем укороченные уравнения (2.6) для волн 1 и 2 в виде

$$\frac{dA_1}{dx} + \frac{\alpha_{10}A_1}{1 + a_1A_1^2} = 0, \quad A_1(0) = A_{10}, \quad (2.14)$$

$$\frac{dA_2}{dx} + \frac{\alpha_{20}A_2}{1 + a_2A_1^2} = 0, \quad A_2(0) = A_{20}. \quad (2.15)$$

Разделим (2.14) на (2.15), предварительно перенеся вторые слагаемые в правую часть уравнений, и получим

$$\frac{dA_1}{dA_2} = \frac{\alpha_{10}A_1}{\alpha_{20}A_2} \frac{1 + a_2A_1^2}{1 + a_1A_1^2}$$

или же

$$\frac{dA_1}{A_1} \frac{1 + a_1A_1^2}{1 + a_2A_1^2} = \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}} \frac{dA_2}{A_2}.$$

Для интегрирования этого уравнения разложим дробь в левой части соотношения на простые множители:

$$\frac{1 + a_1A_1^2}{A_1(1 + a_2A_1^2)} = \frac{C_1}{A_1} + \frac{C_2A_1 + C_3}{1 + a_2A_1^2},$$

где $C_1 = 1$, $C_2 = a_1 - a_2$, $C_3 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dA_1}{A_1} + (a_1 - a_2) \int \frac{A_1 dA_1}{1 + a_2 A_1^2} &= \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}} \int \frac{dA_2}{A_2} + \ln C, \\ \ln A_1 + \frac{a_1 - a_2}{2a_2} \ln(1 + a_2 A_1^2) &= \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}} \ln A_2 + \ln C, \\ A_1(1 + a_2 A_1^2)^{\frac{a_1 - a_2}{2a_2}} &= C A_2^{\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}}}. \end{aligned}$$

С учетом граничных условий

$$\begin{aligned} C &= A_{10} A_{20}^{-\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}}} (1 + a_2 A_{10}^2)^{\frac{a_1 - a_2}{2a_2}}, \\ \left(\frac{A_1}{A_{10}} \right)^{\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}} \left(\frac{1 + a_1 A_1^2}{1 + a_2 A_{10}^2} \right)^{\frac{a_1 - a_2}{2a_2} \cdot \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}} &= \frac{A_2}{A_{20}}. \end{aligned}$$

Тогда множитель взаимодействия

$$P_{12} = \frac{A_2}{A_{20} e^{-k_{20}}} = \left(\frac{A_1}{A_{10}} \right)^{\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}} \left(\frac{1 + a_1 A_1^2}{1 + a_2 A_{10}^2} \right)^{\frac{a_1 - a_2}{2a_2} \cdot \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}} e^{k_{20}}.$$

В глубине среды, где $k_{10} \gg 1$, $A_1 \rightarrow 0$, имеем: $A_1(x) \approx A_{10} e^{\frac{a_1 A_{10}^2}{2} x} e^{-k_{10} x}$ (см. пример 2). Тогда

$$P_{12} = (1 + a_2 A_{10}^2)^{-\frac{a_1 - a_2}{2} \cdot \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}} e^{\frac{a_1 A_{10}^2}{2} \cdot \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} x - k_{10} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} x} e^{k_{20}}.$$

Так как $k_{10} = \alpha_{10} x$, то

$$k_{10} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} = \alpha_{20} x = k_{20}$$

и

$$P_{12} = (1 + a_2 A_{10})^{-\frac{a_1 - a_2}{2a_2} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} e^{\frac{a_1 A_{10}^2}{2} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}}}.$$

Исследуем предельные случаи.

1) Первая волна очень слабая, т. е. $A_{10} \rightarrow 0$. Тогда $P_{12} \rightarrow 1$ и, следовательно, взаимодействия нет.

2) Вторая волна совпадает с первой, т. е. речь идет только о самовоздействии, $a_1 = a_2$, $\alpha_{10} = \alpha_{20}$ и

$$P_{12} = (1 + a_2 A_{10})^0 e^{\frac{a_1 A_{10}^2}{2}} \equiv e^{\frac{a_1 A_{10}^2}{2}},$$

что полностью совпадает с результатом, полученным в предыдущем примере.

3) $a_2 > a_1 > 0$, $P_{12} > 1$, т. е. возникает просветление среды.

4) $a_2 < a_1 < 0$, $P_{12} < 1$, т. е. возникает помутнение среды.

Пример 4

Получить формулу для нелинейной добавки к фазе за счет фазового самовоздействия. Принять, что

$$n(A) = 1 + a_1 A, \quad \alpha(A) = \alpha_0(1 + a_2 A^2).$$

Оценить величину эффекта при $|a_1| = A_0^{-1}$, $|a_2| = A_0^{-2}$, где A_0 – амплитуда волны на границе, $a_2 > 0$.

Решение

Нелинейная добавка к фазе за счет фазового самовоздействия (2.10) имеет вид:

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} \int_0^x (n(A) - n_0) dx. \quad (2.16)$$

Укороченное уравнение для амплитуд (2.6) выглядит так:

$$\frac{dA}{dx} + \alpha(A)A = 0. \quad (2.17)$$

Считаем, что показатель преломления в линейной теории n_0 равен 1. Тогда, подставив (2.17) в (2.16), имеем:

$$\Delta\varphi = -\frac{\omega}{c} \int_{A_0}^A \frac{n(A) - 1}{\alpha(A)A} dA,$$

где $n(A) = 1 + a_1 A$; $\alpha(A) = \alpha_0(1 + a_2 A^2)$. Вычислим интеграл

$$\Delta\varphi = -\frac{\omega}{c} \int_{A_0}^A \frac{a_1 dA}{\alpha_0(1 + a_2 A^2)} = \frac{a_1 \omega}{\sqrt{a_2} \alpha_0 c} \left(\operatorname{arctg} A_0 \sqrt{a_2} - \operatorname{arctg} A \sqrt{a_2} \right).$$

Фазовый эффект максимален в глубине среды, где $A \rightarrow 0$, здесь $\Delta\varphi$ равно

$$\Delta\varphi_\infty \approx \frac{a_1 \omega}{\sqrt{a_2} \alpha_0 c} \operatorname{arctg} A_0 \sqrt{a_2}.$$

Добавим, что $\alpha_0^{-1} \equiv L_{\text{зат}}$ – глубина затухания. При $|a_1| = A_0^{-1}$, $|a_2| = A_0^{-2}$ имеем

$$\Delta\varphi_\infty \approx \pm \alpha_0^{-1} \frac{\omega}{c} \frac{\pi}{4}.$$

Тогда при $a_1 > 0$ величина

$$\Delta\varphi_\infty \approx \alpha_0^{-1} \frac{\omega}{c} \frac{\pi}{4},$$

при $a_1 < 0$ величина

$$\Delta\varphi_\infty \approx -\alpha_0^{-1} \frac{\omega}{c} \frac{\pi}{4}.$$

В обоих случаях $|\Delta\varphi_\infty| \sim \alpha_0^{-1} \frac{\omega}{c} \approx \frac{2\pi}{\alpha_0 \lambda}$, где λ – длина волны. Рассмотрим предельные случаи:

если $\alpha_0 \lambda \gg 1$, то $|\Delta\varphi_\infty| \ll 2\pi$, если $\alpha_0 \lambda \sim 1$, то $|\Delta\varphi_\infty| \sim 2\pi$,
 если $\alpha_0 \lambda \ll 1$, то $|\Delta\varphi_\infty| \gg 2\pi$.

Итак, если $\lambda \gg L_{\text{зат}}$, то волна затухает уже у границы среды и нелинейная добавка к фазе $|\Delta\varphi|$ мала; если же $\lambda \sim L_{\text{зат}}$, то $|\Delta\varphi_\infty| \sim 2\pi$. При $\lambda \gg L_{\text{зат}}$ волна слабо затухает и нелинейная добавка $|\Delta\varphi_\infty| \gg 2\pi$, т. е. весьма существенна.

Пример 5

Получить формулу для нелинейной добавки к фазе слабой волны (2) за счет взаимодействия ее с сильной волной (1) и проанализировать результат в глубине среды. Обе волны распространяются в одном направлении. Принять, что

$$n_2 = 1 + bA_1, \quad \alpha_1 = \alpha_{10}(1 + aA_1^2), \quad a > 0.$$

Для оценок использовать $a = A_{10}^{-2}$, $|b| = A_{10}^{-1}$.

Решение

Нелинейная добавка к фазе слабой волны (2.10) имеет вид:

$$\Delta\varphi_2 = \frac{\omega_2}{c} \int_0^x (n_2(A_1) - 1) dx.$$

Из укороченного уравнения для амплитуды сильной волны (2.6) следует, что

$$dx = -\frac{dA_1}{\alpha_1(A_1)A_1}.$$

Тогда

$$\Delta\varphi_2 = -\frac{\omega_2}{c} \int_{A_{10}}^{A_1} \frac{n_2(A_1) - 1}{\alpha_1(A_1)A_1} dA_1.$$

С учетом заданных $n_2(A_1)$ и $\alpha_1(A_1)$ получаем

$$\Delta\varphi_2 = -\frac{\omega_2 b_1}{c\alpha_{10}} \int_{A_{10}}^{A_1} \frac{dA_1}{1 + aA_1^2},$$

где $\alpha_{10}^{-1} \equiv L_{\text{зам}}$ – глубина затухания сильной волны. Проинтегрировав по A_1 , имеем:

$$\Delta\varphi_2 = \frac{\omega_2}{c} \frac{b}{\alpha_{10} \sqrt{a}} \left(\arctg A_{10} \sqrt{a} - \arctg A_1 \sqrt{a} \right).$$

В глубине среды, где $A_1 \rightarrow 0$, фазовый эффект максимален:

$$\Delta\varphi_{2\infty} \approx \frac{\omega_2}{c} \frac{b}{\alpha_{10} \sqrt{a}} \arctg A_{10} \sqrt{a}.$$

Если принять для оценок $a = A_{10}^{-2}$, $|b| = A_{10}^{-1}$, то

$$\Delta\varphi_{2\infty} \approx \pm \frac{\omega_2}{c} \frac{1}{\alpha_{10}} \frac{\pi}{4},$$

Тогда для $b > 0$ фазовый сдвиг $\Delta\varphi_{2\infty} \approx \frac{\omega_2}{c} \frac{1}{\alpha_{10}} \frac{\pi}{4}$,

для $b < 0$ величина $\Delta\varphi_{2\infty} \approx -\frac{\omega_2}{c} \frac{1}{\alpha_{10}} \frac{\pi}{4}$.

В обоих случаях

$$|\Delta\varphi_{2\infty}| \sim \frac{\omega_2}{c} \frac{1}{\alpha_{10}} \approx \frac{2\pi}{\lambda \alpha_{10}}, \quad \alpha_{10}^{-1} \equiv L_{\text{зам}}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что при $\lambda \gg L_{\text{зам}}$ сильная волна затухает уже вблизи границы среды и нелинейная добавка к фазе за счет взаимодействия $|\Delta\varphi_{2\infty}| \ll 2\pi$. При $\lambda \sim L_{\text{зам}}$ имеем $|\Delta\varphi_{2\infty}| \sim 2\pi$, а в случае $\lambda \ll L_{\text{зам}}$ сильная волна слабо затухает и фазовый эффект выражен существенно: $|\Delta\varphi_{2\infty}| \gg 2\pi$.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

2.1

Считая среду изотропной, недиспергирующей и недиссипативной, получить точное решение уравнений электродинамики, вычислить u , E и H для

$$\begin{aligned} \text{а) } \varepsilon(E) &= (1 + \alpha E)^2, \quad \text{б) } \vec{D} = \varepsilon_0 \int_0^E (1 + \alpha \vec{E}^2)^2 d\vec{E}. \\ \text{в) } \vec{D} &= \varepsilon_0 (\vec{E} + \alpha \vec{E}^3), \quad \text{г) } \varepsilon(E) = (1 + \alpha E). \end{aligned}$$

Считать, что до падения волны на среду ($x < 0$, $t < 0$)

$$\vec{E}(0) = \vec{E}_0 \cos k_0(x - ct).$$

2.2

Решить задачу об амплитудном самовоздействии волны при виде коэффициента поглощения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \alpha &= \frac{\alpha_0}{1 + aA}, \quad a = A_0^{-1}; \quad \text{б) } \alpha = \alpha_0(1 + aA), \quad a = A_0^{-1}; \\ \text{в) } \alpha &= \frac{\alpha_0}{1 + aA^3}, \quad a = A_0^{-3}; \quad \text{г) } \alpha = \frac{\alpha_0}{1 + aA + bA^2}, \quad a = A_0^{-1}; \quad b = A_0^{-2}, \end{aligned}$$

где A – амплитуда волны. Исследовать поведение решения в зависимости от величин и знаков a и b . Сделать оценки эффекта при заданных значениях a и b , где A_0 – амплитуда волны на границе.

2.3

Вычислить множитель амплитудного взаимодействия сильной (1) и слабой (2) волн в глубине среды:

$$P_{12} = \frac{A_2}{A_{2л}} = \frac{A_2}{A_{20}} e^{k_{20}}.$$

Ограничиться распространением обеих волн в одном направлении. Принять коэффициенты поглощения среды:

$$\begin{aligned} \text{а) } \alpha_{1,2} &= \frac{\alpha_{10,20}}{1 + aA_1}, \quad \text{б) } \alpha_{1,2} = \alpha_{10,20}(1 + aA_1), \\ \text{в) } \alpha_{1,2} &= \frac{\alpha_{10,20}}{1 + aA_1^3}, \quad \text{г) } \alpha_{1,2} = \alpha_{10,20}(1 + aA_1 + bA_1^2). \end{aligned}$$

2.4

Получить формулу для нелинейной добавки к фазе за счет фазового самовоздействия. Принять, что:

$$\begin{aligned} \text{а) } n(A) &= 1 + a_1A; \quad \alpha(A) = \frac{\alpha_0}{1 + a_2A}; \\ \text{б) } n(A) &= 1 + a_1A; \quad \alpha(A) = \alpha_0(1 + a_2A); \\ \text{в) } n(A) &= 1 + a_1A^2; \quad \alpha(A) = \frac{\alpha_0}{1 + a_2A}; \\ \text{г) } n(A) &= 1 + a_1A^2; \quad \alpha(A) = \frac{\alpha_0}{1 + a_2A^2}. \end{aligned}$$

Оценить величину эффекта при $|a_1| = A_0^{-1}$ (варианты а, б), $|a_1| = A_0^{-2}$ (варианты в, г), $|a_2| = A_0^{-1}$ (варианты а, б, в), $|a_2| = A_0^{-2}$ (вариант г), где A_0 – амплитуда волны на границе.

2.5

Получить формулу для нелинейной добавки к фазе слабой волны (2) за счет взаимодействия ее с сильной волной (1) и проанализировать результат. Обе волны распространяются в одном направлении. Принять следующие выражения для α_1 и n_2

$$\begin{aligned} \text{а) } \alpha_1 &= \alpha_{10}(1 + aA_1), \quad n_2 = 1 + bA_1, \\ \text{б) } \alpha_1 &= \alpha_{10}(1 + aA_1)^{-1}, \quad n_2 = 1 + bA_1, \\ \text{в) } \alpha_1 &= \alpha_{10}(1 + aA_1), \quad n_2 = 1 + bA_1^2, \\ \text{г) } \alpha_1 &= \alpha_{10}(1 + aA_1)^{-1}, \quad n_2 = 1 + bA_1^2. \end{aligned}$$

Для оценок использовать:

для вариантов а) и б) $|a| = |b| = A_{10}^{-1}$;

для вариантов в) и г) $|a| = A_{10}^{-1}$; $|b| = A_{10}^{-2}$.

Указание: ввести глубину затухания сильной волны в линейной теории $L_{10} = \alpha_{10}^{-1}$.

2.6

Уравнение эйконала для осесимметричного пучка в цилиндрической системе координат имеет вид

$$2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2 = \frac{\varepsilon_{нл}}{\varepsilon_l} + \frac{1}{k^2 A} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right).$$

Не решая уравнения, оценить углы нелинейной рефракции и дифракции, получить условие для возникновения эффекта самоканалирования.



Глава 3. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

3.1. Основные понятия и соотношения

Ударные волны (УВ) – это нелинейные стационарные волны, описывающие движение скачка какого-нибудь параметра волны или среды (плотности, давления и т. п.). Стационарность предполагает неизменность в процессе распространения, которая возникает в результате точной *компенсации* эффектов нелинейного укручения и диссипации. Профиль волны зависит только от “бегущей” координаты $\xi = x - ut$, где u – скорость волны. Эталонным уравнением, описывающим УВ, является *уравнение Бюргерса*:

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx}, \quad (3.1)$$

где ν – коэффициент вязкости.

Пользуясь методом оценки производных, можно определить скорость u и ширину фронта УВ ξ_0 . Переходя к ξ из (3.1), имеем:

$$-uv' + vv' = \nu v''. \quad (3.2)$$

Полагая, что разность скоростей v на $\pm\infty$ равна v_0 , получим, что

$$|v'| \sim \frac{v_0}{\xi_0}; \quad |v''| \sim \frac{v_0}{\xi_0^2}; \quad vv' \sim \frac{v_0^2}{\xi_0}.$$

Потребуем равенства по порядку величины первого и второго членов в (3.2), что т. е.

$$\left| -u \frac{v_0}{\xi_0} \right| \sim \left| \frac{v_0^2}{\xi_0} \right|,$$

откуда $u \sim v_0$. Аналогично из сравнения первого и третьего членов в (3.2) получим

$$\left| -u \frac{v_0}{\xi_0} \right| \sim \nu \frac{v_0}{\xi_0^2}.$$

$$\text{Отсюда } \xi_0 \sim \frac{\nu}{u}.$$

3.2. Примеры

Пример 1

Ударная волна описывается уравнением Бюргерса $v_t + vv_x = \nu v_{xx}$. Найти и проанализировать решение, если $v(-\infty) = v_2$; $v(+\infty) = v_1$; $v'(\pm\infty) = 0$; причем $v_1 < v_2$.

Решение

Введем переменную $\xi = x - ut$. Тогда

$$v_t \equiv \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -uv', \quad v_x \equiv \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dv}{d\xi} = v',$$

$$v_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\frac{dv}{d\xi} \right) = \frac{d^2 v}{d\xi^2} = v'',$$

и нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных превращается в дифференциальное уравнение, но уже в обыкновенных производных относительно функции $v(\xi)$:

$$-uv' + vv' = \nu v'',$$

$$v(-\infty) = v_2; v(+\infty) = v_1; v'(\pm\infty) = 0.$$

Выделим полную производную и проинтегрируем

$$-uv + \frac{1}{2}v^2 = \nu v' + C.$$

Используем граничные условия для определения неизвестных констант u и C :

$$\begin{cases} -uv_2 + \frac{1}{2}v_2^2 = C \\ -uv_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = C \end{cases}.$$

Отсюда $u = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$; $C = -\frac{1}{2}v_1v_2$. Тогда

$$2\nu v' = (v - v_1)(v - v_2).$$

Так как $v_2 \geq v \geq v_1$, то правая часть всегда неположительна, поэтому и $v' \leq 0$. Разделив переменные и проинтегрировав, получаем:

$$\frac{1}{v_2 - v_1} \ln \left| \frac{v - v_2}{v - v_1} \right| = \frac{\xi}{2\nu} + C_1.$$

Выбирая точку отсчета ξ , положим $C_1 = 0$. С учетом этого:

$$\left| \frac{v - v_2}{v - v_1} \right| = e^{\frac{\xi}{2\nu}(v_2 - v_1)}.$$

Легко убедиться, что $\frac{v - v_2}{v - v_1} < 0$. Поэтому окончательный вид решения

таков:

$$v(\xi) = \frac{v_1 e^{\xi/\xi_0} + v_2}{1 + e^{\xi/\xi_0}}, \quad \xi_0 = \frac{2\nu}{v_2 - v_1}.$$

Видно, что чем больше ν , тем более размытым будет фронт ударной волны.

Пример 2

Ударная волна описывается уравнением

$$v_t + 3\alpha v^2 v_x = \nu v_{xx}. \quad (3.3)$$

Найти и проанализировать решение, если

$$v(-\infty) = v_2; \quad v(+\infty) = v_1; \quad v'(\pm\infty) = 0.$$

Решение

Введем переменную $\xi = x - ut$. Тогда

$$\begin{aligned} v_t &\equiv \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -uv', \\ v_x &\equiv \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dv}{d\xi} = v', \\ v_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\frac{dv}{d\xi} \right) = \frac{dv^2}{d\xi^2} = v'', \end{aligned}$$

Уравнение (3.3) принимает вид

$$-uv' + 3\alpha v^2 v' = \nu v'', \quad v(-\infty) = v_2; \quad v(+\infty) = v_1; \quad v'(\pm\infty) = 0.$$

Выделим полную производную и проинтегрируем

$$\begin{aligned} \left(-uv + \alpha v^3 \right)' &= \left(\nu v' \right)', \\ -uv + \alpha v^3 &= \nu v' + C. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Используем граничные условия для определения неизвестных констант u и C :

$$\begin{cases} -uv_2 + \alpha v_2^3 = C, \\ -uv_1 + \alpha v_1^3 = C. \end{cases}$$

Отсюда $u = \alpha(v_2^2 + v_1 v_2 + v_1^2)$; $C = -\alpha v_1 v_2 (v_1 + v_2)$.

Тогда из (3.4) имеем

$$\frac{\nu}{\alpha} v' = (v - v_1)(v - v_{k1})(v - v_{k2}), \tag{3.5}$$

где

$$v_{k1} = -\frac{1}{2} \left(v_1 + \sqrt{v_1^2 + 4v_2(v_1 + v_2)} \right) < 0,$$

$$v_{k2} = -\frac{1}{2} \left(v_1 - \sqrt{v_1^2 + 4v_2(v_1 + v_2)} \right) > 0.$$

Можно заметить, что правая часть в (3.5) всегда меньше или равна 0, следовательно и $v' \leq 0$, а значит $v_2 > v_1$. Разделив переменные, проинтегрировав и положим константу интегрирования равной нулю, выбрав соответствующим образом точки отсчета по ξ , получаем:

$$\frac{(v - v_{k1})^{\frac{v_1 - v_{k2}}{v_{k2} - v_1}} (v_{k2} - v)}{(v - v_1)^{\frac{v_{k2} - v_{k1}}{v_1 - v_{k1}}}} = e^{\frac{\alpha \xi}{2v} (v_{k2} - v_{k1})^2}.$$

Разрешить такое уравнение относительно $v(\xi)$ при произвольном виде v_2 и v_1 не удастся. Положим $v_2 \gg v_1$. Тогда решение примет вид:

$$v(\xi) = \frac{v_1 + \sqrt{v_1^2 + (1 + \exp(-2\xi / \xi_0)) (v_2^2 \exp(-2\xi / \xi_0) - v_1^2)}}{1 + \exp(-2\xi / \xi_0)},$$

$$\xi_0 = \nu / 2v_2^2.$$

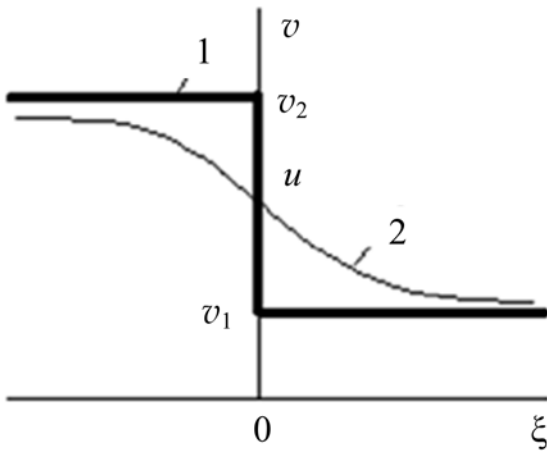


Рис. 3.1. Вид решения $v(\xi)$. На рисунке графику с более крутым профилем соответствует меньшее значение вязкости: 1 – $\xi_0 \rightarrow 0$; 2 – ξ_0 – конечное

Очевидно, что чем больше ν , тем более размытым становится фронт ударной волны.

3.3. Задачи для самостоятельного решения

3.1

Ударная волна описывается уравнением Бюргерса:

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx}.$$

Найти и проанализировать решение, если граничные условия имеют вид:

а) $v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut;$

б) $v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = \frac{1}{2}v_0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut;$

в) $v(+\infty) = 0, \quad v(-\infty) = v_0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut;$

г) $v(+\infty) = \frac{1}{2}v_0, \quad v(-\infty) = v_0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut.$

3.2

Ударная волна описывается уравнением:

$$v_t + 3\alpha v^2 v_x = \nu v_{xx}.$$

Найти и проанализировать решение, если граничные условия имеют вид:

а) $v(-\infty) = 2v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut;$

б) $v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut;$

в) $v(-\infty) = 2v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut;$

г) $v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut.$

3.3

Не решая уравнения Бюргерса

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx},$$

оценить скорость и ширину фронта ударной волны, используя метод оценки производных. Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad & v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut; \\
 \text{б)} \quad & v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = \frac{1}{2}v_0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut; \\
 \text{в)} \quad & v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut; \\
 \text{г)} \quad & v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = \frac{1}{2}v_0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut.
 \end{aligned}$$

3.4

Не решая уравнения для ударной волны с затуханием, оценить скорость, ширину фронта волны и глубину затухания, используя метод оценки производных:

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx} + \alpha v, \quad \alpha > 0.$$

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad & v(0) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut; \\
 \text{б)} \quad & v(0) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut; \\
 \text{в)} \quad & v(0) = v_0, \quad v(+\infty) = \frac{v_0}{2}, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut; \\
 \text{г)} \quad & v(0) = v_0, \quad v(+\infty) = \frac{v_0}{2}, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut.
 \end{aligned}$$

3.5

Не решая уравнения для ударных волн с затуханием:

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx} + \gamma v^2, \quad \gamma > 0.$$

оценить глубину затухания волны $L_{\text{зат}}$ и сравнить $L_{\text{зат}}$ с шириной фронта ξ_0 , если $v = v(\xi)$, $v(\xi = -\infty) = v_0$, $v(\xi = +\infty) = 0$.

3.6

Найти и проанализировать решение уравнения Бюргерса

$$v_t + (C_0 + v)v_x = \nu v_{xx},$$

где $C_0 = \text{const}$ при

$$\begin{aligned}
\text{а)} \quad & v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut; \\
\text{б)} \quad & v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = \frac{1}{2}v_0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut; \\
\text{в)} \quad & v(+\infty) = v_0, \quad v(-\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut; \\
\text{г)} \quad & v(+\infty) = v_0, \quad v(-\infty) = \frac{1}{2}v_0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut.
\end{aligned}$$

3.7

Не решая уравнения

$$v_t + 3\alpha v^2 v_x = \nu v_{xx},$$

оценить скорость и ширину фронта ударной волны. Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}
\text{а)} \quad & v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut; \\
\text{б)} \quad & v(-\infty) = 2v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x - ut; \\
\text{в)} \quad & v(-\infty) = v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut; \\
\text{г)} \quad & v(-\infty) = 2v_0, \quad v(+\infty) = 0, \quad v'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = x + ut.
\end{aligned}$$



Глава 4. СОЛИТОНЫ

4.1. Основные понятия и соотношения

Под *классическим солитоном* понимается уединенная стационарная волна, описываемая решением уравнения *Кортевега – де Вриза* (КдВ) вида:

$$v_t + vv_x + \beta v_{xxx} = 0, \quad \beta = \text{const} > 0. \quad (4.1)$$

Солитон возникает в результате точной *компенсации* нелинейного укрупнения профиля волны дисперсионным расплыванием волнового пакета. Для $\xi = x - ut$ при $v|_{\xi=\pm\infty} = v'|_{\xi=\pm\infty} = v''|_{\xi=\pm\infty} = 0$ решение (4.1) имеет вид:

$$v(\xi) = \frac{v(0)}{\text{ch}^2\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)}, \quad (4.2)$$

где

$$v(0) = 3u, \quad \xi_0 = 2\sqrt{\frac{\beta}{u}}. \quad (4.3)$$

Амплитуду $v(0)$ и ширину ξ_0 солитона можно оценить, используя метод оценки производных. Для этого при помощи подстановки $\xi = x - ut$ перейдем от уравнения (4.1) к следующему соотношению:

$$-uv' + vv' + \beta v''' = 0.$$

Учитывая, что $|v'| \sim \frac{v(0)}{\xi_0}$, $|v'''| \sim \frac{v(0)}{\xi_0^3}$, из условий равенства первого и второго, а также первого и третьего членов соответственно получим

$$u \frac{v(0)}{\xi_0} \sim \frac{v^2(0)}{\xi_0}, \quad v(0) \sim u; \quad (4.4)$$

$$u \frac{v(0)}{\xi_0} \sim \frac{\beta v(0)}{\xi_0^3}, \quad \xi_0 \sim \sqrt{\frac{\beta}{u}}. \quad (4.5)$$

Сравнение (4.4) и (4.5) с точными значениями (4.3) подтверждает реальность оценок.

В настоящее время под солитонами понимаются *локализованные* решения нелинейных уравнений, удовлетворяющие определенным законам сохранения.

Солитоноподобными решениями обладает *уравнение Гордона* вида:

$$v_{xx} + v_{tt} = f(v),$$

где $f(v)$ – нелинейная функция.

Солитон огибающей описывается нелинейным *уравнением Шредингера* (НуШ):

$$\begin{aligned} i v_t + v_{xx} + \beta v |v|^2 &= 0, \\ \beta > 0, \quad v|_{\xi=\pm\infty} &= v'|_{\xi=\pm\infty} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Его решение ищется в виде

$$v(x, t) = w(x - u_1 t) e^{i\varphi(x - u_2 t)}.$$

Из (4.6) для w и φ следуют уравнения

$$u_2 w \varphi' + w'' - w \varphi'^2 + \beta w^3 = 0, \quad (4.7)$$

$$-u_1 w' + 2w' \varphi' + w \varphi'' = 0. \quad (4.8)$$

Умножением на $2w \neq 0$ из (4.8) получаем уравнение:

$$\left[w^2 (2\varphi' - u_1) \right]' = 0,$$

откуда

$$w^2(2\varphi' - u_1) = C_1.$$

Ввиду произвола в выборе w и φ можно положить $C_1 = 0$. Тогда

$$\varphi = \frac{1}{2}u_1\xi + C_2.$$

По той же причине можно считать $C_2 = 0$, и уравнение (4.7) примет вид:

$$\frac{1}{2}u_1u_2w + w'' - w\left(\frac{u_1}{2}\right)^2 + \beta w^3 = 0.$$

После умножения на w' оно легко интегрируется. В конечном итоге решение (4.6) оказывается таковым:

$$v(x, t) = \frac{v(0)}{\operatorname{ch} \frac{x - u_1 t}{\xi_0}} e^{\frac{i u_1}{2}(x - u_2 t)},$$

где

$$v(0) = \left(\frac{u_1(u_1 - 2u_2)}{2\beta} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad \xi_0 = [u_1(u_1 - 2u_2)]^{-\frac{1}{2}}.$$

4.2. Примеры

Пример 1

Найти солитоноподобное решение уравнения “синус – Гордона”:

$$\begin{aligned} v_{tt} + v_{xx} &= \sin v, \\ v(\pm\infty) &= v'(\pm\infty) = 0. \end{aligned}$$

Решение

Введем переменную $\xi = x - ut$. Тогда $(1 + u^2)v'' = \sin v$.

Домножим на v' , выделим полную производную и проинтегрируем:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(1 + u^2)(v'^2)' &= -(\cos v)', \\ \frac{1}{2}(1 + u^2)v'^2 &= -\cos v + C.\end{aligned}$$

Из граничных условий следует, что $C = 1$. Тогда

$$v' = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} 2 \sin \frac{v}{2}.$$

Отсюда после разделения переменных и последующего интегрирования получаем:

$$v_{\pm}(\xi) = 4 \operatorname{arctg} e^{\pm \frac{\xi}{\sqrt{1 + u^2}}},$$

причем постоянная интегрирования полагается равной нулю в результате выбора начала отсчета по ξ .

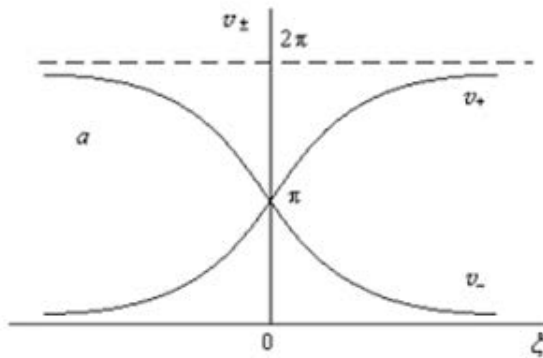


Рис. 4.1. Вид решения $v_{\pm}(\xi)$.

Решение $v_{\pm}(\xi)$ (рис. 4.1) – солитоноподобно, причем v_+ называют солитоном, а v_- – антисолитоном. Вычислим производную по ξ :

$$v'_{\pm}(\xi) = \pm \frac{2}{\sqrt{1 + u^2}} \operatorname{ch}^{-1} \frac{\xi}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Видно, что $v'_{\pm}(x)$ описывается солитоноподобным решением (рис. 4.2).

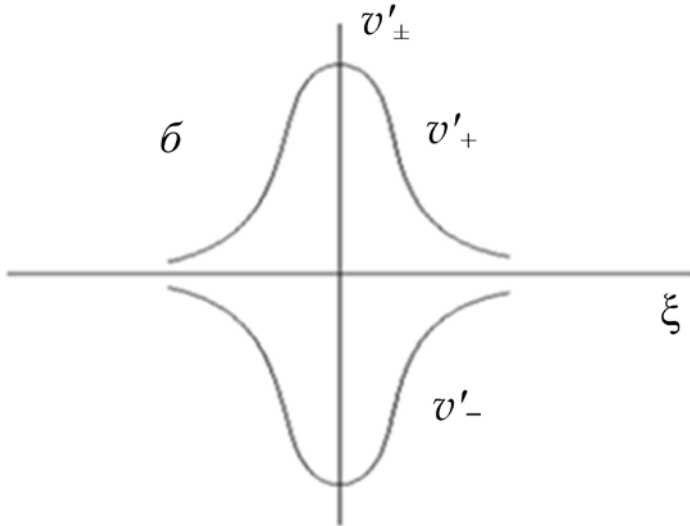


Рис. 4.2. Вид $v'_\pm(\xi)$.

Пример 2

Показать, что решение в виде $v(\xi) = v_0 \text{ch}^{-2} \frac{\xi}{\xi_0}$ также удовлетворяет линейному уравнению гиперболического типа

$$v_{tt} - u^2 v_{xx} = 0, \quad \xi = x - ut. \quad (4.9)$$

Решение

Докажем, что всякая функция $v = v(\xi)$, где $\xi = x - ut$, есть решением такого линейного уравнения.

$$\begin{aligned} v_t &\equiv \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -uv', \\ v_{tt} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = -u \frac{\partial}{\partial t} \frac{dv}{d\xi} = u^2 v'', \\ v_x &\equiv \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = v', \\ v_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{dv}{d\xi} = v''. \end{aligned}$$

Подставим вычисленные производные в (4.9). Видно, что (4.9) обращается в тождество вне зависимости от конкретного вида функции $v(\xi)$. Следовательно, любая $v(\xi)$, в том числе и заданного вида, является решением уравнения (4.9).

4.3. Задачи для самостоятельного решения

4.1

Найти солитоноподобное решение модифицированного уравнения КдВ (мКдВ)

$$v_t + 6\alpha v^2 v_x + \beta v_{xxx} = 0, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \\ v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = v''(\pm\infty) = 0.$$

Принять

$$a) \xi = x - ut, \quad u > 0,$$

$$б) \xi = x + ut, \quad u < 0.$$

4.2

Оценить амплитуду v_0 и ширину ξ_0 солитона, не решая уравнения мКдВ

$$v_t + 6\alpha v^2 v_x + \beta v_{xxx} = 0, \quad \alpha > 0, \beta > 0; \\ v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = v''(\pm\infty) = 0.$$

Сравнить с точным решением. Принять

$$a) \xi = x - ut,$$

$$б) \xi = x + ut.$$

4.3

Оценить амплитуду v_0 и ширину ξ_0 солитона, не решая уравнения КдВ

$$v_t + vv_x + \beta v_{xxx} = 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0; \\ v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = v''(\pm\infty) = 0.$$

Сравнить с точным решением. Принять

$$a) \xi = x - ut,$$

$$б) \xi = x + ut.$$

4.4

Показать, что решение в виде солитона огибающей $v(\xi) = v_0 \operatorname{ch}^{-1} \frac{\xi}{\xi_0}$ также удовлетворяет линейному уравнению гиперболического типа:

$$v_{tt} - u^2 v_{xx} = 0.$$

Принять

$$a)\xi = x - ut,$$

$$b)\xi = x + ut.$$

4.5

Найти солитоноподобное решение уравнения Гордона типа:

$$v_{tt} + v_{xx} = 2v^3,$$
$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0.$$

Принять

$$a)\xi = x - ut,$$

$$b)\xi = x + ut.$$

4.6

Найти и проанализировать решение нелинейного уравнения Шредингера вида:

$$iv_t + v_{xx} + \beta v|v|^2 = 0,$$
$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0, \beta > 0,$$
$$\xi_1 = x + u_1 t, \xi_2 = x + u_2 t.$$

4.7

Показать, что уравнение

$$v_t + v_0 v_x = D v_{xx} + 2\alpha v^3 - \beta v,$$
$$v_0, \alpha, \beta, D = \text{const}, \alpha > 0, \beta > 0, D > 0$$

с граничными условиями $v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0$ описывает диссипативный солитон.

4.8

Не решая дифференциальное уравнение, оценить амплитуду, скорость, и ширину диссипативного солитона:

а) $v_t + vv_x = vv_{xx} + \alpha v^3 - \beta v^2$; $\alpha, \beta > 0$; $v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0$;

б) $v_t + v^2 v_x = vv_{xx} + \alpha v^4 - \beta v^2$; $\alpha, \beta > 0$; $v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0$;

в) $v_t + v^2 v_x = vv_{xx} + \alpha v^4 - \beta v^3$; $\alpha, \beta > 0$; $v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0$;

г) $v_t + \gamma v^3 v_x = vv_{xx} + \alpha v^4 - \beta v^2$; $\alpha, \beta, \gamma > 0$; $v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0$.

4.9

Показать, что уравнение мКдВ сводится к уравнению КдВ подстановкой $w = v^2$.

4.10

Найти солитоноподобное решение уравнения с нулевыми условиями на функцию $v(\xi)$ и ее первые две производные при $\xi = \pm\infty$:

а) $v_t + vv_x + \beta v_{xxt} = 0$, $\beta < 0$,

б) $v_t + vv_x + \beta v_{xtt} = 0$, $\beta > 0$,

в) $v_t + vv_x + \beta v_{ttt} = 0$, $\beta < 0$,

г) $v_x + vv_t + \beta v_{ttt} = 0$, $\beta > 0$.

4.11

Найти солитоноподобное решение уравнения с нулевыми условиями на функцию $v(\xi)$ и ее первые три производные при $\xi = \pm\infty$:

а) $-v_{tt} + \frac{\alpha}{2}(v^2)_{xx} + \beta v_{xxxx} = 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

б) $v_{tt} + \frac{\alpha}{2}(v^2)_{xt} + \beta v_{xxxx} = 0$, $\alpha > 0$, $\beta < 0$,

в) $v_{xx} + \frac{\alpha}{2}(v^2)_{tt} + \beta v_{xxxx} = 0$, $\alpha < 0$, $\beta < 0$,

г) $v_{xt} + \frac{\alpha}{2}(v^2)_{tt} + \beta v_{xxxx} = 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

4.12

Найти солитоноподобное решение уравнения с нулевыми условиями на функцию $v(\xi)$ и ее первые три производные при $\xi = \pm\infty$:

$$a) v_{tt} + \frac{\alpha}{2}(v^2)_{xx} + \beta v_{xxxt} = 0, \quad \alpha < 0, \quad \beta > 0,$$

$$б) v_{tt} + \frac{\alpha}{2}(v^2)_{xx} + \beta v_{xttt} = 0, \quad \alpha < 0, \quad \beta < 0,$$

$$в) v_{tt} + \frac{\alpha}{2}(v^2)_{xx} + \beta v_{xttt} = 0, \quad \alpha < 0, \quad \beta > 0,$$

$$г) v_{tt} + \frac{\alpha}{2}(v^2)_{xx} + \beta v_{tttt} = 0, \quad \alpha < 0, \quad \beta < 0.$$

4.13

Выяснить, имеет ли солитоноподобное решение уравнение КдВ с нулевыми условиями на функцию $v(\xi)$ и ее первые две производные при $\xi = \pm\infty$, если $\beta < 0$:

$$a) v_t + vv_x + \beta v_{xxx} = 0,$$

$$б) v_t + \alpha v^2 v_x + \beta v_{xxx} = 0.$$

Сравнить полученное решение с решением для $\beta > 0$.

4.14

Показать, что уравнения

$$a) v_t + \alpha v_x + vv_x + \beta v_{xxx} = 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha = \text{const},$$

$$б) v_t + \alpha v_t + vv_x + \beta v_{xxx} = 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha = \text{const}$$

сводятся к уравнению КдВ. Найти их решения. Какие условия налагаются на α ?



Глава 5. КОГЕРЕНТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН. НЕУСТОЙЧИВОСТИ

5.1. Основные понятия и соотношения

Когерентное взаимодействие волн возникает благодаря передаче энергии волны накачки с амплитудой A_0 другим волнам. Посредником во взаимодействии выступает среда.

Рассмотрим *трехволновое взаимодействие*, описываемое системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2 - \nu_1 A_1, \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1 - \nu_2 A_2, \\ \frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1 A_2 - \nu_0 A_0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (5.1) \\ (5.2) \\ (5.3) \end{matrix}$$

Здесь A_1 и A_2 – амплитуды возбуждаемых волн.

Пороговое значение амплитуды волны накачки находится из (5.1) и (5.2) при $\frac{d}{dt} = 0$ и равно:

$$A_0^{(0)} = \sqrt{\frac{\nu_1 \nu_2}{\gamma_1 \gamma_2}}.$$

Если потери в системе отсутствуют, т. е. $\nu_1 = \nu_2 = \nu_0 = 0$, то процесс взаимодействия является *беспороговым* ($A_0^{(0)} = 0$).

Если $A_{1,2} \ll A_0$, то можно применить несамосогласованный подход. При этом достаточно решения уравнений (5.1) и (5.2). Задача сводится к *двухволновому взаимодействию*.

Когерентное взаимодействие может привести к экспоненциальному росту $A_{1,2}(t)$, т. е. к генерации *неустойчивости*. Она имеет стадии: *линейную*, когда $A_0(t)$ уменьшается незначительно, а $A_{1,2}(t)$ растут экспоненциально с *инкрементом* λ ; *нелинейную*, когда экспоненциальный рост $A_{1,2}(t)$ прекращается и $A_{1,2}(t) \rightarrow A_{1\infty,2\infty}$ в результате истощения энергии волны накачки.

В отсутствие потерь $\lambda = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} A_0$, а при их наличии:

$$\lambda = -\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)^2 + A_0^2 \gamma_1 \gamma_2 - \nu_1 \nu_2}.$$

В системе без потерь справедливы *соотношения Мэнли – Роу*, являющиеся разновидностью закона сохранения энергии:

$$\frac{A_1^2 - A_{10}^2}{\gamma_1} = \frac{A_2^2 - A_{20}^2}{\gamma_2} = \frac{A_0^2 - A_{00}^2}{\gamma_0} = \text{const}, \quad (5.4)$$

где $\gamma_0 < 0$, $\gamma_{1,2} > 0$.

Взрывная неустойчивость возникает, когда приток энергии растет быстрее, чем ее потери. Она описывается, например, таким уравнением:

$$\frac{dA}{dt} = \gamma A^2 - \nu A; \quad A|_{t=0} = A(0), \quad \gamma > 0, \quad \nu > 0. \quad (5.5)$$

Тогда

$$A(t) = \frac{A^{(0)} A(0)}{A(0) + (A^{(0)} - A(0)) e^{\nu t}},$$

где $A^{(0)} = \nu / \gamma$ – значение порога. При $A(0) < A^{(0)}$ и $\nu t \gg 1$ имеем $A(t) \rightarrow 0$. Если же $A(0) > A^{(0)}$, то наступает момент t_0 , при котором $A(t_0) \rightarrow \infty$ (генерируется взрывная неустойчивость). Для модели (5.5) справедливо выражение:

$$t_0 = \frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{A(0)}{A(0) - A^{(0)}} \right).$$

Реально взрывная неустойчивость ограничивается появлением дополнительного источника потерь, который был несущественным при достаточно малых временах. Нелинейная стадия таких неустойчивостей описывается, например, таким уравнением:

$$\frac{dA}{dt} = \gamma A^2 - \nu A - \beta A^3, \beta > 0. \quad (5.6)$$

Из (5.6) при $\frac{d}{dt} = 0$ следуют три решения: $A_0 = 0$ (тривиальное, волны нет), $A_1 \approx \frac{\gamma}{\beta} \equiv A_\infty$ – стационарное (максимальное) значение амплитуды, $A_2 \approx \frac{\nu}{\gamma} \equiv A^{(0)}$ – пороговое значение (считается, что $4\beta\nu \ll \gamma^2$). Время выхода $A(t)$ на значение, близкое к A_∞ , равно

$$t_\infty = \left(\beta A_\infty^2 \right)^{-1}. \quad (5.7)$$

При изучении неустойчивостей под переменной t понимается не обязательно время, ею может быть координата, а также время в подвижной системе координат

$$t' = t - \frac{x}{v_2},$$

где v_2 – групповая скорость волнового пакета.

5.2. Примеры

Пример 1

Решить следующую задачу о двухволновом взаимодействии:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2; & A_1|_{t=0} = 0, \\ \frac{dA_2}{dt} = -\gamma_2 A_1 A_2; & A_2|_{t=0} = A_2(0) \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\quad (5.9)$$

Считать, $\gamma_{1,2} > 0$. Получить и проанализировать соотношение Мэнли – Роу, а также выражения для $A_1(t)$ и $A_2(t)$.

Решение

Разделим (5.8) на (5.9) и получим

$$\frac{dA_1}{dA_2} = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{A_0}{A_1}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} \frac{A_1^2}{\gamma_1} + \frac{A_0 A_2}{\gamma_2} = C.$$

Из начальных условий

$$C = \frac{A_0 A_2(0)}{\gamma_2}.$$

Тогда

$$\frac{A_1^2(t)}{2\gamma_1} = A_0 \frac{A_2(0) - A_2(t)}{\gamma_2}.$$

Это уравнение представляет собой соотношение Мэнли-Роу. Отсюда

$$A_2(t) = -\frac{\gamma_2}{2\gamma_1} \frac{A_1^2(t)}{A_0} + A_2(0). \quad (5.10)$$

Подставим (5.10) в (5.8):

$$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2(0) \left(1 - \frac{\gamma_2}{2\gamma_1} \frac{A_1^2}{A_0 A_2(0)} \right).$$

Пусть $\frac{d}{dt} = 0$. Тогда

$$A_{1\infty}^2 = \frac{2\gamma_1 A_2(0) A_0}{\gamma_2},$$

Уравнение для $A_1 / A_{1\infty}$ примет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{A_1}{A_{1\infty}} = \gamma_1 \frac{A_0 A_2(0)}{A_{1\infty}} \left(1 - \frac{A_1^2}{A_{1\infty}^2} \right).$$

Разделим переменные:

$$\frac{d\left(\frac{A_1}{A_{1\infty}}\right)}{1 - \frac{A_1^2}{A_{1\infty}^2}} = \gamma_1 \frac{A_0 A_2(0)}{A_{1\infty}} dt,$$

отсюда

$$A_1(t) = A_{1\infty} \operatorname{th} \left(\gamma_1 \frac{A_0 A_2(0) t}{A_{1\infty}} + C_1 \right), \quad t_0 = \frac{A_{1\infty}}{\gamma_1 A_0 A_2(0)}.$$

Из начальных условий: $A_1(0) = A_{1\infty} \operatorname{th} C_1 = 0$, что дает $C_1 = 0$.

Таким образом

$$A_1(t) = A_{1\infty} \operatorname{th} \frac{t}{t_0}, \quad A_2(t) = A_2(0) \operatorname{ch}^{-2} \frac{t}{t_0}.$$

Графики решений $A_1(t)$ и $A_2(t)$ показаны на рис. 5.1.

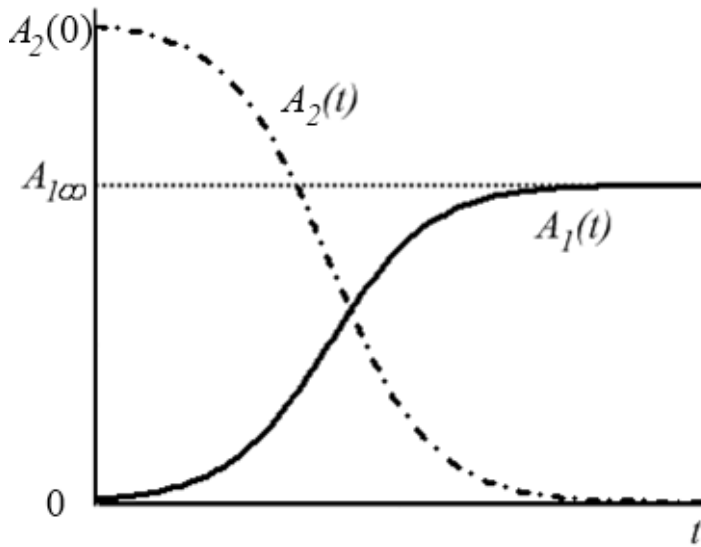


Рис. 5.1. Вид решений $A_1(t)$ и $A_2(t)$.

Легко убедиться, что время развития неустойчивости равно t_0 .

Энергия одной волны передается другой волне. Такое возможно только в случае, если среда была изменена волной накачки с амплитудой $A_0 \neq 0$. При $A_0 = 0$ никакого взаимодействия не будет.

Пример 2

Исследовать генерацию второй гармоники в нелинейной среде, описываемую системой укороченных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = \gamma_1 A_2^2 A_1, & A_1|_{x=0} = A_1(0), \quad \gamma_1 < 0, \\ \frac{dA_2}{dx} = \gamma_2 A_1^2 A_2, & A_2|_{x=0} = A_2(0), \quad \gamma_2 > 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Решение

Соотношения Мэнли – Роу в данном случае имеют вид

$$\frac{A_1^2 - A_1^2(0)}{\gamma_1} = \frac{A_2^2 - A_2^2(0)}{\gamma_2}. \quad (5.12)$$

Отсюда

$$A_1^2 = A_1^2(0) + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (A_2^2 - A_2^2(0)). \quad (5.13)$$

Подставляя (5.13) во второе уравнение (5.11), получим

$$\frac{dA_2}{dx} = \gamma_2 A_2 \left(A_1^2(0) + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (A_2^2 - A_2^2(0)) \right). \quad (5.14)$$

При $x \rightarrow \infty$ или $\frac{d}{dx} = 0$ справедливо такое решение для $A_2(\infty) \equiv A_{2\infty}$:

$$A_{2\infty}^2 = A_2^2(0) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} A_1^2(0). \quad (5.15)$$

С учетом (5.15) уравнение (5.14) принимает вид:

$$\frac{dA_2}{dx} = \gamma_1 A_2 (A_2^2 - A_{2\infty}^2).$$

Умножая это уравнение на $2A_2$, разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$A_2(x) = \frac{A_{20} A_{2\infty}}{\sqrt{A_{20}^2 + (A_{2\infty}^2 - A_{20}^2) e^{x/x_0}}},$$

где $x_0 = (2\gamma_1 A_{2\infty}^2)^{-1} < 0$.

С учетом $A_2(x)$ из (5.13) получаем

$$A_1(x) = \sqrt{A_1^2(0) - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{(A_{2\infty}^2 - A_2^2(0))(e^{x/x_0} - 1)}{A_2^2(0) + (A_{2\infty}^2 - A_2^2(0))e^{x/x_0}}}.$$

В соответствии с полученными решениями амплитуда волны накачки $A_1(x)$ убывает от $A_1(0)$ до $A_{1\infty} = A_1^2(0) + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (A_{2\infty}^2 - A_2^2(0)) = 0$ (согласно (5.12) и (5.15)), а амплитуда второй гармоники растет от $A_2(0)$ до $A_{2\infty}$.

Пример 3

Исследовать взрывную неустойчивость, описываемую уравнением

$$\frac{dA}{dt} = \gamma A^2 - \nu A; \quad \gamma, \nu > 0, \quad A(0) = A^{(0)},$$

где $A^{(0)}$ – пороговое значение.

Решение

Пороговое значение находится из соотношения $\gamma A^{(0)2} - \nu A^{(0)} = 0$ и равняется $A^{(0)} = \frac{\nu}{\gamma}$. Тогда исходное соотношение примет вид

$$\frac{dA}{dt} = \gamma A \left(A - A^{(0)} \right).$$

Проинтегрируем это уравнение методом разделения переменных:

$$\frac{A}{A - A^{(0)}} = C \exp(-A^{(0)}\gamma t).$$

Из начального условия следует, что

$$C = \frac{A(0)}{A(0) - A^{(0)}}.$$

Тогда

$$A(t) = \frac{A^{(0)}}{1 - \left(1 - \frac{A^{(0)}}{A(0)} \right) \exp(A^{(0)}\gamma t)}.$$

Видно, что при $A(0) \leq A^{(0)}$ взрывная неустойчивость не возникает, она имеет место при $A(0) > A^{(0)}$.

Время развития взрывной неустойчивости равно

$$t_0 = \frac{1}{\gamma A^{(0)}} \ln \frac{A(0)}{A(0) - A^{(0)}}.$$

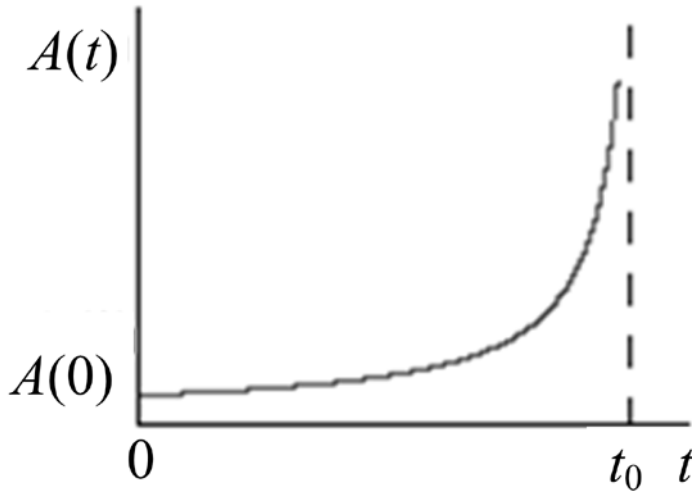


Рис. 5.2. Вид решения $A(t)$.

Пример 4

В результате трехволнового взаимодействия могут возникать солитоны огибающих. Они описываются следующей моделью:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2; & \gamma_1, \gamma_2 > 0; \quad \gamma_0 < 0; \end{cases} \quad (5.16)$$

$$\begin{cases} \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1; & t = t' - \frac{x}{v_z}; \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\begin{cases} \frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1 A_2; & A_{1,2}(\pm\infty) = 0; \quad A_0(\pm\infty) = A_\infty. \end{cases} \quad (5.18)$$

Решение

Из соотношения Мэнли – Роу имеем:

$$\frac{A_1^2 - A_1^2(\pm\infty)}{\gamma_1} = \frac{A_2^2 - A_2^2(\pm\infty)}{\gamma_2} = \frac{A_0^2 - A_0^2(\pm\infty)}{\gamma_0}$$

или

$$\frac{A_1^2}{\gamma_1} = \frac{A_2^2}{\gamma_2} = \frac{A_{00}^2 - A_0^2}{|\gamma_0|}.$$

Отсюда

$$A_{1,2} = \sqrt{\frac{\gamma_{1,2}}{|\gamma_0|}} (A_{00}^2 - A_0^2). \quad (5.19)$$

Подставим (5.19) в (5.18) и получим

$$\frac{dA_0}{dt} = -\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} (A_{00}^2 - A_0^2).$$

Для удобства интегрирования данного уравнения введем $y = \frac{A_0}{A_{00}}$ и

$\lambda = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} A_{00} > 0$. Тогда

$$\frac{dy}{1-y^2} = -\lambda dt.$$

Откуда $y(t) = \text{th}(C - \lambda t)$. При $t = \infty$ $x(\infty) = \text{th}(-\infty) = -1$, где C – любое конечное число. Положим $C = 0$. Тогда:

$$y^2 = \text{th}^2 \lambda t,$$

а

$$A_0^2(t) = A_{00}^2 \text{th}^2 \lambda t.$$

В конечном счете

$$A_{1,2}^2(t) = \frac{\gamma_{1,2}}{|\gamma_0|} (A_{00}^2 - A_0^2) = A_{00}^2 \frac{\gamma_{1,2}}{|\gamma_0|} \text{ch}^{-2} \lambda t - \text{“светлый” солитон},$$

$$A_0^2(t) = A_{00}^2 (1 - \text{ch}^{-2} \lambda t) - \text{“темный” солитон}.$$

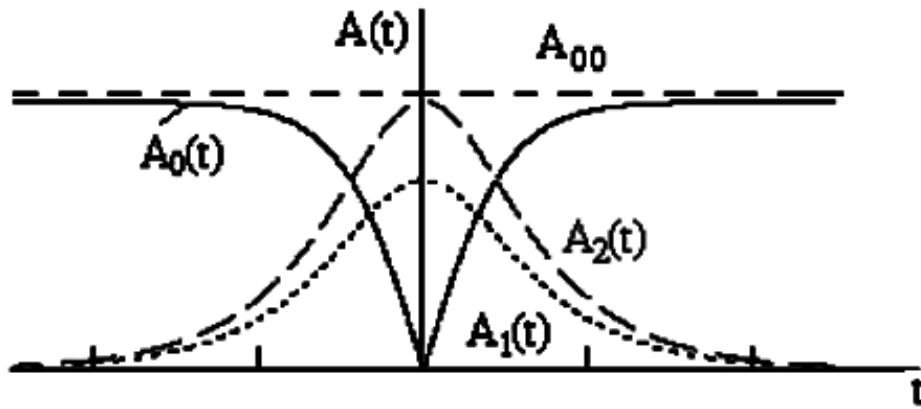


Рис. 5.3. Вид
решений $A_{0,1,2}(t)$

5.3. Задачи для самостоятельного решения

5.1

Решить задачу о двухволновом взаимодействии, если оно описывается системой вида:

$$a) \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = -\gamma_1 A_1 A_2, & A_1|_{t=0} = A_1(0), \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1, & A_2|_{t=0} = 0, \quad A_0 = \text{const}; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_2^2, & A_1|_{t=0} = 0, \\ \frac{dA_2}{dt} = -\gamma_2 A_1 A_2, & A_2|_{t=0} = A_2(0); \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = -\gamma_1 A_1 A_2, & A_1|_{t=0} = A_1(0), \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_1^2, & A_2|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = -\gamma_1 A_2, & A_1|_{t=0} = A_1(0); \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_1, & A_2|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Учесть, что $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

5.2

Вычислить пороговое значение амплитуды волны накачки в задаче о трехволновом когерентном взаимодействии ($\gamma_{1,2} > 0$; $\gamma_0 < 0$):

$$a) \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0^2 A_2 - \nu_1 A_1, \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0^2 A_1 - \nu_2 A_2, \\ \frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1^2 A_2 - \nu_0 A_0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 б) \quad & \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0^2 A_2 - \nu_1 A_1 A_0, \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0^2 A_1 - \nu_2 A_2 A_0, \\ \frac{dA_0}{dt} = -\gamma_0 A_1^2 A_2 - \nu_0 A_0^2; \end{cases} \\
 в) \quad & \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_1 A_2 - \nu_1 A_1^2, \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1 A_2 - \nu_2 A_2^2, \\ \frac{dA_0}{dt} = -\gamma_0 A_0 A_1 A_2 - \nu_0 A_0^2; \end{cases} \\
 г) \quad & \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0^3 A_2 - \nu_1 A_1, \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_1 A_0^3 - \nu_2 A_2, \\ \frac{dA_0}{dt} = -\gamma_0 A_1 A_2 A_0^2 - \nu_0 A_0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Начальные условия имеют вид:

$$A_1|_{t=0} = 0, \quad A_2|_{t=0} = 0, \quad A_0|_{t=0} = A_{00}.$$

5.3

Исследовать взрывную неустойчивость, описываемую уравнением

$$\begin{aligned}
 а) \quad & \frac{dA}{dt} = \gamma A^3 - \nu A, \\
 б) \quad & \frac{dA}{dt} = \gamma A^3 - \nu A^2, \\
 в) \quad & \frac{dA}{dt} = \gamma A^3 - \nu A^2 - \beta A^4, \\
 г) \quad & \frac{dA}{dt} = \gamma A^4 - \nu A^2,
 \end{aligned}$$

где $\nu, \gamma > 0$, $A(0) > A^{(0)}$, $A^{(0)}$ – пороговое значение, $A|_{t=0} = A(0)$.

5.4

В результате трехволнового взаимодействия могут возникать солитоны огибающих. Они описываются следующей моделью:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2, \\ \frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1, \\ \frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1 A_2, \end{cases}$$

где $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, $\gamma_0 < 0$, $A_{1,2}(\pm\infty) = 0$, $t = t' - \frac{x}{v_2}$, $A_0(\pm\infty) = A_{00}$, v_2 –

групповая скорость. Отыскать $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_0(t)$.

Указание. Использовать соотношения Мэнли – Роу.

5.5

Известно, что ребенок интенсивно растет до 12 – 13 лет: его масса в начале жизни увеличивается в e раз примерно за 2,6 года. Считая, что относительная скорость увеличения массы ребенка уменьшается по экспоненциальному закону с характерным временем, равным 8 годам, составить уравнение, описывающее закон изменения массы человека в течение жизни. Найдите его решение и постройте зависимость $m(t)$. Относится ли такое поведение к неустойчивости? Если да, то какого типа? Принять $m(0) = 3,5$ кг.

5.6

Скорость роста численности N простейших организмов в биосфере пропорциональна их числу. Это же можно сказать и о скорости их гибели. Составьте дифференциальное уравнение, описывающее изменение N во времени. Получите его решение. Описывает ли оно неустойчивость? При каких условиях? Привести примеры.

5.7

Скорость роста численности N сложных организмов в биосфере пропорциональна квадрату их числа, а скорость гибели – N . Составьте дифференциальное уравнение, описывающее изменение N во времени. Получите его решение. Описывает ли оно неустойчивость? Какую? При каких условиях? Привести примеры.

5.8

Численность N многих организмов в биосфере описывается логистическим законом, согласно которому относительная скорость изменения N во

времени убывает с ростом N по линейному закону. Составьте дифференциальное уравнение, описывающее изменение N во времени. Получите его решение. Описывает ли оно неустойчивость? Какую? При каких условиях? Привести примеры.

5.9

В некоторую историческую эпоху, которая включает в себя и настоящее время, рост численности населения на Земном шаре хорошо описывается простейшей моделью С. П. Капицы:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^2}{C},$$

где $C \approx 1,62 \cdot 10^{11}$ чел·год.

Является ли такой рост устойчивым? Найдите и проанализируйте зависимость $N(t)$. В каком году наступит “взрыв” численности населения, если в 1999 г. $N = 6$ млрд человек? Реальна ли модель С. П. Капицы? Чего она не учитывает? Попытайтесь усовершенствовать эту модель.

5.10

В некоторую историческую эпоху, которая включает в себя и настоящее время, рост численности населения на Земном шаре хорошо описывается усовершенствованной моделью С. П. Капицы:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{C}{(\tau_0 - t)^2 + \tau^2},$$

где $C \approx 1,62 \cdot 10^{11}$ чел·год, $\tau \approx 45$ лет – характерное время для человека, $\tau_0 \approx 1995$ год.

Является ли такой рост устойчивым? Найдите и проанализируйте зависимость $N(t)$. Наступит ли стабилизация численности населения, если в 1999 г. $N = 6$ млрд человек? Реальна ли эта модель С. П. Капицы? Вычислите N в текущем году и сравните его с результатами переписи населения. Существенны ли отклонения от модели?

5.11

Рост потребляемой человечеством мощности описывается моделью вида:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(P)P, \quad P|_{t=0} = P_0,$$

где $P_0 = 20$ ТВт, $\alpha = \alpha_0(1 + \beta P)$, $\alpha_0 \approx 0,03$ год⁻¹, $|\beta| \approx 10^{-14}$ Вт⁻¹. Найдите и проанализируйте решение модельного уравнения. Описывает ли оно неустойчивость? Какую? При каких условиях?

5.12

С целью увеличения отношения сигнал/шум стремятся к увеличению мощности своего радиопередающего устройства. В результате этого рост мощности электромагнитного излучения, “загрязняющего” радиоэфир, описывается моделью вида:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P(1 + \beta P), \quad P|_{t=0} = P_0,$$

где $P_0 = 1$ ГВт, $\alpha = 0,01$ год⁻¹, $|\beta| \approx 10^{-12}$ Вт⁻¹. Найдите и проанализируйте решение модельного уравнения. Описывает ли оно неустойчивость? Какую? При каких условиях?

5.13

При столкновениях фрагментов космического «мусора» их численность прогрессивно увеличивается. При этом рост численности фрагментов космического “мусора” на околоземных орбитах описывается моделью вида:

$$\frac{dn}{dt} = \alpha(n)n - \beta n, \quad n|_{t=2000 \text{ год}} = n_0,$$

где $n_0 = 10^4$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 n$, $\alpha_0 \approx 0,05$ год⁻¹, $\alpha_1 \approx 10^{-7}$ год⁻¹, $\beta = 0,02$ год⁻¹. Найдите и проанализируйте решение модельного уравнения. Описывает ли оно неустойчивость? Какую? При каких условиях? Через сколько лет полеты в околоземном космосе станут невозможными?

5.14

По данным наблюдений за средней площадью S ледников на Земном шаре в XXI веке она описывается следующим законом:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha(1 + \beta S)S, \quad S(t_0) = S_0, \quad t_0 = 2000 \text{ г.}$$

Найти закон изменения $S(t)$. Можно ли процесс уменьшения $S(t)$ назвать неустойчивым? К чему это приведет? Оценить, за какое время площадь уменьшится:

- а) в два раза, $\alpha = 10^{-2}$ год⁻¹, $\beta S_0 = 0.1$;
- б) в три раза, $\alpha = 2 \cdot 10^{-2}$ год⁻¹, $\beta S_0 = 0.1$;
- в) в два раза, $\alpha = 10^{-3}$ год⁻¹, $\beta S_0 = 0.2$;
- г) в десять раз, $\alpha = 10^{-3}$ год⁻¹, $\beta S_0 = 0.1$.

5.15

По данным наблюдений за средней температурой T атмосферы на Земном шаре в XXI веке она описывается следующим законом:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(1 + \beta T), \quad T(t_0) = T_0, \quad t_0 = 2000 \text{ г.}$$

где $\alpha = 0.02 \text{ К/год}$, $\beta = 2/T_0 \approx 6.67 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$. Найти закон изменения $T(t)$. Можно ли рост $T(t)$ назвать неустойчивым? Оценить значение T :

- а) $t = 2100 \text{ г.}$;
- б) $t = 2200 \text{ г.}$;
- в) $t = 2300 \text{ г.}$;
- г) $t = 2400 \text{ г.}$

5.16

Относительное число абонентов n мобильной связи, появившейся в $t_0 = 1994 \text{ г.}$, сначала увеличивалось по экспоненциальному закону с характерным временем τ . В момент времени t_1 наступил перелом, рост n стал замедляться, и n асимптотически стало приближаться к 1. Составьте уравнение, описывающее закон изменения $n(t)$. Описывает ли оно неустойчивость? Какую? Найдите моменты времени t_2, t_3, t_4 , когда n принимает значения 0,5, 0,9, 0,99. Чему равно n при $t = t_1$? Использовать следующие предположения:

- а) развитая страна: $n_0 = n(t_0) = 0,05$, $\tau = 2,4 \text{ года}$;
- б) развитая страна: $n_0 = 0,05$, $\tau = 3 \text{ года}$;
- в) развивающаяся страна: $n_0 = 0,01$, $\tau = 4 \text{ года}$;
- г) развивающаяся страна: $n_0 = 0,01$, $\tau = 5 \text{ лет}$.



Глава 6. НЕЛИНЕЙНАЯ КВАНТОВАЯ РАДИОФИЗИКА

6.1. Основные понятия и соотношения

Нелинейные явления возникают в результате взаимодействия излучения мощных квантовых генераторов с веществом (твердыми телами, жидкостями, газами и плазмой).

Первые нелинейные эффекты при распространении света в веществе были обнаружены еще в *долазерную* эпоху. Поэтому соответствующий раздел физики получил название *нелинейной оптики*. Поскольку оптика традиционно исследует видимый свет (длина волны $\lambda \sim 4 \cdot 10^{-7} - 8 \cdot 10^{-7}$ м), а квантовые генераторы излучают в диапазонах от субмиллиметрового ($\lambda \sim 10^{-4}$ м) до рентгеновского ($\lambda \sim 10^{-10}$ м), целесообразно говорить о *нелинейной квантовой радиофизике*.

Существует несколько механизмов, приводящих к возникновению нелинейных явлений. Величина характерного поля, при которой становится существенным тот или иной механизм, зависит от вещества, его агрегатного состояния и параметров, частоты волны и т. п. Рассмотрим механизмы нелинейности подробнее.

6.1.1. Тепловой механизм

Тепловой механизм нелинейности связан с нагревом вещества мощным электромагнитным излучением, в результате чего показатели поглощения и преломления вещества становятся зависящими от напряженности поля волны. Это приводит, в частности, к самовоздействию волны, к эффекту самофокусировки и т. д.

Величина характерного поля E_t для теплового механизма зависит от вещества. Так, заметный нагрев кристалла возможен уже при $P \sim 10^{-2}$ Вт, т. е. при $E_t \sim 10^3$ В/м. Для плазмы $E_t \sim 10^6$ В/м. В последнем случае E_t обычно называют *плазменным полем* E_p .

Получим выражение для напряженности характерного поля E_t при тепловом механизме нелинейности. В качестве исходного выберем уравнение баланса внутренней энергии Q при нагревании вещества плотностью ρ , удельной теплоемкостью C , длиной образца L :

$$\frac{dQ}{dt} = \kappa P - P_1,$$

где $Q = C\rho SL\Delta T$, S – площадь сечения лазерного пучка, ΔT – изменение абсолютной температуры образца, $P = \Pi S$ – мощность лазера, Π – плотность потока энергии излучения, κ – коэффициент поглощения излучения, P_1 – мощность потерь (за счет теплового излучения образца, теплопроводности, конвекции и т. п.). Обычно $\kappa P \gg P_1$ и уравнение баланса принимает вид:

$$C\rho SL \frac{d\Delta T}{dt} \approx \kappa P = \kappa \Pi S.$$

Отсюда при длительности воздействия τ получим, что

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\kappa \Pi \tau}{C\rho T_0 L}.$$

Поскольку в системе СИ

$$\Pi = \frac{P}{S} = \frac{E_0^2}{2Z_0} = \frac{E_0^2}{240\pi},$$

где $Z_0 = 120\pi$ Ом – сопротивление свободного пространства,

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{E_0^2}{E_t^2}.$$

Здесь

$$E_t^2 = \frac{240\pi C\rho T_0 L}{\kappa \tau}.$$

Очевидно, что при $E_0 = E_t$ значение $\Delta T = T_0$. Выполним оценки E_t .

Для слабопоглощающего газа $\kappa = 10^{-6}$ и $\rho = 1$ кг/м³, $C = 10^3$ Дж/кг·К, $T_0 = 300$ К, $L = 0,03$ м, $\tau = 10$ с имеем $E_t \approx 2,6 \cdot 10^6$ В/м. При $S = 10^{-5}$ м², $\Pi \approx 10^{10}$ Вт/м² получим $P \approx 0,1$ МВт.

Для кристалла (конденсированного вещества) с $\kappa = 10^{-6}$, $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, $C = 5 \cdot 10^2$ Дж/кг·К, $T_0 = 300$ К, $L = 0,03$ м, $\tau = 10$ с получим $E_t \approx 8,2 \cdot 10^7$ В/м. Если $S = 10^{-3}$ м², $\Pi \approx 10^{13}$ Вт/м², то $P \approx 100$ МВт.

6.1.2. Стрикционный механизм

Под электрострикцией понимается возникновение упругих деформаций среды под действием приложенного электромагнитного поля. В результате электрострикции в среде генерируются и распространяются акустические волны.

Как следствие деформации среды изменяется абсолютная диэлектрическая проницаемость:

$$\Delta \varepsilon_a = \left(\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \rho} \right)_0 \Delta \rho,$$

где $\Delta \rho = (\rho - \rho_0)$, ρ и ρ_0 – плотность среды в возмущенных полев волны и невозмущенных условиях. За счет изменения ε_a возникают изменения плотности энергии ε_e электрического поля

$$\Delta \varepsilon_e = \frac{\Delta \varepsilon_a E_0^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \rho} \right)_0 \Delta \rho E_0^2.$$

Изменения ε_e эквивалентны действию стрикционного давления

$$p_s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \rho} \right)_0 \Delta \rho E_0^2.$$

Относительная деформация среды определяется безразмерным параметром

$$\frac{p_s}{K} = \left(\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \rho} \right)_0 \frac{\Delta \rho}{2K} E_0^2 \equiv \frac{E_0^2}{E_s^2}.$$

Здесь K – модуль всестороннего сжатия. Стрикционное поле дается следующим соотношением:

$$E_s^2 = \frac{2K}{\left(\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \rho} \right)_0 \Delta \rho} = \frac{2K}{\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_0 \Delta \rho} = \frac{2K}{\varepsilon_0 \Delta \varepsilon},$$

где ε_0 – электрическая постоянная.

Стрикционная нелинейность становится существенной при возмущениях относительной диэлектрической проницаемости $\Delta \varepsilon \approx 0.1 - 1$.

Для газов при атмосферном давлении $K = 10^5 \text{ Н/м}^2$, для жидкостей $K = (1 - 9) \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, для твердых тел $K \approx (1 - 3) \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$. Таким значениям K соответствуют значения E_s порядка $(1 - 3) \cdot 10^8$, $10^{10} - 10^{11}$ и $10^{11} - 10^{12} \text{ В/м}$.

6.1.3. Атомный механизм

Данный механизм связан с *нелинейным откликом* атомных или молекулярных осцилляторов вещества, в котором распространяется электромагнитная волна.

Атомный механизм является *основным* в нелинейной квантовой радиофизике. Он возникает тогда, когда напряженность поля волны становится соизмеримой с внутриатомной напряженностью поля

$$E_a = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_a^2}, \quad (6.1)$$

$$r_a = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{me^2}. \quad (6.2)$$

Здесь r_a – радиус первой боровской орбиты, $\hbar$ – постоянная Планка, e и m – заряд и масса электрона. Из (6.1), (6.2) получаем

$$E_a = \frac{m^2 e^5}{(4\pi\varepsilon_0)^3 \hbar^4}. \quad (6.3)$$

Величина $E_a \sim 10^{12} \text{ В/м}$.

6.1.4. Релятивистский механизм

Данный механизм возникает в случае, если *осцилляторная* скорость свободных электронов (в пренебрежении релятивистским изменением массы)

$$v_e = \frac{eE_0}{m\omega}$$

становится порядка скорости света c , т. е. при напряженности поля

$$E_r = \frac{mc\omega}{e}. \quad (6.4)$$

Например, при $f \sim 10^{15}$ Гц $E_r \sim 10^{13}$ В/м.

6.1.5. Вакуумный механизм

Данный механизм может стать существенным, если работа электрического поля над электроном на комптоновской длине волны этой частицы $\lambda_k = \hbar / mc$ сравняется с энергией покоя электрона, т. е.

$$eE_v \lambda_k = mc^2$$

или

$$eE_v \frac{\hbar}{mc} = mc^2.$$

Отсюда

$$E_v = \frac{m^2 c^3}{e\hbar}. \quad (6.5)$$

Величина E_v зависит только от фундаментальных констант и равна $\sim 10^{18}$ В/м.

При $E \sim E_v$ возникают нелинейные эффекты в вакууме. Разумеется, речь идет не о классическом вакууме (пустоте), а о *физическом вакууме*, в котором непрерывно рождаются и исчезают виртуальные частицы.

6.1.6. Сравнение механизмов

Обычно в наименьших полях проявляется тепловая нелинейность, в несколько больших полях – стрикционная, т. е.

$$E_t \ll E_s. \quad (6.6)$$

В еще больших полях становятся существенными атомный, релятивистский и вакуумный механизмы. Покажем это, для чего составим отношения, исходя из (6.3), (6.4) и (6.5):

$$\frac{E_a}{E_v} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \right)^3 \equiv \alpha^3, \quad \frac{E_r}{E_v} = \frac{\hbar\omega}{mc^2},$$

где $\alpha \approx 1/137$ – постоянная тонкой структуры. При этом $E_a / E_v \sim 10^6$, а $E_r / E_v \sim 10^{-5}$ при $f \sim 10^{15}$ Гц.

Таким образом,

$$E_a \ll E_r \ll E_v,$$

а с учетом (6.6) имеем

$$E_t \ll E_s \ll E_a \ll E_r \ll E_v.$$

Результаты оценок этих полей, а также соответствующих им мощностей излучения P и плотностей потока энергии $\Pi = P / S$ для сечения пучка $S = 10 \text{ мм}^2$ приведены в табл. 6.1.

Какими же полями располагает экспериментатор в настоящее время? Приведем примеры сверхсильных световых полей. При помощи эксимерной системы KrF ($\lambda = 0,24 \text{ мкм}$, $\tau = 70 \text{ фс}$) еще в 1980-х гг. получено $\Pi \sim 10^{22} \text{ Вт/м}^2$ ($P \sim 10^{17} \text{ Вт}$), в перспективе можно получить $\Pi \sim 10^{23} \text{ Вт/м}^2$ ($P \sim 10^{18} \text{ Вт}$, $\tau \sim 100 \text{ фс}$). Для твердотельных систем (видимый и ближний инфракрасный диапазоны) при $\tau \sim 10 \text{ фс}$ получено $\Pi \sim 10^{22} \text{ Вт/м}^2$, а в перспективе – $\Pi \sim 10^{27} \text{ Вт/м}^2$ ($P \sim 10^{22} \text{ Вт}$, $\tau \sim 10 \text{ фс}$). Так называемые СРА-лазеры позволили достичь $\Pi \sim 10^{24} - 10^{25} \text{ Вт/м}^2$. Они имеют мощность $P \sim 10^{19} - 10^{20} \text{ Вт}$ при $\tau \sim 10 - 10^3 \text{ фс}$ [11]. В России и Великобритании в 2006 – 2007 гг. достигнуты значения $\Pi \sim 10^{26} \text{ Вт / м}^2$.

Таким образом, даже в отдаленной перспективе вряд ли удастся приблизиться к величине E_v . Что же касается величины E_r , можно утверждать, что к ней подошли вплотную.

Таблица 6.1. Сравнительные характеристики различных механизмов

Механизм	E , В/м	E / E_v	P , Вт	Π , Вт/м ²
Тепловой	10^3	10^{-15}	10^{-2}	10^3
Стрикционный	10^5	10^{-13}	10^2	10^7
Атомный	10^{12}	10^{-6}	10^{16}	10^{21}
Релятивистский	10^{13}	10^{-5}	10^{18}	10^{23}
Вакуумный	10^{18}	1	10^{28}	10^{33}

Полезно сравнить объемную плотность энергии различных источников (табл. 6.2).

При оценке объемной плотности энергии $E_e = \Pi / c$, излучаемой квантовым генератором, считалось, что мощность лазера около 1 ПВт, луч фокусируется на мишени диаметром около 3 мм.

Таблица 6.2. Объемная энергия различных источников

Источник энергии	Плотность энергии, Дж/м ³
Аннигиляция частиц и античастиц	10^{35}
Квантовый генератор	10^{18}
Ядерная реакция	10^{17}
Химическая реакция	$8 \cdot 10^9$
Вулканическая лава	$2 \cdot 10^9$
Молния	10^7
Землетрясение	10^3
Мощные атмосферные процессы	$10^2 - 10^3$

Из табл. 6.2 видно, что по объемной плотности энергии квантовые генераторы уступают лишь аннигиляции частиц с античастицами.

6.2. Генерация второй гармоники

Генерация второй гармоники – *классический* нелинейный эффект квантовой радиофизики. Рассмотрим его подробнее.

6.2.1. Исходные уравнения

Исходными соотношениями являются укороченные уравнения для комплексных амплитуд:

$$\frac{d\tilde{A}_1}{dx} = -i\delta_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_1^* e^{-i\Delta kx}, \quad \delta_1 > 0, \quad \tilde{A}_1(0) = A_{10}, \quad (6.7)$$

$$\frac{d\tilde{A}_2}{dx} = -i\delta_2 \tilde{A}_1^2 e^{i\Delta kx}, \quad \delta_2 > 0, \quad \tilde{A}_2(0) = 0, \quad (6.8)$$

где $\Delta k = k_2 - 2k_1 = 2\frac{\omega}{c}(n_2 - n_1)$, $\tilde{A}_{1,2}$ и $n_{1,2}$ – комплексные амплитуды и показатели преломления волны накачки (1) и волны с частотой 2ω (2), $\delta_{1,2}$ – действительные коэффициенты.

Решение (6.7), (6.8) ищем в виде

$$\tilde{A}_{1,2} = A_{1,2} e^{i\varphi_{1,2}}. \quad (6.9)$$

Подставляя (6.9) в (6.7), (6.8), получим

$$\frac{dA_1}{dx} + iA_1 \frac{d\varphi_1}{dx} = -i\delta_1 A_1 A_2 e^{-i\Phi}, \quad (6.10)$$

$$\frac{dA_2}{dx} + iA_2 \frac{d\varphi_2}{dx} = -i\delta_2 A_1^2 e^{i\Phi}, \quad (6.11)$$

где $\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta kx$. Комплексные уравнения (6.10), (6.11) позволяют найти $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$. Выделим в этих уравнениях действительную часть:

$$\frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1 A_2 \sin \Phi, \quad (6.12)$$

$$\frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^2 \sin \Phi. \quad (6.13)$$

Решая эту систему, найдем $A_1(x)$ и $A_2(x)$.

6.2.2. Амплитуда второй гармоники

Из (6.13) видно, что источником волны (2) является волна накачки, причем $dA_2 / dx > 0$. Это означает, что амплитуда второй гармоники растет, а волны накачки – убывает, так как $dA_1 / dx < 0$ (см. (6.12)). Максимальное взаимодействие имеет место при $\sin \Phi = 1$ (при $\sin \Phi = 0$ взаимодействие отсутствует). В этом случае уравнения (6.12), (6.13) сводятся к следующим:

$$\frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1 A_2, \quad A_1(0) = A_{10}, \quad (6.14)$$

$$\frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^2, \quad A_2(0) = 0. \quad (6.15)$$

Разделив верхнее уравнение на нижнее, получим

$$\frac{dA_1}{dA_2} = -\frac{\delta_1}{\delta_2} \frac{A_2}{A_1}.$$

Отсюда первый интеграл системы (6.14), (6.15) имеет вид:

$$A_1^2 = A_{10}^2 - \frac{\delta_1}{\delta_2} A_2^2. \quad (6.16)$$

С учетом (6.14) уравнение (6.15) преобразуется к такому:

$$\frac{dA_2}{dx} = \delta_2 \left(A_{10}^2 - \frac{\delta_1}{\delta_2} A_2^2 \right). \quad (6.17)$$

Из (6.17) следует, что в глубине среды (формально при $x \rightarrow \infty$) имеет место максимальное значение квадрата амплитуды волны 2, равное

$$A_{2\infty}^2 = \frac{\delta_2}{\delta_1} A_{10}^2. \quad (6.18)$$

Тогда (6.17) с учетом (6.18) перепишется как

$$\frac{dA_2}{dx} = \delta_1 A_{2\infty}^2 \left(1 - \frac{A_2^2}{A_{2\infty}^2} \right).$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$A_2 = A_{2\infty} \operatorname{th}(\delta_1 A_{2\infty} x + C),$$

где из граничного условия $A_2(0) = 0$ находим, что $C = 0$. Тогда

$$A_2(x) = A_{2\infty} \operatorname{th} \delta_1 A_{2\infty} x. \quad (6.19)$$

Подстановка (6.19) в уравнение (6.16) с учетом (6.18) дает

$$A_1^2 = A_{10}^2 - \frac{\delta_1 \delta_2}{\delta_2 \delta_1} A_{10}^2 \operatorname{th}^2 \delta_1 A_{2\infty} x.$$

Отсюда

$$A_1(x) = \frac{A_{10}}{\operatorname{ch} \delta_1 A_{2\infty} x}. \quad (6.20)$$

Зависимости $A_1(x)$ и $A_2(x)$ показаны на рис. 6.1.

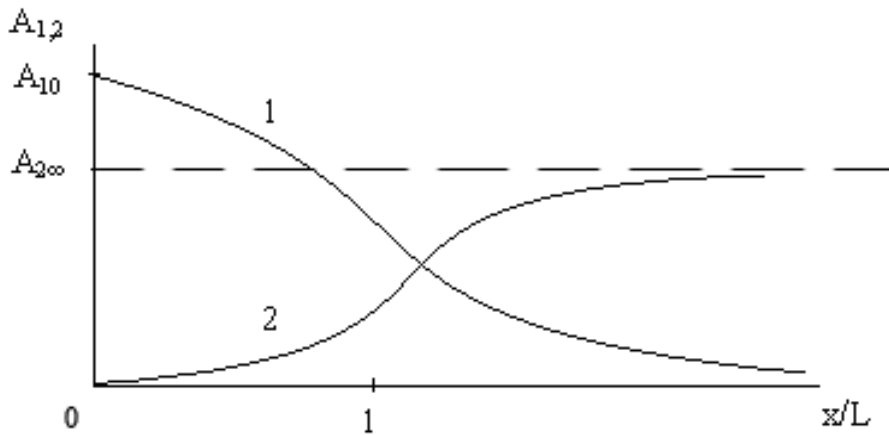


Рис. 6.1. Зависимость амплитуды волны накачки (1) и второй гармоники (2) от длины взаимодействия

Из рис. 6.1 видно, что при $L = (\delta_1 A_{1\infty})^{-1}$ происходит перекачка энергии волны накачки в энергию второй гармоники. Эффективность энергетических преобразований

$$\eta = \frac{A_{2\infty}^2}{A_{10}^2} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

составляет величину $\sim 0,6 - 0,8$.

6.3. Задачи для самостоятельного решения

6.1

Вычислить характерное поле для теплового механизма нелинейности в квантовой радиофизике, плотность потока энергии и мощность лазера, если рабочим телом является газ с плотностью $\rho = 1 \text{ кг/м}^3$, удельной теплоемкостью $C = 10^3 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$, коэффициентом поглощения излучения $\kappa = 10^{-6}$, находящийся при температуре $T_0 = 300 \text{ К}$. Длина образца L , длительность воздействия τ и площадь сечения лазерного пучка S заданы:

- а) $L = 1 \text{ см}$, $\tau = 10 \text{ с}$, $S = 1 \text{ мм}^2$;
- б) $L = 10 \text{ см}$, $\tau = 1 \text{ с}$, $S = 2 \text{ мм}^2$;
- в) $L = 10 \text{ см}$, $\tau = 10 \text{ с}$, $S = 5 \text{ мм}^2$;
- г) $L = 5 \text{ см}$, $\tau = 2 \text{ с}$, $S = 10 \text{ мм}^2$.

6.2

Вычислить характерное поле для теплового механизма нелинейности в квантовой радиофизике, плотность потока энергии и мощность лазера, если рабочим телом является кристалл с плотностью $\rho = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, удельной теплоемкостью $C = 5 \cdot 10^2 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$, коэффициентом поглощения излучения $\kappa = 10^{-5}$, находящийся при температуре $T_0 = 300 \text{ К}$. Длина образца L , длительность воздействия τ и площадь сечения лазерного пучка S заданы:

- а) $L = 3 \text{ см}$, $\tau = 3 \text{ с}$, $S = 1 \text{ мм}^2$;
- б) $L = 5 \text{ см}$, $\tau = 10 \text{ с}$, $S = 2 \text{ мм}^2$;
- в) $L = 10 \text{ см}$, $\tau = 1 \text{ с}$, $S = 5 \text{ мм}^2$;
- г) $L = 10 \text{ см}$, $\tau = 10 \text{ с}$, $S = 10 \text{ мм}^2$.

6.3

Вычислить стрикционное поле, плотность потока энергии и мощность лазера, если рабочим телом является газ с модулем всестороннего сжатия $K = 10^5 \text{ Н/м}^2$, возмущением относительной электрической проницаемости $\Delta\epsilon = 0,1$ и площадью сечения лазерного пучка $S = 1 \text{ мм}^2$.

6.4

Вычислить стрикционное поле, плотность потока энергии и мощность лазера, если рабочим телом является жидкость с модулем всестороннего сжатия $K = 5 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, возмущением относительной электрической проницаемости $\Delta\epsilon = 0,1$ и площадью сечения лазерного пучка $S = 1 \text{ мм}^2$.

6.5

Вычислить стрикционное поле, плотность потока энергии и мощность лазера, если рабочим телом является кристалл с модулем всестороннего сжатия $K = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², возмущением относительной электрической проницаемости $\Delta\epsilon = 0,1$ и площадью сечения лазерного пучка $S = 1$ мм².

6.6

Вычислить значение внутриатомного поля, плотность потока энергии и мощность лазера, воздействующего на вещество, при заданном размере радиуса атома и площади сечения лазерного пучка $S = 1$ мм²:

а) $r_a = 0,1$ нм; б) $r_a = 0,2$ нм; в) $r_a = 0,4$ нм; г) $r_a = 0,6$ нм.

6.7

Вычислить радиус первой боровской орбиты, значение характерного поля при атомном механизме нелинейности, необходимую плотность потока энергии и мощность лазера для воздействия на вещество с целью создания нелинейного отклика атомных осцилляторов. Принять площадь сечения лазерного пучка, равной 1 мм².

6.8

Сравнить и объяснить значения напряженности электрического поля при атомном и релятивистском механизмах нелинейности.

6.9

Сравнить и объяснить значения напряженности электрического поля при атомном и вакуумном механизмах нелинейности.

6.10

Сравнить и объяснить значения напряженности электрического поля при релятивистском и вакуумном механизмах нелинейности.

6.11

Вычислить значение характерного поля при релятивистском механизме нелинейности, плотность потока энергии и мощность лазера при заданной частоте электромагнитного излучения ω и площади сечения лазерного пучка S :

а) $\omega = 10^{14}$ с⁻¹, $S = 1$ мм²; б) $\omega = 10^{15}$ с⁻¹, $S = 1$ мм²;

в) $\omega = 10^{16}$ с⁻¹, $S = 10$ мм²; г) $\omega = 5 \cdot 10^{16}$ с⁻¹, $S = 10$ мм².

6.12

Вычислить значение характерного поля при вакуумном механизме нелинейности, плотность потока энергии и мощность лазера при заданной площади сечения лазерного пучка S :

а) $S = 1$ мм²; б) $S = 0,1$ мм²; в) $S = 0,01$ мм²; г) $S = 0,001$ мм².

6.13

Вычислить энергию лазерного импульса, плотность потока энергии и объемную плотность энергии при заданной мощности P лазера, длительности импульса τ и сечении пучка $S = 1 \text{ мм}^2$:

- а) $P = 10^{19} \text{ Вт}$, $\tau = 10 \text{ фс}$;
- б) $P = 10^{19} \text{ Вт}$, $\tau = 100 \text{ фс}$;
- в) $P = 10^{20} \text{ Вт}$, $\tau = 1 \text{ фс}$;
- г) $P = 10^{20} \text{ Вт}$, $\tau = 10^3 \text{ фс}$.

6.14

Вычислить энергию, объемную плотность энергии и частоту излучения при аннигиляции протона и антипротона. Сравнить с соответствующими параметрами уникального лазера. Принять массу протона (антипротона) $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$, радиус протона $1 \text{ фм} = 10^{-15} \text{ м}$.

6.15

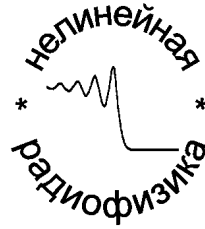
Найти зависимости амплитуды основной и второй гармоник от пройденного расстояния при их когерентном взаимодействии в нелинейной среде. Вычислить эффективность энергетических преобразований. Считать, что $\delta_2 / \delta_1 = 0,7$, $\delta_1, \delta_2 > 0$. При анализе принять, что $A_{10} \gg A_{20}$.

- а)
$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1 A_2, & A_1(0) = A_{10}; \\ \frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1 A_2, & A_2(0) = A_{20}; \end{cases}$$
- б)
$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_0 A_2, & A_1(0) = A_{10}, \quad A_0 = \text{const}; \\ \frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_0 A_1, & A_2(0) = 0; \end{cases}$$
- в)
$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1 A_2^2, & A_1(0) = A_{10}; \\ \frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^2 A_2, & A_2(0) = A_{20}; \end{cases}$$
- г)
$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1^2 A_2^2, & A_1(0) = A_{10}; \\ \frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^2 A_2^2, & A_2(0) = A_{20}. \end{cases}$$

6.16

Вычислить эффективность генерации второй гармоники при $A_{10} \gg A_{20}$, $\delta_1, \delta_2 > 0$ и $\delta_2 / \delta_1 = 0,8$, если двухволновое взаимодействие описывается следующей системой:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & \begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1 A_2^3, & A_1(0) = A_{10}; \\ \frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^3 A_2, & A_2(0) = A_{20}; \end{cases} \\
 \text{б) } & \begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1^2 A_2^2, & A_1(0) = A_{10}; \\ \frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^4, & A_2(0) = A_{20}; \end{cases} \\
 \text{в) } & \begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1^2 A_2^4, & A_1(0) = A_{10}; \\ \frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^4 A_2^2, & A_2(0) = A_{20}; \end{cases} \\
 \text{г) } & \begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1 A_2^4, & A_1(0) = A_{10}; \\ \frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^4 A_2, & A_2(0) = A_{20}. \end{cases}
 \end{aligned}$$



Глава 7. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ РАДИОФИЗИКИ

7.1. Основные понятия и соотношения

В задачах этого раздела одновременно присутствуют две трудности – *нелинейность* и *стохастичность* процессов. Такие процессы описываются нелинейными стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ). Для их решения разработан ряд методов.

Метод усреднения точного решения СДУ применяется тогда, когда удастся аналитически решить исходное СДУ. Далее вычисляются необходимые моменты для решения $x(t)$. Особенно просто обстоит дело для линейных уравнений вида:

$$\hat{L}x(t) = \xi(t), \quad (9.1)$$

где $\hat{L}$ – линейный оператор, $\xi(t)$ – заданный случайный процесс. Если существует обратный оператор $\hat{L}_1 = \hat{L}^{-1}$, то $x(t) = \hat{L}_1 \xi(t)$, а значит

$$\begin{aligned} \overline{x(t)} &= \hat{L}_1 \overline{\xi(t)}, \\ R_x(t_1, t_2) &= \overline{x(t_1)x(t_2)} = \hat{L}_1(t_1) \hat{L}_2(t_2) R_\xi(t_1, t_2), \end{aligned}$$

где R_x и R_ξ – соответствующие ковариационные функции.

При решении нелинейных СДУ вида:

$$\hat{L}x = f(x) + \xi(t), \quad (9.2)$$

целесообразно использовать следующие приближенные методы.

Методы линеаризации сводятся к разложению $f(x)$ в ряды типа:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \\ f(x) &\approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}), \end{aligned}$$

т. е. линеаризации (8.2), после чего СДУ решается также, как (8.1).

Метод статистической линеаризации предполагает замену четной функции $f(x)$ на α , а нечетной $f(x)$ – на βx . Константы α и β находятся из дополнительных условий. Часто, например, можно потребовать минимизации функционалов:

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \overline{(\alpha - f(x))^2}, \\ J(\beta) &= \overline{(\beta x - f(x))^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha = \overline{f(x)}, \quad \beta = \frac{\overline{x f(x)}}{\overline{x^2}}.$$

При этом для вычисления $\overline{f(x)}$, $\overline{x^2}$ и $\overline{x f(x)}$ задаются законом распределения плотности вероятности процесса $x(t)$.

Метод уравнения Дайсона для средних значений полезен при решении уравнений типа:

$$\hat{L}x = \hat{N}(x, \xi) + f(t), \quad (9.3)$$

где $\xi(t)$, $f(t)$ – случайные процессы, $\hat{N}$ – нелинейный оператор. Сначала из (9.3) получают уравнение для $\tilde{x} = x - \bar{x}$. Оно имеет вид:

$$\hat{L}\tilde{x} = \hat{N} - \bar{\hat{N}} + f - \bar{f}. \quad (9.4)$$

Оператор $\hat{N}$ линеаризуют по $\tilde{x}$ и $\tilde{\xi} = \xi - \bar{\xi}$ и приходят к такому выражению

$$\hat{N}(x, \xi) \approx \hat{N}(\bar{x}, \bar{\xi}) + \left(\frac{\partial \hat{N}}{\partial x} \right)_{\bar{x}, \bar{\xi}} \tilde{x} + \left(\frac{\partial \hat{N}}{\partial \xi} \right)_{\bar{x}, \bar{\xi}} \tilde{\xi},$$

откуда $\bar{\hat{N}}(x, \xi) \approx \hat{N}(\bar{x}, \bar{\xi})$. При этом

$$\begin{aligned} \hat{N}(x, \xi) - \bar{\hat{N}}(x, \xi) &\approx \left(\frac{\partial \hat{N}}{\partial x} \right)_{\bar{x}, \bar{\xi}} \tilde{x} + \left(\frac{\partial \hat{N}}{\partial \xi} \right)_{\bar{x}, \bar{\xi}} \tilde{\xi} \equiv \beta \tilde{x} + \gamma \tilde{\xi}, \\ \beta &= \left(\frac{\partial \hat{N}}{\partial x} \right)_{\bar{x}, \bar{\xi}}, \quad \gamma = \left(\frac{\partial \hat{N}}{\partial \xi} \right)_{\bar{x}, \bar{\xi}}, \end{aligned}$$

а соотношение (9.4) сводится к такому

$$\hat{L}\tilde{x} \approx \beta \tilde{x} + \gamma \tilde{\xi} + \tilde{f}, \quad \tilde{f} = f - \bar{f}.$$

Отсюда решение для $\tilde{x}$ в первом приближении принимает вид:

$$\tilde{x} \approx \tilde{x}^{(1)} = \hat{L}_1(\gamma \bar{\xi} + \tilde{f}) \equiv F_1(\bar{x}, \bar{\xi}, \tilde{f}).$$

Зная $\tilde{x}^{(1)}$, можно вычислить:

$$\bar{\hat{N}} \approx \overline{\hat{N}(\tilde{x}^{(1)})} \equiv F_2(\bar{x}) + \bar{f}$$

и получить уравнение Дайсона для $\bar{x}$

$$\hat{L}\bar{x} \approx F_2(\bar{x}) + \bar{f}.$$

7.2. Примеры

Пример 1

Путем усреднения точного решения нелинейной задачи вычислить $\overline{A(t)}$, $\overline{A^2(t)}$ и $\sigma_A^2(t)$ процесса, описываемого выражением:

$$A(t) = A_0 e^{-|\xi|}, \quad \xi = x - ut.$$

Заданы следующие моменты случайного процесса $A_0(t)$: $\overline{A_0}$ и σ_0^2 .

Решение

По определению

$$\begin{aligned}\overline{A(t)} &= \overline{A_0 e^{-|\xi|}} = \overline{A_0} e^{-|\xi|}, \\ \overline{A^2(t)} &= \overline{(A_0 e^{-|\xi|})^2} = \overline{A_0^2} e^{-2|\xi|}, \\ \sigma_A^2(t) &= \overline{A^2(t)} - \overline{A(t)}^2.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\overline{A(t)} &= \overline{A_0} e^{-|\xi|}, \\ \overline{A^2(t)} &= \left(\sigma_0^2 + \overline{A_0}^2 \right) e^{-2|\xi|}, \\ \sigma_A^2(t) &= \sigma_0^2 e^{-2|\xi|}.\end{aligned}$$

Пример 2

Считая, что $|x| \ll 1$, и используя метод линеаризации, решить стохастическое дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{sh} x + \xi(t), \quad x(0) = 0.$$

где $\xi(t)$ – заданный случайный процесс. Вычислить $\overline{x(t)}$, если $\overline{\xi(t)} = 0$.

Решение

При $|x| \ll 1$ функция $\operatorname{sh} x \approx x$. Тогда

$$\frac{dx}{dt} - x = \xi(t), \quad x(0) = 0. \quad (9.5)$$

Решение соответствующего однородного уравнения

$$\frac{dx_0}{dt} - x_0 = 0$$

имеет вид:

$$x_0(t) = Ce^t. \quad (9.6)$$

Тогда решение неоднородного уравнения ищем методом вариации произвольной постоянной, полагая $C = C(t)$. Подставим (9.6) в (9.3) и получим

$$\frac{dC}{dt}e^t = \xi(t),$$

откуда

$$C(t) = \int_t \xi(t')e^{-t'}dt'.$$

Общее решение неоднородного уравнения (9.5) имеет вид

$$x(t) = e^t \int_{t_0}^t \xi(t')e^{-t'}dt'.$$

Из начального условия следует, что $t_0 = 0$. Тогда при $\overline{\xi(t)} = 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t \int_0^t \xi(t')e^{-t'}dt', \\ \overline{x(t)} &= e^t \int_0^t \overline{\xi(t')}e^{-t'}dt' = 0. \end{aligned}$$

Пример 3

Используя метод статистической линеаризации, решить стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{sh} x + \xi(t), \quad x(0) = 0,$$

где $\xi(t)$ – заданный случайный процесс. Закон распределения x – нормальный с $\bar{x} = 0$ и дисперсией σ_x^2 .

Решение

Так как функция $f(x) = \text{sh}(x)$ – нечетная, то заменим $f(x)$ на βx и потребуем

$$\overline{(f(x) - \beta x)^2} = \min,$$

откуда

$$\beta = \frac{\overline{xf(x)}}{\overline{x^2}}.$$

Поскольку $\overline{x^2} = \sigma_x^2$, так как $\bar{x} = 0$, остается вычислить

$$\overline{xf(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^{+\infty} x \text{sh} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} dx = \sigma_x^2 e^{\frac{\sigma_x^2}{2}}.$$

Тогда $\beta = e^{\frac{1}{2}\sigma_x^2}$. Далее решаем уже линеаризованное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \beta x + \xi(t).$$

Поскольку решение однородного уравнения имеет вид

$$x_0(t) = Ce^{\beta t},$$

решение неоднородного уравнения таково:

$$x(t) = e^{\beta t} \int_{t_0}^t \xi(t') e^{-\beta t'} dt'.$$

С учетом начального условия $t_0 = 0$ получаем

$$x(t) = e^{\beta t} \int_0^t \xi(t') e^{-\beta t'} dt',$$

где $\beta = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_x^2\right)$.

Пример 4

Получить уравнение Дайсона для стохастического дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = x\xi, \quad x(0) = 1,$$

где $\xi(t)$ – случайный процесс с $\bar{\xi} = 0$, $R_\xi(t, t') = \sigma_\xi^2 \delta(t - t')$.

Решение

После усреднения исходного уравнения имеем:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{x}\bar{\xi}.$$

Тогда для $\tilde{x} = x - \bar{x}$ получим:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = x\xi - \bar{x}\bar{\xi}.$$

Линеаризуем нелинейный функционал $x\xi$:

$$x\xi = (\bar{x} + \tilde{x})(\bar{\xi} + \tilde{\xi}) \approx \bar{x}\tilde{\xi}.$$

При этом $\overline{x\xi} \approx \bar{x}\bar{\xi} = \bar{x}\bar{\xi} = 0$. Отсюда

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \bar{x}\tilde{\xi}. \tag{9.7}$$

Решение (9.7) имеет вид:

$$\tilde{x}(t) \equiv \tilde{x}^{(1)}(t) = \bar{x} \int_0^t \tilde{\xi}(t') dt' + C.$$

Так как $\overline{\tilde{x}(t)} = 0$, то $C = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\overline{x\xi} &\approx \overline{(\bar{x} + \tilde{x}^{(1)})\tilde{\xi}} = \overline{\bar{x}\tilde{\xi}} + \overline{\tilde{x}^{(1)}\tilde{\xi}} = \bar{x}\overline{\tilde{\xi}} + \overline{\tilde{x}^{(1)}\tilde{\xi}} = \\ &= \overline{\tilde{x}^{(1)}\tilde{\xi}} = \tilde{\xi}(t)\bar{x}\int_0^t \tilde{\xi}(t')dt' = \bar{x}\int_0^t \tilde{\xi}(t) \cdot \tilde{\xi}(t')dt' = \\ &= \bar{x}\int_0^t R_{\xi}(t, t')dt' = \bar{x}\alpha\sigma_{\xi}^2\int_0^t \delta(t - t')dt'.\end{aligned}$$

Так как $0 \leq t' \leq t$, то

$$\int_0^t \delta(t - t')dt' = 1, \quad \overline{x\xi} = \alpha\bar{x}\sigma_{\xi}^2.$$

Следовательно, уравнение Дайсона имеет вид:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} \approx \alpha\bar{x}\sigma_{\xi}^2.$$

Его решение дается выражением

$$\bar{x}(t) = \bar{x}(0)\exp(\alpha\sigma_{\xi}^2 t)$$

Окончательно для $x(t) \approx \bar{x} + \tilde{x}^{(1)}(t)$ получим

$$x(t) \approx \bar{x}(0)\exp(\alpha\sigma_{\xi}^2 t) + \tilde{x}^{(1)}(t) = \bar{x}(0)\exp(\alpha\sigma_{\xi}^2 t) + \bar{x}\int_0^t \tilde{\xi}(t')dt'.$$

7.3. Задачи для самостоятельного решения

9.1

Путем усреднения точного решения нелинейной задачи вычислить $\overline{A(t)}$, $\overline{A^2(t)}$, $\sigma_A^2(t)$ для процесса, описываемого выражением:

$$а) A(t) = A_0 e^{\lambda t}, \quad б) A(t) = A_0 \text{ch}^{-1}\xi, \quad \xi = x - ut,$$

$$в) A(t) = A_0 \text{ch}^{-2}\xi, \quad \xi = x - ut, \quad г) A(t) = A_0 e^{-\xi^2}, \quad \xi = x - ut.$$

Заданы такие моменты случайного процесса $A_0(t)$: $\overline{A_0}$ и дисперсия σ_0^2 .

9.2

Считая, что $|x| \ll 1$, и используя метод линеаризации, решить стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t), \quad x(0)=0,$$

где $\xi(t)$ – заданный случайный процесс, для случаев:

- а) $f(x) = e^{-x}$, б) $f(x) = \sin x$,
в) $f(x) = (1+x)^2$, г) $f(x) = \left(1 - \frac{x}{3}\right)^3$.

Вычислить $\overline{x(t)}$, полагая $\overline{\xi(t)} = 0$.

9.3

Используя метод статистической линеаризации, решить стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t), \quad x(0) = 0,$$

где $\xi(t)$ – заданный случайный процесс. Принять, что:

- а) $f(x) = \sin x$, б) $f(x) = x^3$,
в) $f(x) = 1 + x^2$, г) $f(x) = \cos x$.

Закон распределения x – нормальный с $\bar{x} = 0$ и дисперсией σ_x^2 .

9.4

Получить уравнение Дайсона для стохастического дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t), \quad x(0) = 0,$$

где $\xi(t)$ – заданный случайный процесс. Принять, что:

- а) $f(x) = \cos x$, б) $f(x) = \sin x$,
в) $f(x) = x^3$, г) $f(x) = 1 + x^2$.



Глава 8. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС И САМООРГАНИЗАЦИЯ

8.1. Основные понятия и соотношения

Хаос может возникать в очень простых детерминированных системах, но непременно *нелинейных* и *динамических*. Он получил название *детерминированного* или *динамического* хаоса. Такой хаос отличается от случайного процесса. В динамическом хаосе есть *гармония*, удастся предсказать тип возможной структуры. Геометрическим образом хаоса являются *странные аттракторы* – неустойчивые траектории в фазовом пространстве. Сечение странных аттракторов представляет собой хаотические фигуры, являющиеся примерами фракталов.

Фракталом называется объект, обладающий свойством самоподобия и дробной размерностью. В отличие от целочисленной (или *топологической*) размерности d_T дробную размерность d_H называют *хаусдорфовой*. Ее можно вычислить по формуле:

$$d_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(r_n))}{\ln(1/r_n)}, \quad (10.1)$$

где r_n – сторона d_T -мерного “кубика”, погруженного в d_T -мерное пространство, $N(r_n)$ – число “кубиков” в единичном объеме.

Динамический хаос и *самоорганизация* – две реализации одного и того же процесса. Порядок и хаос эквивалентны устойчивости и неустойчивости системы.

Устойчивость динамических систем удобно исследовать, переходя от дифференциального уравнения к *точечным отображениям*. Траектории в фазовом пространстве порождают на секущей гиперплоскости точечные отображения, представляющие собой закон соответствия между предыдущей и после-

дующими точками пересечения. Каждая последующая точка x_{n+1} получается путем применения к предыдущей точке x_n , некоторого преобразования вида

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda), \quad (10.2)$$

где λ – параметр. Так называемые неподвижные точки x^* находятся из уравнения:

$$x^* = f(x^*). \quad (10.3)$$

Если $x_1 = x^*$, то для всех $n > 1$ имеем $x_n = x^*$.

К отображениям также относятся преобразования следующего вида:

$$y = \underbrace{f(f \dots (x))}_{n \text{ раз}} \equiv f^{[n]}(x). \quad (10.4)$$

Рациональным x_n , множество которых счетное, соответствуют устойчивые и повторяющиеся траектории, т.е. порядок, а иррациональным – неустойчивые траектории, т.е. хаос.

Самоорганизация является результатом *уравновешивания* хаотических и коллективных эффектов.

Автоволны – один из примеров самоорганизации. Автоволнами называют волны, распространяющиеся в *открытых* системах (активных средах) без затухания.

Явление самоорганизации связано с “забыванием” начальных условий. Например, уравнение теплопроводности (диффузии), традиционно описывающее диссипативный процесс, т.е. исчезновение порядка, допускает решение в виде стационарных волн (автоволн).

При этом уравнение должно быть нелинейным и с источником такого типа:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = F(T) + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (10.5)$$

Уравнение (10.5) допускает решение, описывающее стационарные волны $T = f(x - ut)$, амплитуда которых стремится к постоянному значению. Оно следует из соотношения $F(T_\infty) = 0$. Скорость движения фронта волны при $t \rightarrow \infty$ стремится к величине

$$v_0 = 2\sqrt{\kappa F'(T_0)}.$$

Здесь $\kappa(T) = \kappa(T_0)$, T_0 – невозмущенное значение T .

Другими примерами самоорганизации являются ступенчатый профиль уровня воды на горных реках, ячейки Бенара, кольца Сатурна, явление морфогенеза в биологии и многие другие упорядоченные структуры.

8.2. Примеры

Пример 1

Для отображения $x_{n+1} = 1 - 2|x_n|$ показать:

- а) существование цикла с периодом 2 при $x_1 = 0,1$;
- б) существование предельных циклов при $x_1 = 0,5$ и $x_1 = 1/3$;
- в) появление хаоса при $x_1 = e$.

Решение

При $x_1=0,1$ имеем $x_2=0,8$, $x_3=-0,6$, $x_4=0,2$, $x_5=0,6$, $x_6=0,2$, $x_7=0,6...$ Таким образом, период равен 2.

При $x_1=0,5$ получаем $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=-1$, $x_5=-1$, $x_6=-1...$ Следовательно для этого значения x_1 при $n=4$ наступает предельный цикл, когда $x_{n+1} = x_n$.

Аналогично при $x_1=1/3$, $x_2=1/3$, ..., $x_n=1/3...$ цикл является предельным.

При иррациональном значении $x_1=e$, $x_2=1-2e$, $x_3=1-2|1-2e|=3-4e$, $x_4=1-2|3-4e|=7-8e$, $x_5=1-2|7-8e|...$, $x_n=2^{n-1}-1+2^{n+1}e...$, все x_n для любого n являются иррациональными. Это означает, что режим динамической системы является хаотическим.

Пример 2

Для отображения $x_{n+1} = 1 - 2|x_n|$ вычислить неподвижные точки.

Решение

Неподвижные точки находятся из условия

$$x^* = 1 - 2|x^*|.$$

Отсюда имеем

$$x^* = 1 - 2x^*, \quad x_1^* = \frac{1}{3},$$

или

$$x^* = 1 + 2x^*, \quad x_1^* = -1,$$

Пример 3

Для нелинейного уравнения диффузии вида

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma N^3 - \alpha N^2 + D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}; \quad \gamma, \alpha = \text{const.}$$

вычислить скорость движения фронта волны при $t \rightarrow \infty$, найти амплитуду стационарного решения.

Решение

Амплитуда стационарного решения находится из условия:

$$F(N_\infty) = \gamma N_\infty^3 - \alpha N_\infty^2 = 0;$$

отсюда нетривиальное решение имеет вид

$$N_\infty = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Скорость движения фронта волны

$$v_0 \Big|_{t \rightarrow \infty} = 2\sqrt{DF'(N_0)},$$

где

$$F'(N_0) = 3\gamma N_0^2 - 2\alpha N_0.$$

Тогда скорость фронта

$$v_0 \Big|_{t \rightarrow \infty} = 2\sqrt{(3\gamma N_0 - 2\alpha)N_0 D}.$$

Пример 4

Вычислить хаусдорфову и топологическую размерности “ковра” Серпинского, который получается последовательным делением единичного квадрата на 9 равных частей и выбрасыванием центральной части.

Решение

Рассмотрим алгоритм построения указанного объекта:

№ шага	Количество оставшихся квадратов	Длина стороны одного квадрата	Площадь одного квадрата
0 	$N=8^0$	$r_0=1$	$S_0=1$
1 	$N=8^1$	$r_1=\frac{1}{3}$	$S_1=\frac{1}{3^2}$
2 	$N=8^2$	$r_2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$S_2=\frac{1}{3^4}$
...	...	...	...
N	$N=8^n$	$r_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$S_n=\frac{1}{3^{2n}}$

Хаусдорфова размерность “ковра” Серпинского равна

$$d_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(r_n)}{\ln r_n^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 8}{\ln 3}; \quad 1 < d_H < 2.$$

Площадь выброшенных квадратов составляет

$$\begin{aligned} S &= S_1 + 8S_2 + 8^2S_3 + \dots + 8^{n-1}S_n = \\ &= \frac{1}{9} \left(1 + \frac{8}{9} + \dots + \frac{8^{n-1}}{9^{n-1}} \right) = \frac{1}{9} \frac{1}{1 - \frac{8}{9}} = 1. \end{aligned}$$

Площадь оставшейся фигуры равна $S_{\text{ост}} = 1 - S = 0$, а значит, топологическая размерность “ковра” Серпинского $d_T = 1$.

8.3. Задачи для самостоятельного решения

10.1

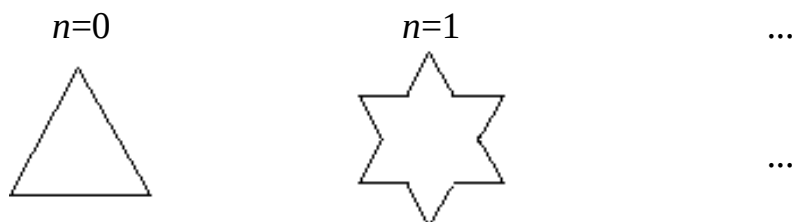
Вычислить хаусдорфову размерность множества, образованного последовательным делением единичного отрезка на m равных частей и выбрасыванием двух частей

- а) второй и третьей, $m=4$;
- б) второй и четвертой, $m=4$;
- в) первой и третьей, $m=4$;
- г) второй и четвертой, $m=5$.

10.2

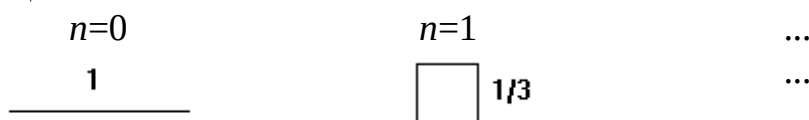
Вычислить хаусдорфову размерность

- а) треугольника Кох:



- б) квадрата Кох (множества, построенного аналогично треугольнику Кох, но на основе единичного квадрата);

- в) следующего множества:



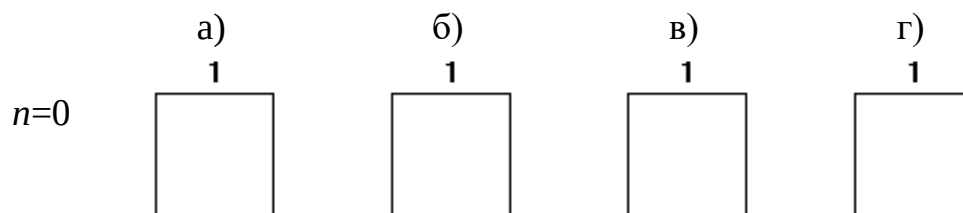
- г) квадрата, построенного по принципу множества в);
- д) множества, аналогичного в), но при этом отрезок делится не на 3, а на m частей.

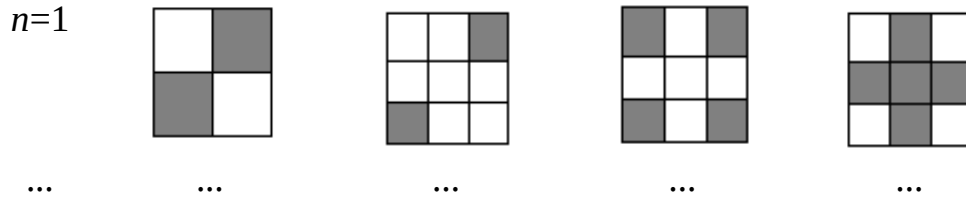
10.3

Вычислить хаусдорфову размерность множества, образованного последовательным делением единичного отрезка на m равных частей и выбрасыванием k частей.

10.4

Вычислить хаусдорфову и топологическую размерности следующих множеств:





10.5

Вычислить хаусдорфову и топологическую размерности “дырявого” куба (губки Менгера), образованного выбрасыванием среднего кубика после деления сторон куба на три равные части.

10.6

Обобщить результат задачи 9.5 на случай m -мерного куба с делением сторон на k равных частей.

10.7

Для отображения $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$ найти неподвижные точки и выяснить устойчивость траекторий при:

- а) $\lambda = 0,5$, б) $\lambda = 1$, в) $\lambda = 2$, г) $\lambda = 4$.

10.8

Для отображения $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$ выяснить устойчивость траекторий при $0 \leq \lambda < \infty$.

10.9

Для нелинейного уравнения теплопроводности вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = F(T) + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \kappa = \text{const.}$$

найти амплитуду стационарного решения и скорость движения фронта волны. Принять

- а) $F(T) = \alpha T - \beta T^2$, б) $F(T) = \alpha T^2 - \beta T$,
в) $F(T) = \alpha T^3 - \beta T$, г) $F(T) = \alpha T^4 - \beta T^2$.



Литература

1. Основная

1. Виноградова М. Б. , Руденко О. В. , Сухоруков А. П. Теория волн. – М.: Наука, 1979; 384 с.–1990. – 432 с.
2. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. – М.: Наука, 1988.–368 с.
3. Рабинович М. И. , Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
4. Черногор Л. Ф. Нелинейная радиофизика. Издание третье, дополненное и переработанное. – Харьков: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2006. – 204 с.
5. Черногор Л. Ф. Нелінійна радіофізика. Харків, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2006. 200 с.

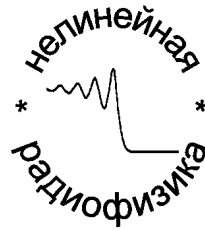
2. Дополнительная

6. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. –М.: Наука, 1990. – 312 с.
7. Анищенко В. С. Детерминированный хаос. – Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 6. – С. 70 – 76.
8. Арцимович Л. А. , Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков.– М.: Атомиздат, 1979. – 320 с.
9. Ахманов С. А. , Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики.– М.: ВИНТИ, 1964. – 295 с.
10. Ахманов С. А. , Дьяков Ю. Е. , Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику.–М.: Наука, 1981. – Гл. 8.
11. Басс Ф. Г. , Гуревич Ю. Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда. – М.: Наука, 1975. – 400 с.

12. Бломберген Н. Нелинейная оптика. – М.: Мир, 1966. – 476 с.
13. Борисов Н. Д., Гуревич А. В., Милих Г. М. Искусственная ионизированная область в атмосфере. – М.: ИЗМИРАН, 1986. – 184 с.
14. Вильгельмссон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. – М.: Энергоиздат, 1981. – 224 с.
15. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 296 с.
16. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович И. М. Нелинейная физика. Стохастичность и структуры // Физика XX века: Развитие и перспективы. – М.: Наука, 1984. – С. 219 – 280.
17. Геккер И. Р. Взаимодействие сильных электромагнитных полей с плазмой. – М., Атомиздат, 1978. – 310 с.
18. Гинзбург В. Л. О перспективах развития физики и астрофизики в конце XX века // Физика XX века: Развитие и перспективы. – М.: Наука, 1984. – С. 281 – 331.
19. Гинзбург В. Л. О некоторых успехах физики и астрономии за последние три года // УФН, 2002. – Т. 172, № 2. – С. 213 – 219.
20. Гинзбург В. Л. О сверхпроводимости и сверхтекучести (что мне удалось сделать, а что не удалось), а также о “физическом минимуме” на начало XXI века // УФН, 2004. – Т. 174, № 11. – С. 1240 – 1255.
21. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. – М.: Мир, 1973. 280 с.
22. Горбатов С. Н., Малахов А. Н., Саичев А. И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. – М.: Наука, 1990. – 216 с.
23. Гуревич Г. М., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
24. Дмитриев А. С., Кислов В. Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. – М.: Наука, 1989. – 280 с.
25. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. – М.: Наука, 1976. – 240 с.
26. Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Синергетика как новое мировидение: диалог с И. Пригожиным // Вопросы философии. – 1992. – № 12. – С. 3 – 20.
27. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. – М.: Наука, 1973. – 176 с.
28. Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 288 с.
29. Коротеев Н. И., Шумай И. Л. Физика мощного лазерного излучения. – М.: Наука, 1991. – 312 с.
30. Кудрявцев И. К., Лебедев С. А. Синергетика как парадигма нелинейности // Вопросы философии. – 2002. – № 12. – С. 55 – 63.
31. Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Введение в синергетику. – М.: Наука, 1990. – 272 с.

32. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. – Перевод с англ. – М.: Мир, 1983. – 408 с.
33. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. – М.: Эффекториал УРСС, 2000. – 336 с.
34. Митяков Н. А., Грач С. М., Митяков С. Н. Возмущение ионосферы мощными радиоволнами. Итоги науки и техники. Серия «Геомагнетизм и высокие слои атмосферы» – М.: ВИНТИ, 1989. – Т. 9. С. 1 – 140.
35. Мун Ф. Хаотические колебания. – М.: Мир, 1990. – 312 с.
36. Наугольных К. А., Островский Л. А. Нелинейные волновые процессы в акустике. – М.: Наука, 1990. – 237 с.
37. Нелинейные волны. Под редакцией С. Лейбовича, А. Сибасса. Перевод с англ. – М.: Мир, 1977. – 320 с.
38. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979. – 512 с.
39. Островский Л. А., Потапов А. И. Введение в теорию модулированных волн. – М.: Физмат, 2003. – 400 с.
40. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
41. Потапов А. А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. – М.: Логос, 2002. – 664 с.
42. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. – М.: Наука, Физматлит, 2000. – 272 с.
43. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987. – 480 с.
44. Свирежев Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
45. Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. – М.: Наука, 1973. – 288 с.
46. Синергетическая парадигма. Нелинейное мышление в науке и искусстве. Отв. ред. Концик В. А. – М.: Прогресс-Традиция, 2002.
47. Синергетическая парадигма. Человек и общество в условиях неустойчивости. Отв. ред. Астафьева О. Н. – М.: Прогресс-Традиция, 2003. – 583 с.
48. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике / Перевод с англ. – М.: Сов. радио, 1977. – 368 с.
49. Солитоны. Под редакцией Р. Буллефа, Ф. Кодри. – Перевод с англ. – М.: Мир, 1983. – 408 с.
50. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. Пер. с англ. М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 320 с.
51. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны/Перевод с англ. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
52. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1987. – 232 с.

53. Филиппов А. Т. Многоликий солитон. 2-е изд. – М.: Наука, 1990. – 224 с.
54. Хакен Г. Синергетика. – М.: Мир, 1980. – 404 с.
55. Черногор Л. Ф. Естествознание. Интегрирующий курс. – Харьков: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2007. – 536 с.
56. Черногор Л. Ф. Физика Земли, атмосферы и геокосмоса в свете системной парадигмы // Радиофизика и радиоастрономия. – 2003. – Т. 8, № 1. – С. 59 – 106.
57. Черногор Л. Ф. Цунами – глобальная природная катастрофа // Universitates. – 2005. – № 1. С. 22 – 35.
58. Черногор Л. Ф. Земля – атмосфера – ионосфера – магнитосфера как открытая динамическая нелинейная физическая система // Нелинейный мир. – 2006. – Т. 4, № 12. С. 655–698 (часть 1). – Т. 5, № 5. – 2007. С. 198 – 231.
59. Черногор Л. Ф. Нелинейность как основа новой научной картины мира // Universitates. – 2006. – №4. – С. 40 – 51.
60. Черногор Л. Ф. Нелинейность – универсальное, фундаментальное и главное свойство мира. Успехи современной радиоэлектроники. – 2007. – №1. – С. 3 – 47.
61. Шварцбург А. Б. Геометрическая оптика в нелинейной теории волн. М.: Наука, 1976. – 120 с.
62. Шен И. Р. Принципы нелинейной оптики. М.: Наука, 1989. – 560 с.
63. Шуберт М., Вильгельми Б. Введение в нелинейную оптику. – М.: Мир, 1973. – Ч. I. – 216 с. 1975. Ч. II. – 228 с.
64. Шустер Г. Детерминированный хаос. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
65. Baker G. L., Gollub J. P. Chaotic Dynamics. Cambridge University Press, 1996. – 258 p.
66. Gurevich A. V. Nonlinear Phenomena in the Ionosphere. N.-Y., Springer-Verlag, 1978. – 372 p.



ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Определение гиперболических функций.

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\operatorname{cth} x}.$$

2. Формулы Эйлера для комплексных чисел

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z; \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z;$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

3. Ряды Тейлора и Мак-Лорена.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

4. Разложение некоторых функций в степенные ряды

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\dots + (\pm 1)^n \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad m > 0, \quad |x| < 1;$$

$$(1 \pm x)^{-m} = 1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\dots + (\pm 1)^n \frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{n!}x^n + \dots, \quad m > 0, \quad |x| < 1;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in R;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in R;$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in R;$$

$$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \dots, \quad x \in R;$$

$$\ln x = 2 \left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \dots + \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}} + \dots \right),$$

$x > 0;$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \leq 1;$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots, \quad -1 \leq x < 1;$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in R;$$

$$\operatorname{ch} x = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in R;$$

5. Некоторые интегралы, наиболее часто встречающиеся при решении задач.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C, \quad a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a - x}{a + x} \right| + C, \quad a \neq 0;$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C;$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a, \quad a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| + C, \quad a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C, \quad |x| > |a|, \quad a \neq 0;$$

$$\int \sin^2 mx dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4m} \sin 2mx + C;$$

$$\int \cos^2 mx dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4m} \sin 2mx + C;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi};$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} x^n dx = \frac{1}{2a^{n+1}} \Gamma \left(\frac{n+1}{2} \right), \quad a > 0, \quad n > -1;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 \pm px} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{p^2}{4a}}, \quad a > 0;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos mx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a}}, \quad a > 0;$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos mx dx = \frac{a}{a^2 + m^2}, \quad a > 0;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0), \text{ где } f(x) \text{ непрерывна в } x_0.$$

6. Некоторые физические константы.

1. Скорость света в вакууме $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с;
2. Элементарный заряд $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл;
3. Масса покоя электрона $m \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг;
4. Постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К;
5. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



ОТВЕТЫ

2.1

$$a) v_\phi = \frac{c}{(1 + \alpha E)}; E(x, t) = E_0 \cos k_0 \left(x - \frac{ct}{(1 + \alpha E)} \right);$$

$$H(x, t) = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left(1 + \frac{\alpha}{2} E \right) E.$$

$$б) v_\phi = \frac{c}{1 + \alpha E^2}; E(x, t) = E_0 \cos k_0 \left(x - \frac{ct}{1 + \alpha E^2} \right);$$

$$H(x, t) = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left(E + \frac{\alpha}{3} E^3 \right).$$

$$в) v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 + 3\alpha E^2}}; E(x, t) = E_0 \cos k_0 \left(x - \frac{ct}{\sqrt{1 + 3\alpha E^2}} \right);$$

$$H(x, t) = \begin{cases} \alpha \geq 0; \pm \left(\frac{E}{2} \sqrt{1 + 3\alpha E^2} + \frac{1}{2\sqrt{3\alpha}} \ln \left(\sqrt{3\alpha} E + \sqrt{1 + 3\alpha E^2} \right) \right); \\ \alpha < 0; \pm \frac{1}{2\sqrt{3|\alpha|}} \left(\arcsin \sqrt{3|\alpha|} E + \sqrt{3|\alpha|} E \sqrt{1 - 3|\alpha| E^2} \right). \end{cases}$$

$$г) v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0(1 + \alpha E)}}; E(x, t) = E_0 \cos k_0 \left(x - \frac{ct}{\sqrt{\varepsilon_0(1 + \alpha E)}} \right);$$

$$H(x, t) = \pm \frac{2}{3\alpha} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left((1 + \alpha E)^{3/2} - 1 \right).$$

2.2

а) $Ae^{aA} = A_0e^{aA_0}e^{-k_0}$, при $k_0 \gg 1$ $A \approx A_0e^{aA_0}e^{-k_0}$; $P \approx e^{aA_0}$;

$a > 0, P > 1$; $a = A_0^{-1}, P \approx 2,78$;

$a < 0, P < 1$; $a = -A_0^{-1}, P \approx 0,38$;

$a = 0, P = 1$.

$a = A_0^{-1}, A(x) \approx A_0e^{-\alpha_0x+1}$;

$a = -A_0^{-1}, A(x) \approx A_0e^{-\alpha_0x-1}$;

б) $A = \frac{A_0e^{-k_0}}{1 + aA_0(1 - e^{-k_0})}$, при $k_0 \gg 1$ $A \approx \frac{Ae^{-k_0}}{1 + aA_0}$; $P \approx \frac{1}{1 + aA_0}$;

$a > 0, P < 1$; $a = A_0^{-1}, P = 0,5$;

$a < 0, P > 1$; $a = -A_0^{-1}, P = e^{k_0} \gg 1$;

$a=0, P=1$;

$a = A_0^{-1}, A(x) \approx \frac{A_0e^{-\alpha_0x}}{2 + e^{-k_0}}$;

$a = -A_0^{-1}, A(x) \approx A_0$;

в) $Ae^{\frac{a}{3}A^3} = A_0e^{\frac{a}{3}A_0^3}e^{-k_0}$, при $k_0 \gg 1$ $A \approx A_0e^{-k_0}e^{\frac{a}{3}A_0^3}$; $P \approx e^{\frac{a}{3}A_0^3}$;

$a > 0, P > 1$; $a = A_0^{-3}, P \approx 1,4$;

$a < 0, P < 1$; $a = -A_0^{-3}, P \approx 0,7$;

$a = 0, P = 1$.

$a = A_0^{-3}, A(x) \approx A_0e^{\alpha_0x}e^{1/3}$;

$a = -A_0^{-3}, A(x) \approx A_0e^{-\alpha_0x}e^{-1/3}$;

г) $Ae^{aA+\frac{b}{2}A^2} = A_0e^{aA_0+\frac{b}{2}A_0^2}$; при $k_0 \gg 1$

$A \approx A_0e^{aA_0+\frac{b}{2}A_0^2}e^{-k_0}$; $P \approx e^{aA_0+\frac{b}{2}A_0^2}$;

$a > 0, b \geq 0, P > 1$; $a = A_0^{-1}, b = A_0^{-2}, P \approx 4,6$;

$a > 0, b < 0$

$a > \frac{1}{2}|b|A_0, P > 1$; $a = A_0^{-1}, b = A_0^{-2}, P \approx 1,7$;

$$a = \frac{1}{2}|b|A_0, \quad P = 1;$$

$$a < \frac{1}{2}|b|A_0, \quad P < 1;$$

$$a = 0, b > 0, P > 1.$$

$$a = 0, b = 0, P = 1.$$

$$a = 0, b < 0, P < 1.$$

$$a < 0, b > 0$$

$$|a| < \frac{1}{2}bA_0, \quad P > 1;$$

$$|a| = \frac{1}{2}bA_0, \quad P = 1;$$

$$|a| > \frac{1}{2}bA_0, \quad p < 1; \quad a = -A_0^{-1}, \quad b = A_0^{-2}, \quad P \approx 0,6;$$

$$a < 0, b < 0, P < 1; \quad a = -A_0^{-1}, \quad b = A_0^{-2}, \quad P \approx 0,2.$$

$$a = A_0^{-1}, b = A_0^{-2}, A(x) \approx A_0 e^{-\alpha_0 x + \frac{3}{2}};$$

$$a = -A_0^{-1}, b = -A_0^{-2} \quad A(x) \approx A_0 e^{-\alpha_0 x - 3/2}.$$

2.3

$$a) P_{12} = e^{\frac{aA_{10} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}}{\alpha_{10}}}; \quad a1) a > 0, P_{12} > 1; a2) a < 0, P_{12} < 1; a3) a = 0, P_{12} = 1;$$

$$б) P_{12} = (1 + aA_{10})^{\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}}; \quad б1) a > 0, P_{12} < 1; б2) a < 0, P_{12} > 1; б3) a = 0, P_{12} = 1;$$

$$в) P_{12} = e^{\frac{\frac{a}{3}A_{10}^3 \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}}{\alpha_{10}}}; \quad в1) a > 0, P_{12} > 1; в2) a < 0, P_{12} < 1; в3) a = 0, P_{12} = 1;$$

$$г) P_{12} = e^{\left(aA_{10} + \frac{b}{2}A_{10}^2\right) \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}}; \quad г1) a > 0, b \geq 0, P_{12} > 1;$$

$$a > 0, b < 0; \quad a > \frac{1}{2}|b|A_{10}, \quad P_{12} > 1;$$

$$a = \frac{1}{2}|b|A_{10}, \quad P_{12} = 1; \quad a < \frac{1}{2}|b|A_{10}, \quad P_{12} < 1;$$

$$a = 0, b > 0, P_{12} > 1, a = 0, b = 0, P_{12} = 1, a = 0, b < 0, P_{12} < 1.$$

$$a < 0, b > 0:$$

$$|a| < \frac{1}{2}bA_{10}, \quad P_{12} > 1; \quad |a| = \frac{1}{2}bA_{10}, \quad P_{12} = 1;$$

$$|a| > \frac{1}{2}bA_{10}, \quad P_{12} < 1;;$$

$$a < 0, b < 0, P_{12} < 1.$$

2.4

$$a) \Delta\varphi_{HL}(x) \approx \frac{a_1\omega}{\alpha_0 c} \left[A_0(1 - e^{-\alpha_0 x} e^{a_2 A_0}) + \frac{a_2}{2} A_0^2(1 - e^{-2\alpha_0 x} e^{2a_2 A_0}) \right];$$

$$\Delta\varphi_{HL} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{a_1\omega}{\alpha_0 c} \left(A_0 + \frac{a_2}{2} A_0^2 \right);$$

$$б) \Delta\varphi_{HL}(x) \approx \frac{\omega}{\alpha_0 c} \frac{a_1}{a_2} \ln \frac{1 + \frac{a_2 A_0 e^{-\alpha_0 x}}{1 + a_2 A_0}}{1 + a_2 A_0};$$

$$\Delta\varphi_{HL} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow -\frac{\omega}{\alpha_0 c} \frac{a_1}{a_2} \ln(1 + a_2 A_0);$$

$$в) \Delta\varphi_{HL}(x) \approx \frac{a_1\omega}{\alpha_0 c} \left\{ \frac{A_0^2}{2} (1 - e^{-2\alpha_0 x + 2a_2 A_0}) + \frac{a_2}{3} A_0^3 (1 - e^{-3\alpha_0 x + 3a_2 A_0}) \right\}$$

$$\Delta\varphi_{HL} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{a_1\omega}{\alpha_0 c} \left(\frac{A_0^2}{2} + \frac{a_2}{3} A_0^3 \right);$$

$$г) \Delta\varphi_{HL}(x) \approx \frac{a_1\omega}{\alpha_0 c} \left\{ \frac{A_0^2}{2} (1 - e^{-2\alpha_0 x} e^{a_2 A_0^2}) + \frac{a_2}{4} A_0^4 (1 - e^{-4\alpha_0 x} e^{2a_2 A_0^2}) \right\};$$

$$\Delta\varphi_{HL} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{a_1\omega}{\alpha_0 c} \left(\frac{A_0^2}{2} + \frac{a_2}{4} A_0^4 \right);$$

2.5

$$a) \Delta\varphi_{HL} = \frac{\omega}{c} \frac{bL_{10}}{a} \ln \frac{1 + aA_0}{1 + aA}; \quad A = \frac{A_0 e^{-k_0}}{1 + aA_0(1 - e^{-k_0})};$$

$$\Delta\varphi_{HL} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\omega}{c} \frac{bL_{10}}{a} \ln(1 + aA_0);$$

$$б) \Delta\varphi_{HL} = \frac{\omega}{c} bL_{10} \left((A_0 - A) + \frac{a}{2} (A_0^2 - A^2) \right); \quad Ae^{aA} = A_0 e^{aA_0} e^{-k_0};$$

$$\Delta\varphi_{нл} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\omega}{c} bL_{10} \left(A_0 + \frac{a}{2} A_0^2 \right);$$

$$\text{в)} \Delta\varphi_{нл} = \frac{\omega}{c} \frac{bL_{10}}{a} \left(A_0 - A - \frac{1}{a} \ln \frac{1 + aA_0}{1 + aA} \right); \quad A = \frac{A_0 e^{-k_0}}{1 + aA_0(1 - e^{-k_0})};$$

$$\Delta\varphi_{нл} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\omega}{c} \frac{bL_{10}}{a} \left(A_0 - \frac{1}{a} \ln(1 + aA_0) \right);$$

$$\text{з)} \Delta\varphi_{нл} = \frac{\omega}{c} bL_{10} \left(\frac{1}{2} (A_0^2 - A^2) + \frac{a}{3} (A_0^3 - A^3) \right); \quad Ae^{aA} = A_0 e^{aA_0} e^{-k_0};$$

$$\Delta\varphi_{нл} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\omega}{c} bL_{10} \left(\frac{A_0^2}{2} + \frac{aA_0^3}{3} \right).$$

3.1

$$\text{а) и в)} v(\xi) = \frac{v_0}{1 + e^{\xi/\xi_0}}; \quad \xi_0 = \frac{2\nu}{v_0};$$

$$\text{б) и з)} v(\xi) = v_0 \frac{1 - 0,5e^{\xi/\xi_0}}{1 + e^{\xi/\xi_0}}; \quad \xi_0 = \frac{4\nu}{v_0}.$$

3.2

$$\text{а) и в)} v(\xi) = \frac{2v_0}{\sqrt{1 + e^{2\xi/\xi_0}}}; \quad \xi_0 = \frac{\nu}{4\alpha v_0^2};$$

$$\text{б) и з)} v(\xi) = \frac{v_0}{\sqrt{1 + e^{2\xi/\xi_0}}}; \quad \xi_0 = \frac{\nu}{\alpha v_0^2}.$$

3.3

$$u \sim v_0; \quad \xi_0 \sim \nu / v_0.$$

3.4

$$u \sim v_0; \quad T_0 \sim \nu / v_0, \quad L \sim v_0 / \alpha.$$

3.5

$$u \sim v_0; \quad \xi_0 \sim \nu / v_0; \quad L \sim \frac{1}{\gamma}.$$

3.6

$$a) \text{ и } в) \quad v(\xi) = \frac{v_0}{1 + e^{\xi/\xi_0}}; \quad \xi_0 = \frac{2\nu}{v_0};$$

$$б) \text{ и } з) \quad v(\xi) = v_0 \frac{1 - 0,5e^{\xi/\xi_0}}{1 + e^{\xi/\xi_0}}; \quad \xi_0 = \frac{\nu}{v_0}.$$

3.7

$$u \sim 3\alpha v_0^2; \quad \xi_0 \sim \frac{\nu}{3\alpha v_0^2}.$$

4.1

$$a) \quad v(\xi) = \frac{v_0}{ch \xi / \xi_0}; \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{\beta}{u}}; \quad v_0 = \sqrt{\frac{u}{\alpha}};$$

$$б) \quad v(\xi) = \frac{v_0}{ch \xi / \xi_0}; \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{\beta}{|u|}}; \quad v_0 = \sqrt{\frac{|u|}{\alpha}}.$$

4.2

$$v_0 \sim \sqrt{\frac{u}{6\alpha}}; \quad \xi_0 \sim \sqrt{\frac{\beta}{u}}.$$

4.3

$$v_0 \sim u; \quad \xi_0 \sim \sqrt{\frac{\beta}{u}}.$$

4.5

$$v(\xi) = \mp \frac{\sqrt{1+u^2}}{\xi}; \quad v'(\xi) = \pm \frac{\sqrt{1+u^2}}{\xi^2}.$$

4.6

$$v(x, t) = \sqrt{\frac{u_1(u_1 - 2u_2)}{2\beta}} \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{u_1(u_1 - 2u_2)} (x - u_1) \exp \left(i \frac{u_1}{2} (x - u_2 t) \right).$$

4.7

$$v(\xi) = v(0) \operatorname{ch}^{-1} \frac{\xi}{\xi_0}; \quad v(0) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}; \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{D}{\beta}}.$$

4.8

$$a) v_m \sim \frac{\beta}{\alpha}, u \sim v_m, \xi_a \sim \frac{v}{v_m};$$

$$б) v_m \sim \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, u \sim v_m, \xi_a \sim \frac{v}{v_m};$$

$$в) v_m \sim \frac{\beta}{\alpha}, u \sim v_m, \xi_a \sim \frac{v}{v_m};$$

$$г) v_m \sim \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, u \sim v_m, \xi_a \sim \frac{v}{v_m}.$$

4.9

Указание. При вычислении последнего интеграла по v умножить числитель и знаменатель на v и обозначить $w = v^2$.

4.10

$$a) v(\xi) = \frac{v(0)}{\operatorname{ch}^2(\xi / \xi_0)}, v(0) = 3u, \xi_0 = 2\sqrt{\tilde{\beta} / u}, \tilde{\beta} = |\beta|u,$$

$$б) v(\xi) = \frac{v(0)}{\operatorname{ch}^2(\xi / \xi_0)}, v(0) = 3u, \xi_0 = 2\sqrt{\tilde{\beta} / u}, \tilde{\beta} = \beta u^2,$$

$$в) v(\xi) = \frac{v(0)}{\operatorname{ch}^2(\xi / \xi_0)}, v(0) = 3u, \xi_0 = 2\sqrt{\tilde{\beta} / u}, \tilde{\beta} = |\beta|u^3,$$

$$г) v(x) = \frac{v(0)}{\operatorname{ch}^2(x / x_0)}, v(0) = 3\tilde{u} = \frac{3}{u}, x_0 = 2\sqrt{\tilde{b} / \tilde{u}} = 2\sqrt{bu^3},$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{u}, \tilde{b} = bu^2,$$

4.11

$$a) v(\xi) = \frac{v_m}{\operatorname{ch}^2(\xi / \xi_0)}; v_m = 3\tilde{u} = \frac{3u^2}{\alpha}; \xi_0 = 2\sqrt{\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{u}}} = \frac{2}{u}\sqrt{\beta},$$

$$\tilde{u} = \frac{u^2}{\alpha}, \tilde{\beta} = \frac{\beta}{\alpha};$$

$$б) v(\xi) = \frac{v_m}{\operatorname{ch}^2(\xi / \xi_0)}; v_m = 3\tilde{u} = \frac{3u}{\alpha}; \xi_0 = 2\sqrt{\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{u}}} = \frac{2}{u}\sqrt{|\beta|},$$

$$\tilde{u} = \frac{u}{\alpha}, \tilde{\beta} = \frac{|\beta|}{\alpha u};$$

$$б) v(\xi) = \frac{v_m}{\text{ch}^2(\xi / \xi_0)}; v_m = 3\tilde{u} = \frac{3}{|\alpha|u^2}; \xi_0 = 2\sqrt{\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{u}}} = 2\sqrt{|\beta|},$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{|\alpha|u^2}, \tilde{\beta} = \frac{|\beta|}{|\alpha|u^2};$$

$$в) v(\xi) = \frac{v_m}{\text{ch}^2(\xi / \xi_0)}; v_m = 3\tilde{u} = \frac{3}{\alpha u}; \xi_0 = 2\sqrt{\frac{\beta}{u}}, \tilde{u} = \frac{1}{\alpha u}, \tilde{\beta} = \frac{\beta}{\alpha u^2};$$

4.12

$$а) v(\xi) = \frac{v_m}{\text{ch}^2(\xi / \xi_0)}; v_m = 3\tilde{u} = \frac{3u^2}{|\alpha|}; \xi_0 = 2\sqrt{\frac{|\beta|}{u}} = 2\sqrt{\frac{\beta}{u}},$$

$$\tilde{u} = \frac{u^2}{|\alpha|}, \tilde{\beta} = \frac{\beta u}{|\alpha|};$$

$$б) v(\xi) = \frac{v_m}{\text{ch}^2(\xi / \xi_0)}; v_m = 3\tilde{u} = \frac{3u^2}{|\alpha|}; \xi_0 = 2\sqrt{\frac{|\beta|}{u}} = 2\sqrt{|\beta|},$$

$$\tilde{u} = \frac{u^2}{|\alpha|}, \tilde{\beta} = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| u^2;$$

$$в) v(\xi) = \frac{v_m}{\text{ch}^2(\xi / \xi_0)}; v_m = 3\tilde{u} = \frac{3u^2}{|\alpha|}; \xi_0 = 2\sqrt{\frac{|\beta|}{u}} = 2\sqrt{\beta u},$$

$$\tilde{u} = \frac{u^2}{|\alpha|}, \tilde{\beta} = \beta \frac{u^3}{|\alpha|};$$

$$г) v(\xi) = \frac{v_m}{\text{ch}^2(\xi / \xi_0)}; v_m = 3\tilde{u} = \frac{3u^2}{|\alpha|}; \xi_0 = 2\sqrt{\frac{|\beta|}{u}} = 2u\sqrt{|\beta|},$$

$$\tilde{u} = \frac{u^2}{|\alpha|}, \tilde{\beta} = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| u^4.$$

4.13

а) не имеет,

б) имеет при

$$\xi = x + ut, u > 0, \alpha < 0, v(\xi) = \frac{v_m}{\text{ch}(\xi / \xi_0)}, v_m = \sqrt{\frac{6u}{|\alpha|}}, \xi_0 = \sqrt{\frac{|\beta|}{u}}.$$

4.14

$$a) v(\xi) = \frac{v(0)}{\operatorname{ch}^2(\xi / \xi_0)}, \quad v(0) = 3\tilde{u}, \quad \xi_0 = 2\sqrt{\frac{\beta}{\tilde{u}}},$$

$$\tilde{u} = u - \alpha, \quad \alpha < u, \quad \xi = x - \tilde{u}t \text{ или } \xi = x - u\tilde{t}, \quad \text{где } \tilde{t} = \left(1 - \frac{\alpha}{u}\right)t,$$

$$б) v(\xi) = \frac{v(0)}{\operatorname{ch}^2(\xi / \xi_0)}, \quad v(0) = 3\tilde{u}, \quad \xi_0 = 2\sqrt{\frac{\beta}{\tilde{u}}},$$

$$\tilde{u} = u(1 + \alpha), \quad \alpha \geq -1, \quad \xi = x - \tilde{u}t \text{ или } \xi = x - u\tilde{t}, \quad \text{где } \tilde{t} = (1 + \alpha)t.$$

5.1

$$a) A_1(t) = \frac{A_1(0)}{\operatorname{ch}^2 \gamma_2 \frac{A_0 A_1(0)}{A_{2\infty}} t}; \quad A_2(t) = A_{2\infty} \operatorname{th} \frac{A_0 A_1(0)}{A_{2\infty}} t;$$

$$A_{2\infty} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{2\gamma_2 A_1(0) A_0}};$$

$$б) A_1(t) = A_{1\infty} \operatorname{th} \gamma_2 A_{1\infty} t; \quad A_2(t) = \frac{A_2(0)}{\operatorname{ch} \gamma_2 A_{1\infty} t}; \quad A_{1\infty} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} A_2(0);$$

$$в) A_1(t) = \frac{A_1(0)}{\operatorname{ch} \gamma_1 A_{2\infty} t}; \quad A_2(t) = A_{2\infty} \operatorname{th} \gamma_1 A_{2\infty} t; \quad A_{2\infty} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} A_1(0);$$

$$г) A_1(t) = A_1(0) \cos \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} t; \quad A_2(t) = A_{2\max} \sin \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} t;$$

$$A_{2\max} = \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} A_1(0).$$

5.2

$$a) A_0^{(0)} = \left(\frac{\nu_1 \nu_2}{\gamma_1 \gamma_2} \right)^{\frac{1}{4}}; \quad б) A_0^{(0)} = \left(\frac{\nu_1 \nu_2}{\gamma_1 \gamma_2} \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$в) A_0^{(0)} = \left(\frac{\nu_1 \nu_2}{\gamma_1 \gamma_2} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad г) A_0^{(0)} = \frac{\nu_2}{\gamma_2} \left(\frac{\nu_1 \nu_2}{\gamma_1 \gamma_2} \right)^{\frac{1}{6}}.$$

5.3

$$a) A(t) = \frac{A^{(0)}}{\sqrt{1 - \left(1 - \left[\frac{A^{(0)}}{A(0)}\right]^2\right) e^{2\nu t}}}; \quad A^{(0)} = \sqrt{\frac{\nu}{\gamma}};$$

$$t_0 = -\frac{1}{2\nu} \ln \left[1 - \left(\frac{A^{(0)}}{A(0)} \right)^2 \right];$$

$$б) A(t) \underset{(t \rightarrow t_0)}{\approx} \frac{A^{(0)}}{A^{(0)}\nu t - \ln \left[\frac{A(0)}{A(0) - A^{(0)}} e^{-\frac{A^{(0)}}{A(0)}} \right]}; \quad A^{(0)} = \frac{\nu}{\gamma};$$

$$t_0 = \frac{1}{A^{(0)}\nu} \ln \left[\frac{A(0)}{A(0) - A^{(0)}} e^{-\frac{A^{(0)}}{A(0)}} \right]; \quad \text{при } A(0) \gg A^{(0)}$$

$$A(t) \approx \frac{A^{(0)}}{\nu A^{(0)}t - 0,5 \left(A^{(0)} / A(0) \right)^2}, \quad t_0 = A^{(0)} / 2\nu A(0);$$

$$в) A_-^{(0)} \approx \frac{\nu}{\gamma} \equiv A^{(0)}; \quad A_+^{(0)} \approx \frac{\gamma}{\beta} \equiv A_\infty \gg A^{(0)}.$$

$$\text{При } \frac{4\nu\beta}{\gamma^2} \ll 1 \quad t_0 \approx \frac{1}{A^{(0)}\nu} \ln \left[\frac{A(0)}{A(0) - A^{(0)}} e^{-\frac{A^{(0)}}{A(0)}} \right];$$

$$г) \text{ Для } A(0) \gg A^{(0)}; \quad \frac{A^{(0)}}{A(0)} + \ln \frac{A(t) - A^{(0)}}{A(t) + A^{(0)}} = \left(A^{(0)} \right)^3 \gamma t + C;$$

$$C = \frac{A^{(0)}}{A(0)} + \frac{1}{2} \ln \frac{A(0) - A^{(0)}}{A(0) + A^{(0)}} < 0.$$

$$\text{При } A(t) \rightarrow \infty \text{ имеем } A(t) \approx \frac{A(0)}{(A^{(0)})^3 \gamma t + C}; \quad t_0 \approx -\frac{C}{(A^{(0)})^3 \gamma}.$$

5.4

$$A_{1,2}^2(t) = A_{00}^2 \frac{\gamma_{1,2}}{|\gamma_0|} \text{ch}^{-2} \lambda t; \quad A_0^2(t) = A_{00}^2 \left(1 - \text{ch}^{-2} \lambda t \right), \quad \lambda = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} A_{00}.$$

5.5

$$m(t) = m(0) \exp \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \left(1 - e^{-t/\tau_2} \right) \right), \text{ где } \tau_1 = 2,6 \text{ года, } \tau_1 = 8 \text{ лет. Зависи-}$$

мость $m(t)$ описывает неустойчивость, у которой линейная стадия (при $t / \tau_1 \leq 1$) сменяется нелинейной стадией (при $t / \tau_1 > 1$).

5.6

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N, \text{ где } \alpha, \beta > 0; N(t) = N(0)e^{(\alpha-\beta)t}. \text{ Неустойчивость воз-}$$

никает при $\alpha > \beta$, при $\alpha < \beta$ организмы обречены на вымирание, при $\alpha = \beta$ их число остается неизменным.

5.7

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N^2 - \beta N, \text{ где } \alpha, \beta > 0;$$

$$N(t) = N(0) \frac{N^{(0)}}{(N^{(0)} - N(0))e^{\beta N^{(0)}t}}, N^{(0)} = \beta / \alpha.$$

Зависимость $N(t)$ описывает взрывную неустойчивость.

5.8

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \alpha (1 - \beta N), \text{ где } \beta > 0;$$

$$N(t) = N(0) \frac{N_{\infty}}{N(0) + (N_{\infty} - N(0))e^{-\alpha t}}, N_{\infty} = \frac{1}{\beta}.$$

Зависимость $N(t)$ описывает неустойчивость, у которой линейная стадия (при $\alpha t \leq 1$) сменяется нелинейной стадией (при $\alpha t > 1$).

5.9

$$N(t) = N(0) \frac{C}{C - N(0)t}.$$

Зависимость $N(t)$ описывает взрывную неустойчивость; момент "взрыва" численности населения $t_0 = C / N(0)$, $N(0) = C / 2026$, а $t_0 = 2026$ г.

5.10

$$N(t) = \frac{N_{\infty}}{\pi} \operatorname{arccctg} \frac{\tau_0 - t}{\tau},$$

где $N_{\infty} = \pi C / \tau \approx 11.4$ млрд человек. Зависимость $N(t)$ описывает неустойчивость, у которой линейная стадия (при $(\tau_0 - t) / \tau > 0$) сменяется нелинейной стадией (при $(\tau_0 - t) / \tau < 0$).

5.11

$$P(t) = \frac{P_0}{(1 + \beta P_0) e^{-\alpha_0 t} - \beta P_0}.$$

При $\beta < 0$

$$P(t) = \frac{P_0 P_{\infty}}{P_0 + (P_{\infty} - P_0) e^{-\alpha_0 t}}$$

имеет место неустойчивость со стабилизацией P на уровне $P_{\infty} = \frac{1}{|\beta|}$. При

$\beta > 0$ имеет место взрывная неустойчивость с $t_0 = \alpha_0^{-1} \ln(1 + \beta^{-1} P_0^{-1})$ где $t_0 \approx 60$ лет. При $\beta = 0$ имеем $P(t) = P_0 e^{\alpha_0 t}$, т. е. неустойчивость.

5.12

$$P(t) = \frac{P_0}{(1 + \beta P_0) e^{-\alpha t} - \beta P_0}.$$

При $\beta < 0$

$$P(t) = \frac{P_0 P_{\infty}}{P_0 + (P_{\infty} - P_0) e^{-\alpha t}}$$

имеет место неустойчивость со стабилизацией P на уровне $P_{\infty} = \frac{1}{|\beta|} \approx 100$

ГВт. При $\beta > 0$ имеет место взрывная неустойчивость с $t_0 = \alpha_0^{-1} \ln(1 + \beta^{-1} P_0^{-1})$, где $t_0 \approx 691$ год. При $\beta = 0$ имеем $P(t) = P_0 e^{\alpha_0 t}$, т. е. неустойчивость.

5.13

$$n(t) = \frac{n_0}{(1 + \beta n_0)e^{-\alpha_2 t} - \beta n_0}, \text{ где } \alpha_2 = \alpha_0 - \beta, \beta = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \text{ Зависимость } n(t)$$

описывает взрывную неустойчивость с $t_0 = \alpha_2^{-1} \ln(1 + \beta^{-1} n_0^{-1})$, где $t_0 \approx 113$ лет.

5.14

$$S(t) = \frac{S_0}{(1 + \beta S_0)e^{\alpha(t-t_0)} - \beta S_0};$$

а) $t - t_0 = 64,7$ года;

б) $t - t_0 = 51,8$ года;

в) $t - t_0 = 606$ лет;

г) $t - t_0 = 2217$ лет.

5.15

$$T(t) = (1 + \beta T_0)e^{\alpha\beta(t-t_0)} - 1;$$

а) $T = 6$ К;

б) $T = 12$ К;

в) $T = 18$ К;

г) $T = 24$ К.

5.16

$$n(t) = \frac{n_0}{n_0 + (1 - n_0)e^x}, \quad x = \frac{t - t_0}{\tau}.$$

Закон изменения описывает неустойчивость с насыщением.

а) $n(t_2) = 0,5$ при $t_2 = 2001$ г.; $n(t_3) = 0,9$ при $t_3 = 2006$ г.;

$n(t_4) = 0,99$ при $t_4 = 2012$ г.

б) $n(t_2) = 0,5$ при $t_2 = 2003$ г.; $n(t_3) = 0,9$ при $t_3 = 2009$ г.;

$n(t_4) = 0,99$ при $t_4 = 2017$ г.

в) $n(t_2) = 0,5$ при $t_2 = 2012$ г.; $n(t_3) = 0,9$ при $t_3 = 2021$ г.;

$n(t_4) = 0,99$ при $t_4 = 2031$ г.

г) $n(t_2) = 0,5$ при $t_2 = 2017$ г.; $n(t_3) = 0,9$ при $t_3 = 2028$ г.;

$n(t_4) = 0,99$ при $t_4 = 2040$ г.

Перелом наступает при $t = t_1$, при этом $n(t_1) = 0,5$.

6.1

а) $E_t = 4,7 \cdot 10^5$ В/м, $\Pi = 2,9 \cdot 10^8$ Вт/м², $P = 290$ Вт;

б) $E_t = 4,7 \cdot 10^6 \text{ В/м}, \Pi = 2,9 \cdot 10^{10} \text{ ВТ/м}^2, P = 58 \text{ кВт};$

в) $E_t = 1,5 \cdot 10^6 \text{ В/м}, \Pi = 2,9 \cdot 10^9 \text{ ВТ/м}^2, P = 15 \text{ кВт};$

г) $E_t = 2,4 \cdot 10^6 \text{ В/м}, \Pi = 7,5 \cdot 10^9 \text{ ВТ/м}^2, P = 75 \text{ кВт}.$

6.2

а) $E_t = 1,5 \cdot 10^8 \text{ В/м}, \Pi = 2,9 \cdot 10^{13} \text{ ВТ/м}^2, P = 29 \text{ МВт};$

б) $E_t = 1,1 \cdot 10^8 \text{ В/м}, \Pi = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ ВТ/м}^2, P = 32 \text{ МВт};$

в) $E_t = 1,5 \cdot 10^8 \text{ В/м}, \Pi = 2,9 \cdot 10^{13} \text{ ВТ/м}^2, P = 150 \text{ МВт};$

г) $E_t = 1,5 \cdot 10^8 \text{ В/м}, \Pi = 2,9 \cdot 10^{13} \text{ ВТ/м}^2, P = 290 \text{ МВт}.$

6.3

$E_s = 4,75 \cdot 10^8 \text{ В/м}, \Pi = 2,9 \cdot 10^{14} \text{ ВТ/м}^2, P = 290 \text{ МВт}.$

6.4

$E_s = 1,1 \cdot 10^{11} \text{ В/м}, \Pi = 1,4 \cdot 10^{19} \text{ ВТ/м}^2, P = 14 \text{ ТВт}.$

6.5

$E_s = 6,6 \cdot 10^{11} \text{ В/м}, \Pi = 5,7 \cdot 10^{20} \text{ ВТ/м}^2, P = 0,6 \text{ ПВт}.$

6.6

а) $E_a = 1,4 \cdot 10^{11} \text{ В/м}, \Pi = 2,5 \cdot 10^{19} \text{ ВТ/м}^2, P = 25 \text{ ТВт};$

б) $E_a = 3,5 \cdot 10^{10} \text{ В/м}, \Pi = 1,56 \cdot 10^{18} \text{ ВТ/м}^2, P = 1,56 \text{ ТВт};$

в) $E_a = 8,75 \cdot 10^9 \text{ В/м}, \Pi = 10^{17} \text{ ВТ/м}^2, P = 0,1 \text{ ТВт};$

г) $E_a = 3,9 \cdot 10^9 \text{ В/м}, \Pi = 1,9 \cdot 10^{16} \text{ ВТ/м}^2, P = 19 \text{ ГВт}.$

6.7

$r_a \approx 5,2 \cdot 10^{-11} \text{ м}, E_a = 5,2 \cdot 10^{11} \text{ В/м}, \Pi = 3,5 \cdot 10^{20} \text{ ВТ/м}^2,$

$P = 0,35 \text{ ПВт}.$

6.8

$$\frac{E_a}{E_r} = \frac{E_e}{E_\omega} \alpha^3, \text{ где } E_e = mc^2 - \text{энергия покоя электрона, } E_\omega = \hbar\omega - \text{энер-$$

гия кванта, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ – постоянная тонкой структуры.

6.9

$$\frac{E_a}{E_v} = \alpha^3, \text{ где } \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} - \text{постоянная тонкой структуры.}$$

6.10

$$\frac{E_r}{E_v} = \frac{E_\omega}{E_e}, \text{ где } E_\omega = \hbar\omega - \text{энергия кванта, } E_e = mc^2 - \text{энергия покоя}$$

электрона.

6.11

а) $E_r = 1,7 \cdot 10^{11} \text{ В/м, } \Pi = 3,8 \cdot 10^{19} \text{ Вт/м}^2, P = 38 \text{ ТВт};$

б) $E_r = 1,7 \cdot 10^{12} \text{ В/м, } \Pi = 3,8 \cdot 10^{21} \text{ Вт/м}^2, P = 3,8 \text{ ПВт};$

в) $E_r = 1,7 \cdot 10^{13} \text{ В/м, } \Pi = 3,8 \cdot 10^{23} \text{ Вт/м}^2, P = 3,8 \text{ ЭВт} = 3,8 \cdot 10^{18} \text{ Вт};$

г) $E_t = 8,5 \cdot 10^{13} \text{ В/м, } \Pi = 9,4 \cdot 10^{24} \text{ Вт/м}^2, P = 94 \text{ ЭВт} = 9,4 \cdot 10^{19} \text{ Вт}.$

6.12

а) $E_v = 2,3 \cdot 10^{17} \text{ В/м, } \Pi = 6,9 \cdot 10^{31} \text{ Вт/м}^2, P = 6,9 \cdot 10^{25} \text{ Вт};$

б) $E_v = 2,3 \cdot 10^{17} \text{ В/м, } \Pi = 6,9 \cdot 10^{31} \text{ Вт/м}^2, P = 6,9 \cdot 10^{24} \text{ Вт};$

в) $E_v = 2,3 \cdot 10^{17} \text{ В/м, } \Pi = 6,9 \cdot 10^{31} \text{ Вт/м}^2, P = 6,9 \cdot 10^{23} \text{ Вт};$

г) $E_v = 2,3 \cdot 10^{17} \text{ В/м, } \Pi = 6,9 \cdot 10^{31} \text{ Вт/м}^2, P = 6,9 \cdot 10^{22} \text{ Вт}.$

6.13

- а) $E = 10^5$ Дж, $\varepsilon_e = 3,3 \cdot 10^{16}$ Дж/м³, $\Pi = 10^{25}$ Вт/м²;
 б) $E = 10^6$ Дж, $\varepsilon_e = 3,3 \cdot 10^{16}$ Дж/м³, $\Pi = 10^{25}$ Вт/м²;
 в) $E = 10^5$ Дж, $\varepsilon_e = 3,3 \cdot 10^{17}$ Дж/м³, $\Pi = 10^{26}$ Вт/м²;
 г) $E = 10^8$ Дж, $\varepsilon_e = 3,3 \cdot 10^{17}$ Дж/м³, $\Pi = 10^{26}$ Вт/м².

6.14

$$E = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ Дж}, \varepsilon_e = 3,9 \cdot 10^{34} \text{ Дж/м}^3, \omega = 5,1 \cdot 10^{23} \text{ с}^{-1}.$$

6.15

$$\text{а) } A_1 = \frac{A_{10}A_{2\infty}}{A_{20}e^{x/L} + A_{10}(\delta_2 / \delta_1)} \approx \frac{A_{10}A_{2\infty}}{A_{20}e^{x/L} + A_{2\infty}}, L = \frac{1}{\delta_1 A_{2\infty}} = \frac{1}{\delta_2 A_{10}},$$

$$A_{2\infty} = A_{20} + \frac{\delta_2}{\delta_1} A_{10}, \eta = \left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^2 = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^2 \approx 0,5.$$

$$\text{б) } A_1 = A_{10} \cos \frac{x}{L}, A_2 = A_{2\infty} \sin \frac{x}{L}, L = \frac{1}{\sqrt{\delta_1 \delta_2 A_0}},$$

$$A_{2\infty}^2 = A_{20}^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} A_{10}^2, \eta = \left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^2 = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 0,7.$$

Целесообразно, чтобы $\frac{x}{L} = \frac{\pi}{2}$, т. е. длина рабочего тела $L_0 = \frac{\pi}{2} L$.

$$\text{в) } A_1 = A_{10} \sqrt{\left(1 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \frac{A_{20}^2}{A_{10}^2} \right) \left(1 - \frac{A_{20}^2}{A_{20}^2 + (A_{2\infty}^2 - A_{20}^2) e^{-2x/L}} \right)} \approx$$

$$\approx A_{10} \sqrt{1 - \frac{A_{20}^2}{A_{20}^2 + (A_{2\infty}^2 - A_{20}^2) e^{-2x/L}}}, L = \frac{1}{\delta_1 A_{2\infty}^2},$$

$$A_2 = \frac{A_{20}A_{2\infty}}{\sqrt{A_{20}^2 + (A_{2\infty}^2 - A_{20}^2) e^{-2x/L}}}, A_{2\infty}^2 = A_{20}^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} A_{10}^2,$$

$$\eta = \left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^2 = \left(\frac{A_{20}}{A_{10}} \right)^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \approx \frac{\delta_2}{\delta_1} \approx 0,7.$$

$$\text{г) } \left(\frac{A_1}{A_{1\infty} - A_1} \right)^2 \exp \left\{ \frac{(2A_1 - A_{1\infty}) A_{1\infty}}{A_1 (A_{1\infty} - A_1)} \right\} =$$

$$= \left(\frac{A_{10}}{A_{1\infty} - A_{10}} \right)^2 \exp \left\{ \frac{(2A_{10} - A_{1\infty}) A_{1\infty}}{A_{10} (A_{1\infty} - A_{10})} \right\} e^{-x/L_1},$$

$$A_{1\infty} = A_{10} + \frac{\delta_1}{\delta_2} A_{20}, \quad L_1 = \frac{\delta_1}{\delta_2^2 A_{1\infty}^3},$$

$$\left(\frac{A_2}{A_{2\infty} - A_2} \right)^2 \exp \left\{ \frac{(2A_2 - A_{2\infty}) A_{2\infty}}{A_2 (A_{2\infty} - A_2)} \right\} =$$

$$= \left(\frac{A_{20}}{A_{2\infty} - A_{20}} \right)^2 \exp \left\{ \frac{(2A_{20} - A_{2\infty}) A_{2\infty}}{A_{20} (A_{2\infty} - A_{20})} \right\} e^{x/L_2},$$

$$A_{2\infty} = A_2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} A_{10}, \quad L_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1^2 A_{2\infty}^3},$$

$$\eta = \left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^2 = \left(\frac{A_{20}}{A_{10}} + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^2 \approx \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^2 \approx 0,5.$$

6.16

$$\text{a) } \eta = \left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^2 = \left[\left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right]^{2/3} \approx \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^{2/3} \approx 0,86.$$

$$\text{б) } \eta = \left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^2 = \left[\left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right]^{2/3} \approx \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^{2/3} \approx 0,86.$$

$$\text{в) } \eta = \left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^2 = \left[\left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right]^{2/3} \approx \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^{2/3} \approx 0,86.$$

$$\text{г) } \eta = \left(\frac{A_{2\infty}}{A_{10}} \right)^2 = \left[\left(\frac{A_{20}}{A_{10}} \right)^4 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right]^{1/2} \approx \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^{1/2} \approx 0,89.$$

7.1

$$Q(t) = Q_0 \sin \omega_p t; \quad I(t) = -Q_0 \omega_p \cos \omega_p t = Q_0 \omega_p \cos(\omega_p t - \pi);$$

$$\vec{j}(t) = \vec{j}_0 \cos(\omega_p t - \pi); \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 \cos(\omega_p t - \pi); \quad \vec{v}_0 = \frac{\vec{j}_0}{eN};$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega_p t); \quad \vec{E}_0 = \frac{\vec{J}_0}{\epsilon_0 \omega_p}.$$

7.2

$$E_{kp} \approx E_p \frac{f^2}{f_{p0} \nu_0} \frac{\lambda}{r_0}; \quad E_p^2 = \frac{3kT_{e0} m \delta_0 (\omega^2 + \nu_0^2)}{e^2};$$

$$P_{kp} = \frac{E_{hp}^2 S}{240\pi}; \quad R_\phi \approx r_0 \frac{\omega^2}{\omega_{p0} \nu_0} \frac{E_p}{E_{kp}}.$$

7.3

$$E(x) = \frac{E(0)}{\sqrt{\left(\frac{E(0)}{E_c}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{E(0)}{E_c}\right)^2\right] e^{2k_0}}};$$

$$P(x) = \frac{e^{k_0}}{\sqrt{\left(\frac{E(0)}{E_c}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{E(0)}{E_c}\right)^2\right] e^{2k_0}}}.$$

7.4

$$E(x) = \frac{E(0) e^{-k_0}}{\sqrt{1 + \frac{E^2(0)}{E_p^2} (1 - e^{-2k_0})}};$$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{E^2(0)}{E_p^2} (1 - e^{-2k_0})}}.$$

7.5

$$4k_0 \gg 1; \quad E(x) \approx E(0) e^{\frac{E^2(0)}{4E_p^2} e^{-k_0}}; \quad P(x) \approx e^{\frac{E^2(0)}{4E_p^2}}.$$

7.6

$$\Delta\varphi(x) = -\frac{1}{4} \frac{\omega}{c} L_0 \frac{\omega_{p0}^2 \nu_0^2}{\omega^4} \left[\frac{E^2 - E^2(0)}{E_p^2} + \ln \frac{E^2 / E_p^2 + 1}{E^2(0) / E_p^2 + 1} \right], \quad L_0 = \frac{1}{\alpha_0};$$

$$\Delta\varphi|_{x \rightarrow \infty} = \frac{1}{4} \frac{\omega}{c} L_0 \frac{\omega_{p0}^2 \nu_0^2}{\omega^4} \left[\frac{E^2(0)}{E_p^2} + \ln \left(\frac{E^2(0)}{E_p^2} + 1 \right) \right].$$

7.7

$$\Delta\varphi(x) = \frac{1}{4} \frac{\omega}{c} L_0 \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^4} \ln \frac{1 - E^2 / E_c^2}{1 - E^2(0) / E_c^2}, \quad L_0 = \frac{1}{\alpha_0};$$

$$\Delta\varphi|_{x \rightarrow \infty} = -\frac{1}{4} \frac{\omega}{c} L_0 \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^4} \ln \left(1 - \frac{E^2(0)}{E_c^2} \right).$$

7.8

$$\epsilon_{nl} = \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} \left(1 - e^{-E^2/E_c^2} \right) > 0.$$

7.9

В плазме T_e увеличилась примерно в 101 раз.

7.10

Коэффициент прилипания удвоился, а концентрация электронов уменьшилась вдвое.

7.11

Уменьшилась в $e^4 \approx 55$ раз.

7.12

Концентрация электронов уменьшилась на одну треть.

7.13

Пробой плазмы описывается следующим соотношением:

$$N(t) = \frac{N_0 N_\infty}{N_0 + (N_\infty - N_0) e^{-\nu_i t}}, \quad \text{где } N_\infty = \frac{\nu_i}{\alpha_r} = 10^{22} \text{ м}^{-3}. \text{ Время становле-}$$

ния N при пробое $t_N = \nu_i^{-1} = 1 \text{ нс}$.

Релаксация концентрации электронов описывается таким соотношением:

$$N(t) = \frac{N_m}{1 + N_m \alpha_r t}, \quad \text{где } N_m = N(0). \text{ Время релаксации концентрации}$$

электронов $t_{Nr} = (N_m \alpha_r)^{-1}$. При $N_m = N_\infty$ имеем $t_{Nr} = 1 \text{ нс}$.

7.14

Уравнение для концентрации электронов имеет вид:

$$\frac{dN}{dt} = q_e - \beta N_n^2 N \text{ или } \frac{dN}{dt} = q_e - \beta_r N, \text{ где } \beta_r = \beta N_n^2.$$

Стационарное значение $N_\infty = N_0 \frac{\beta_0}{\beta_\infty}$, $\beta_0 = q_e / N_0$. Решение дифференциального уравнения имеет вид $N(t) = N_\infty - (N_\infty - N_0)e^{-t/t_N}$, где $t_N = \beta_{r0}^{-1}$ – время становления N . Релаксация N описывается уравнением $\frac{dN}{dt} = q_e - \beta_{r0} N$, где $N(0) = N_m$. Его решение имеет вид: $N(t) = N_0 + (N_m - N_0)e^{-t/t_N}$.

7.15

$N / N_0 = 0.5$. а) $N_0 = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^{-3}$, $t_N = 1,1 \text{ нс}$; б) $N_0 = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-3}$, $t_{Nr} = 11 \text{ мкс}$; в) $N_0 = 10^8 \text{ м}^{-3}$, $t_N = 0,1 \text{ с}$.

8.1

- а) Увеличение T_e около 41%;
- б) увеличение T_e около 33%;
- в) увеличение T_e в 13,6 раза.

8.2

Относительное увеличение T_e днем близко к 2%, а ночью – 62%. Ночью эффект кроссмодуляции выражен сильно.

8.3

Значение $\mu_{\Omega \max} / \mu \approx 0,5 E_0^2 / E_p^2 \approx 0,35$, т. е. эффект самомодуляции значителен.

8.4

Отношение E_0^2 / E_p^2 днем равно 1%, ночью – 7.3%,. Эффекты кроссмодуляции и самомодуляции выражены слабо.

8.5

Нет, поскольку напряженность поля пробоя $E_i \approx 156 \text{ В/м}$, а амплитуда поля радиоволны 8 мВ/м днем и 22 мВ/м ночью.

8.6

$$\mu_{\Omega \max} = 0,5 \text{ при } \omega_{1,2}^2 \gg \nu_0^2, \mu_{\Omega \max} = -0,5 \text{ при } \omega_{1,2}^2 \ll \nu_0^2.$$

8.7

$$f_{\max} \approx 900 \text{ ГГц.}$$

8.8

Значения $E_0^2 / E_p^2 \approx 8.7$. При этом возникает сильный нагрев электронов, нарушение гидростатического равновесия, фокусировка пучка радиоволн, самофокусировочная неустойчивость, развал пучка и другие эффекты.

8.9

При $f \approx 30 \text{ МГц}$, $\sigma \approx 2,4 \cdot 10^7 \text{ м}^2$, а при $f \approx 300 \text{ МГц}$ $\sigma \approx 2,4 \cdot 10^4 \text{ м}^2$.

8.10

$$R_{\max} \approx 2\sqrt{2R_E z_s} \approx 4000 \text{ км, где } R_E \approx 6400 \text{ км – радиус Земли.}$$

8.11

Указание. Принять, что соответствующие системы используют полосу частот на один канал 300 Гц, 9 кГц, 50 кГц, 9 МГц и 3 кГц. Для ОНЧ, НЧ, СЧ, ВЧ, УВЧ, ОВЧ, СВЧ, КВЧ и ГВЧ диапазонов частота увеличивается на порядок в каждом диапазоне от 3кГц до 300 ГГц.

8.12

$$\text{Средняя мощность } P_0 = P_i \tau F = 10 \text{ кВт, } P = \frac{P_0}{\eta} = 50 \text{ кВт.}$$

8.13

- а) $P_r = 7.3 \cdot 10^{-15} \text{ Вт}$;
- б) $P_r = 1.7 \cdot 10^{-15} \text{ Вт}$;
- в) $P_r = 1.3 \cdot 10^{-15} \text{ Вт}$;
- г) $P_r = 5.5 \cdot 10^{-16} \text{ Вт}$.

8.14

$$l_a \approx 10 \text{ км.}$$

8.15

$$B_\Omega \approx 4 \text{ нТл.}$$

8.16

$$\text{а) } T_e / T_{e0} \approx 1.03;$$

б) $T_e / T_{e0} = 1.3$;

в) $T_e / T_{e0} \approx 4$;

г) $T_e / T_{e0} \approx 1.3$.

8.17

а) $100 \text{ км}^2 = 10 \times 10 \text{ км}^2$;

б) $250 \text{ км}^2 \approx 16 \times 16 \text{ км}^2$;

в) $33 \text{ км}^2 \approx 5.7 \times 5.7 \text{ км}^2$;

г) $400 \text{ км}^2 = 20 \times 20 \text{ км}^2$.

8.18

а) $S = 10^5 \text{ м}^2 \approx 320 \times 320 \text{ м}^2$, $\Delta\alpha = 3.2 \cdot 10^{-4}$;

б) $S = 8.3 \cdot 10^5 \text{ м}^2 \approx 0.9 \times 0.9 \text{ км}^2$, $\Delta\alpha = 8.7 \cdot 10^{-5}$;

в) $S = 4.8 \cdot 10^5 \text{ м}^2 \approx 690 \times 690 \text{ м}^2$, $\Delta\alpha = 1.4 \cdot 10^{-4}$;

г) $S = 4.3 \cdot 10^5 \text{ м}^2 \approx 655 \times 655 \text{ м}^2$, $\Delta\alpha = 1.4 \cdot 10^{-4}$.

8.19

а) $L = 4.3 \text{ км}$, $S \approx 18.7 \text{ км}^2$; б) $L = 8.6 \text{ км}$, $S \approx 74.6 \text{ км}^2$;

в) $L = 21.6 \text{ км}$, $S \approx 467 \text{ км}^2$; г) $L = 432 \text{ м}$, $S \approx 0.19 \text{ км}^2$.

8.20

а) 9.5%; б) 63%; в) 86%; г) 98%.

9.1

а) $\overline{A(t)} = \overline{A_0} e^{\lambda t}$; $\overline{A^2(t)} = \left(\sigma_0^2 - \overline{A_0}^2 \right) e^{2\lambda t}$; $\sigma_A^2(t) = \sigma_0^2 e^{2\lambda t}$;

б) $\overline{A(t)} = \overline{A_0} \text{ch}^{-1} \xi$; $\overline{A^2(t)} = \left(\sigma_0^2 - \overline{A_0}^2 \right) \text{ch}^{-2} \xi$; $\sigma_A^2(t) = \sigma_0^2 \text{ch}^{-2} \xi$;

в) $\overline{A(t)} = \overline{A_0} \text{ch}^{-2} \xi$; $\overline{A^2(t)} = \left(\sigma_0^2 - \overline{A_0}^2 \right) \text{ch}^{-4} \xi$; $\sigma_A^2(t) = \sigma_0^2 \text{ch}^{-4} \xi$;

г) $\overline{A(t)} = \overline{A_0} e^{-\xi^2}$; $\overline{A^2(t)} = \left(\sigma_0^2 - \overline{A_0}^2 \right) e^{-2\xi^2}$; $\sigma_A^2(t) = \sigma_0^2 e^{-2\xi^2}$.

9.2

а) $x(t) = e^{-t} \int_0^t e^{t'} (1 + \xi(t')) dt'$; $\overline{x(t)} = 1 - e^{-t}$;

б) $x(t) = e^t \int_0^t \xi(t') e^{-t'} dt'$; $\overline{x(t)} = e^t \int_0^t \overline{\xi(t')} e^{-t'} dt' = 0$;

$$\text{в)} \quad x(t) = e^{2t} \int_0^t (1 + \xi(t')) e^{-2t'} dt'; \quad \overline{x(t)} = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1);$$

$$\text{г)} \quad x(t) = e^{-t} \int_0^t e^{t'} (1 + \xi(t')) dt'; \quad \overline{x(t)} = 1 - e^{-t}.$$

9.3

$$\text{а)} \quad x(t) = e^{\beta t} \int_0^t \xi(t') e^{-\beta t'} dt'; \quad \beta = e^{-\frac{1}{2}\sigma_x^2};$$

$$\text{б)} \quad x(t) = e^{\beta t} \int_0^t \xi(t') e^{-\beta t'} dt'; \quad \beta = 3\sigma_x^2;$$

$$\text{в)} \quad x(t) = \alpha t + \int_0^t \xi(t') dt'; \quad \alpha = 1 + \sigma_x^2;$$

$$\text{г)} \quad x(t) = \alpha t + \int_0^t \xi(t') dt'; \quad \alpha = e^{-\sigma_x^2/2};$$

9.4

$$\text{а)} \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \cos \left[\bar{x} + e^{-t \sin \bar{x}} \cdot \int_0^t [\xi(t') - \bar{\xi}(t')] e^{t' \sin \bar{x}} dt' \right] + \bar{\xi}(t);$$

$$\text{б)} \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \sin \left[\bar{x} + e^{-t \cos \bar{x}} \cdot \int_0^t [\xi(t') - \bar{\xi}(t')] e^{t' \cos \bar{x}} dt' \right] + \bar{\xi}(t);$$

$$\text{в)} \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \left[\bar{x} + e^{3\bar{x}t} \cdot \int_0^t [\xi(t') - \bar{\xi}(t')] e^{-3\bar{x}t'} dt' \right]^2 + \bar{\xi}(t);$$

$$\text{г)} \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = 1 + \frac{1}{4\bar{x}} (1 - e^{-4\bar{x}t}) + \bar{\xi}(t).$$

10.1

$$а), б), в) \quad d_H = \frac{1}{2} \quad з) \quad d_H = \frac{\ln 3}{\ln 5}.$$

10.2

$$а), б) \quad d_H = \frac{\ln 4}{\ln 3}; \text{ периметр } p = \infty; \text{ в), г) } d_H = \frac{\ln 5}{\ln 3}; \text{ периметр } p = \infty;$$

$$д) \quad d_H = \frac{\ln 2m}{\ln m}, \text{ если } m - \text{четное}; \quad d_H = \frac{\ln(2m-1)}{\ln m}, \text{ если } m - \text{нечетное},$$

периметр $p = \infty$.

10.3

$$d_H = \frac{\ln(m-k)}{\ln m}.$$

10.4

$$а) \quad d_H = 1, \quad d_T = 1; \quad б) \quad d_H = \frac{\ln 7}{\ln 3}, \quad d_T = 1.$$

$$в) \quad d_H = \frac{\ln 5}{\ln 3}, \quad d_T = 1, \quad з) \quad d_H = \frac{\ln 4}{\ln 3}, \quad d_T = 1.$$

10.5

$$d_H = \frac{\ln 26}{\ln 3}, \quad d_T = 2.$$

10.6

$$d_H = \frac{\ln(3m-1)}{\ln k}, \quad d_T = m-1.$$

10.7

$$а) \quad x_1^* = 0, \quad x_2^* = -1, \quad б) \quad x_1^* = 0, \quad x_1^* = 0,$$

$$в) \quad x_1^* = 0, \quad x_2^* = 1/2, \quad з) \quad x_1^* = 0, \quad x_2^* = 3/4.$$

10.8

$$0 \leq \lambda < \infty.$$

10.9

$$а) \quad T_\infty = \frac{\alpha}{\beta}; \quad v_0 = 2\sqrt{\kappa(\alpha - 2\beta T_0)};$$

$$б) \quad T_\infty = \frac{\beta}{\alpha}; \quad v_0 = 2\sqrt{\kappa(2\alpha T_0 - \beta)};$$

$$6) T_{\infty} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}; v_0 = 2\sqrt{\kappa(3\alpha T_0^2 - \beta)};$$

$$7) T_{\infty} = \frac{\beta}{\alpha}; v_0 = 2\sqrt{2\kappa T_0(2\alpha T_0^2 - \beta)}.$$

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Лазоренко Олег Валерійович, Чорногор Леонід Феоктистович.
Нелінійна радіофізика. *Збірник задач. Підручник.*

Редактор

Коректори

Комп'ютерна верстка

Підписано до друку __.__.2019 р. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.

Друк ризографічний. Ум. др. арк.. 13. Обл. – вид. арк.

Тираж 300 пр.

61022, Харків, м. Свободи, 4.

Харківський національний університет

імені В. Н. Каразіна

Організаційно-видавничий відділ НМЦ
