МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. Н. КАРАЗИНА

Л. Ф. ЧЕРНОГОР

НЕЛИНЕЙНАЯ РАДИОФИЗИКА

Учебник

3-е изд., доп. и испр.

Харьков–2015

УДК 530.18+534.1, 550.338
ББК 32.814
Ч-49

Рецензенты:

В. М. Яковенко – академик НАН Украины (Институт радиофизики и электроники НАН Украины, г. Харьков);

С. Н. Шульга – доктор физ.-мат. наук, профессор Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.

Утверждено в печать решением Ученого совета
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина
(протокол №7 от 01.07.2015)

Чорногор Л. Ф.

Ч-49 Нелінійна радіофізика : підручник / Л. Ф. Чорногор. – 3-тє вид., доп. і переробл. – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2015. – 208 с.

ISBN 978-966-285-228-8

Викладено загальні питання нелінійної електродинаміки: вихідні рівняння, методи їх розв'язання, самовплив та взаємодія хвиль, теорія ударних хвиль і солітонів, нестійкості. Наведені численні приклади нелінійних явищ з електродинаміки, квантової та космічної радіофізики, фізики плазми тощо. Обговорюються питання детермінованого хаосу та самоорганізації.

Для студентів старших курсів, аспірантів і наукових робітників відповідного профілю.

46 іл., 4 табл., 44 бібл.

Черногор Л. Ф.

Ч-49 Нелинейная радиофизика : учебник / Л. Ф. Черногор. – 3-е изд., доп. и испр. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2015. – 204 с.

ISBN 978-966-285-228-8

Изложены общие вопросы нелинейной электродинамики: исходные уравнения, методы их решения, самовоздействие и взаимодействие волн, теория ударных волн и солитонов, неустойчивости. Приведены многочисленные примеры нелинейных явлений из электродинамики, квантовой и космической радиофизики, физики плазмы и т. д. Обсуждаются вопросы детерминированного хаоса и самоорганизации.

Для студентов старших курсов, аспирантов и научных работников соответствующего профиля.

46 илл., 4 табл., 44 библ.

Chernogor L. F.

Ч-49 Nonlinear Radio Physics : textbook / L. F. Chernogor. – Kharkiv : V. N. Karazin Kharkiv National University, 2015. – 208 p.

ISBN 978-966-285-228-8

The textbook is concerned with the following general principals of nonlinear electrodynamics: basic equations, techniques for their solution, self-action, interaction, shock wave and soliton theory, and instabilities. The numerous examples of nonlinear phenomena are presented from the field of electrodynamics, quantum and space radio- physics, plasma physics, etc. Deterministic chaos and self-organization are discussed.

The textbook is intended for graduate and postgraduate students, and scientists in the field.

46 Figures, 4 Tables, 44 References.

УДК 530.18+534.1, 550.338
ББК 32.814

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

«Мы имеем счастье жить в сложном и удивительном нелинейном мире. Огромную, вероятно, до сих пор не вполне осознанную, роль в его познании сыграли компьютеры, позволившие исследовать множество нелинейных математических моделей, описывающих нашу реальность. Возникла положительная обратная связь. Результаты компьютерного анализа приводят к рождению новых теорий, понятий, моделей. Изучение этих моделей с помощью вычислительных машин приводит к рождению теорий и моделей нового поколения и т. д.»[1]

Перед Вами, читатель, учебник «Нелинейная радиофизика». В последние десятилетия значительное внимание уделяется именно нелинейным наукам. Термины «динамический хаос», «синергетика» давно вошли в обиход. За рубежом используется более емкий и адекватный термин «nonlinear science». «Нелинейная наука» охватывает все существующее в природе разнообразие нелинейных систем и нелинейных процессов.

Для обмена научными знаниями проводились и проводятся «нелинейные» конференции. Давно стали историей конференции по нелинейной оптике или нелинейной акустике. Трудно переоценить роль горьковских (нижегородских) школ по нелинейным волнам, которые проводятся с 1970-х гг. С конца XX в. проводятся международные междисциплинарные симпозиумы «Фракталы и прикладная синергетика». Перечень «нелинейных» конференций можно продолжить.

С конца XX в. издаются журналы «Chaos» и «Fractals».

В России с 2003 г. стал выходить журнал «Нелинейный мир», в котором освещаются самые различные нелинейные процессы. Девизом этого журнала стали слова его главного редактора А. А. Потапова: «Мы все живем в сложном и удивительном нелинейном мире, пронизанном огромным числом отрица-

---

[1] Капица С. П. Синергетика / С. П. Капица, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 288 с.

тельных и положительных связей. При их учете уже не справедлив принцип суперпозиции, позволяющий получать решение сложных задач из решения более простых. Одной из принципиальных концепций науки становится теория самоорганизации, или синергетика.

Базовые модели нелинейной динамики позволяют более точно описывать явление Природы, по-новому взглянуть на развитие Науки, Общества, Человека».

Вместе с бурным развитием нелинейной науки совершенствуется и «нелинейное» образование. Курсы по нелинейной теории колебаний и волн давно стали традиционными. Читаются курсы по нелинейной оптике, нелинейной акустике, нелинейной физической механике, нелинейной радиофизике, синергетике и т. д.

В Саратовском государственном университете (Россия) основан, по-видимому, первый в своем роде факультет нелинейных процессов. Появилась университетская специальность «Физика открытых нелинейных систем».

В Сан-Диего (США) в составе университета Калифорнии функционирует институт нелинейных исследований.

Предпринимаются попытки ввести элементы нелинейности в среднее образование. При уже упомянутом Саратовском государственном университете функционирует заочная нелинейная школа.

Можно утверждать, что в XXI в. нелинейная наука находится на подъеме. Несомненно, ей принадлежит будущее.

Развитию нелинейного подхода к проблемам радиофизики и электроники будет способствовать данный учебник. Он охватывает все основные разделы радиофизики – нелинейную электродинамику, нелинейную квантовую радиофизику, нелинейные явления в плазменной, космической и статистической радиофизике.

Главная заслуга учебника состоит в том, что в нем убедительно обосновывается идея о том, что в целом мир – нелинеен, что радиофизика – нелинейна, традиционные подходы линейной радиофизики – лишь предельный случай, что нелинейная радиофизика гораздо «богаче» явлениями, чем линейная радиофизика.

Очень удачной представляется структура учебника. Каждый раздел обычно начинается с краткого экскурса в историю, затем излагаются классические нелинейные эффекты и современное состояние вопросов. Разделы, как и вся книга, заканчиваются основными результатами. Такая структура оказывается очень удобной для студентов.

Об авторе. Леонид Феоктистович Черногор – признанный в международных научных кругах ученый-радиофизик, автор важных фундаментальных и прикладных, теоретических и экспериментальных работ по космической радиофизике, нелинейной радиофизике, дистанционному радиозондированию атмосферы и геокосмоса, распространению радиоволн, анализу и обработке радиосигналов разных типов.

Л. Ф. Черногором опубликовано единолично или в соавторстве 18 монографий и учебных пособий, а также более 600 научных трудов.

Главным достижением Л. Ф. Черногора являются результаты его многолетних пионерских работ по исследованию радиофизических и геомагнитных эффектов в околоземной среде, сопровождающих воздействие мощного радиоизлучения различных диапазонов на геокосмическую плазму, сильных взрывов и землетрясений, стартов и полетов космических аппаратов, а также падений крупных космических тел. К этому естественным образом примыкает цикл его работ, посвященных изучению влияния антропогенных процессов на окружающую среду, на атмосферную и космическую погоду. Им впервые показано, что влияние этих процессов может быть сопоставимо с влиянием Солнца. Это позволило Л. Ф. Черногору сформулировать основные положения системного подхода к исследованию объекта Земля – атмосфера – ионосфера – магнитосфера, разработать новую концепцию в экологии атмосферы и геокосмоса.

Научная деятельность Л. Ф. Черногора отличается оптимальным сочетанием теоретических и экспериментальных исследований, выполняемых им на мировом уровне.

Его работы отмечены Государственной премией УССР и двумя премиями Совета Министров СССР, а также рядом других престижных премий.

Примерно за сорок лет работы в Харьковском национальном университете имени В. Н. Каразина (г. Харьков, Украина) доцентом, а затем профессором радиофизического факультета, Л. Ф. Черногором был разработан и прочитан большой объем лекций, внедрено более пятнадцати новых учебных курсов, подготовлено большое количество бакалавров, магистров, кандидатов наук и двух докторов наук.

Л. Ф. Черногором организовано научно-педагогическое сотрудничество со многими организациями России, Украины и других стран.

Л. Ф. Черногор – академик АН Прикладной радиоэлектроники Беларуси, России и Украины, академик АН Высшего образования Украины.

Академик НАН Украины
В. М. Яковенко

РАЗДЕЛ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЯХ. СТРУКТУРА, ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА

Физика была бы скучна, а жизнь совершенно невозможна, если бы все физические явления вокруг нас были линейными. К счастью, мы живем в нелинейном мире, и если линеаризация украшает физику, то нелинейность делает ее захватывающей[1].

И. Р. Шен[2]

При изучении физики (радиофизики) вначале ограничиваются рассмотрением линейных явлений, которые описываются линейными (дифференциальными, интегро-дифференциальными или иными) уравнениями. Методы решения таких уравнений достаточно хорошо развиты и поэтому большинство линейных явлений удается проанализировать «до конца». Однако при более общем подходе оказывается, что явления природы чаще всего нелинейные, т. е. описываются нелинейными уравнениями. Нелинейность является неотъемлемым свойством любой системы, эволюционирующей во времени. Всякий переход из одного равновесного состояния в другое, как правило, представляет собой нелинейный процесс. Примерами таких процессов является рождение и эволюция Вселенной; образование, существование и исчезновение звезд; появление из вакуума, слияние и распад элементарных частиц; спонтанное рождение упорядоченных структур; возникновение органической и разумной жизни и т. п.

---

[1] См.: Шен И. Р. Принципы нелинейной оптики / И. Р. Шен – М. : Наука, 1989. – 560 с.

[2] Профессор Калифорнийского университета в Беркли, специалист в области нелинейной оптики и квантовой радиофизики.

К нелинейным наукам относятся механика, аэро- и гидродинамика, электродинамика, неравновесная термодинамика, физика высоких энергий, физика твердого тела, физика плазмы, физика атмосферы и океана, космология и многие другие науки. Оказывается, что окружающий нас мир является нелинейным, при этом многие процессы в разных науках подобны друг другу. Нелинейные явления в физике – не исключение, а закономерность. Линейная физика представляет собой своеобразный предел нелинейной физики. Поэтому нелинейная физика гораздо «богаче» линейной.

Патриарх российской физики, Нобелевский лауреат по физике 2003 г. академик В. Л. Гинзбург высказал иную точку зрения на нелинейную физику[1]. В середине 1980-х гг. он сформулировал 23 проблемы, которые должны определить развитие физики в конце XX и в XXI в. (Интересно, что их число совпало с числом знаменитых проблем Гильберта, предопределивших развитие математики в XX веке.) Среди прочих проблем, например, таких как проблема металлического водорода, В. Л. Гинзбург назвал и нелинейную физику, фактически понимая под нею только возникновение хаотических колебаний в простых детерминированных системах и турбулентность в гидродинамике. Нам же такой подход представляется слишком узким и неоправданным.

1.1. Основные этапы формирования представлений о нелинейном мире

Представление о нелинейном мире формировалось постепенно. В античные времена и средневековье элементы нелинейности изучались в математике, но отсутствовали в науках о природе. В математике были найдены решения квадратных, кубических, а затем и уравнений более высоких степеней, формировались также понятия о свойствах нелинейных функций.

Небесная механика – первая из естественных наук, столкнувшаяся еще во времена Кеплера с нелинейностью. Именно Кеплер установил, что период обращения планет зависит от их кинетической энергии орбитального движения. Проблема трех тел, взаимодействующих по закону всемирного тяготения, – также пример нелинейной задачи из области механики.

В 1835 г. шотландский инженер-кораблестроитель Дж. С. Рассел обнаружил необычные нелинейные волны на воде, которые он назвал

---

[1] См.: Физика XX века. Развитие и перспективы.– М. : Наука, 1984. – С. 219–280.

уединенными. К ним, в частности, относятся волны, генерируемые на поверхности океана во время подводных землетрясений и извержений вулканов, получившие название *цунами*. Математически уединенная волна Рассела описана в 1895 г. Кортевегом и де Вризом.

Еще в середине XIX в. физики столкнулись с другим ярким примером нелинейных волн – ударными волнами в газах и жидкостях.

Уже в начале XX в. стало ясно, что многие задачи гидродинамики, акустики и аэродинамики являются *нелинейными*.

Примерно в это же время ставятся и решаются задачи зарождающейся радиотехники (такие как генерация, смешение, детектирование колебаний). Одним из пионеров *нелинейной радиотехники* (да и теории колебаний) является Ван-дер-Поль. В 1920–1930-е гг. появляется советская школа «нелинейных радиотехников». Ее возникновение связано с деятельностью одного из первых советских радиофизиков – Л. И. Мандельштама.

В 1930–1940-х гг. обнаружены и изучены явления кросс-модуляции и самомодуляции в ионосфере Земли при распространении в ней мощных радиоволн средневолнового и длинноволнового диапазонов.

До Второй мировой войны нелинейные задачи в различных областях науки представлялись специфическими и решались каждая своим методом. После создания теории нелинейных колебаний начали прорисовываться общие закономерности в нелинейных процессах, постепенно появился «*нелинейный язык*», «*нелинейный опыт*» и стало формироваться «*нелинейное мышление*». Разные науки и задачи техники начали обогащать друг друга. Была установлена общность моделей нелинейных явлений и методов их анализа.

Значительное разнообразие нелинейных явлений было обнаружено в 1940–1950-е гг. в связи с работами по созданию ядерного оружия, сверх- и гиперзвуковой авиации, ракетно-космической техники.

Большое влияние на изучение нелинейных явлений оказала разработка электронно-вычислительной техники. Уже на рубеже 1940–1950-х гг. в США было обнаружено в численном эксперименте *явление Ферми–Пасты–Улама*, сводящееся к возникновению незатухающих уединенных волн в системе связанных нелинейных маятников.

Другой фундаментальный результат численных экспериментов относится к обнаружению необычного поведения нелинейных уединенных волн. Эти волны после взаимодействия расходились, не изменив своих параметров, что напоминало столкновение упругих шаров или частиц. По этой причине авторы данного результата назвали такую уединенную волну *солитоном* (Забуский, Крускал, 1965 г.). Таким образом, в науку введено новое фундаментальное понятие. Солитон играет в нелинейной физике такую же всеобъемлющую роль, как осциллятор в классической физике. Его примерами могут служить черные дыры в астрофизике, Большое Красное Пятно в атмосфере Юпитера, шаровая молния, циклоны, цунами, электрические домены Ганна, монополь Дирака и др.

В 1960-е гг. появились или получили развитие такие науки, как *нелинейная оптика* (*нелинейная квантовая радиофизика*), *нелинейная акустика*, *нелинейная физика плазмы*, *нелинейная физика полупроводников*, *физика высоких энергий*, *нелинейная термодинамика* и др.

В 1960–1990-е гг. интенсивно изучается воздействие мощного радиоизлучения на околоземную космическую плазму. Околоземный космос превратился в своеобразную «нелинейную» лабораторию.

С 1960-х гг. ведут свой отсчет такие направления в науке, как *детерминированный хаос* и *синергетика*. Последняя, являясь междисциплинарной наукой, описывает зарождение порядка из хаоса.

В настоящее время нелинейная физика (радиофизика) бурно развивается. Несмотря на это, мы еще очень мало знаем о нелинейных явлениях, но еще меньше умеем их использовать.

1.2. Причины возникновения нелинейных явлений

Механизмы нелинейных явлений, естественно, зависят от специфики изучаемого процесса. Однако в одном достаточно общем случае можно указать универсальную причину. Нелинейность появляется, если процесс характеризуется сравнительно большим *энергосодержанием (энерговыделением)*, относительно высокими скоростями, температурами и т. п. Обычно достаточно ввести в рассмотрение плотность энергии вынуждающего источника $w_{\text{и}}$ и плотность энергии $w_{\text{п}}$ изучаемого процесса. Нелинейные явления становятся существенными при $w_{\text{и}} \geq w_{\text{п}}$ и определяющими при $w_{\text{и}} \gg w_{\text{п}}$. Линейным рассмотрением можно ограничиться при $w_{\text{и}} \ll w_{\text{п}}$.

В радиофизике в теории колебаний и волн удобнее использовать амплитуду A возмущающей волны (колебания) и характерную амплитуду $A_{\text{х}}$, описывающую данный процесс. Тогда линейная теория применяется при

$A \ll A_х$, если же $A \geq A_х$ и тем более $A \gg A_х$, необходимо решать нелинейную задачу.

Таким образом, линейное рассмотрение возможно, если имеется малый параметр типа

$$\mu = \frac{w_и}{w_п}, \quad \mu = \frac{A}{A_х}$$

В этом случае исходные уравнения линеаризуются по малому параметру (или их совокупности). Следовательно, линейная теория – это предельный случай нелинейной теории, когда $\mu \to 0$. Поэтому ясно, что физика нелинейных процессов должна быть значительно богаче физики линейных явлений.

Строго говоря, нелинейностью нельзя пренебречь даже при $A \ll A_х$ или $\mu \ll 1$. Например, если слабая волна ($A \ll A_х$) распространяется в среде, которую можно рассматривать как недиссипативную недиспергирующую, то при прохождении достаточно большого пути нелинейные эффекты накапливаются и становятся определяющими. Поэтому недиспергирующая, недиссипативная среда достаточной протяженности должна рассматриваться как нелинейная. Дисперсия и диссипация препятствуют нелинейным искажениям. Действительно, наличие диссипации может привести к поглощению волны еще до того, как скажется нелинейность. За счет дисперсии фазовые соотношения между гармониками быстро изменяются в пространстве, значит, прогрессивного обогащения спектра и заметного искажения профиля волны в результате нелинейности не происходит.

Откуда появляется нелинейность в радиофизике? Дело в том, что в вакууме уравнения Максвелла и, как следствие, волновое уравнение – линейные. При распространении достаточно сильных ($A \geq A_х$) электромагнитных волн в средах может возникнуть зависимость относительных тензоров диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ и магнитной проницаемости $\hat{\mu}$, а также проводимости среды $\hat{\sigma}$ от амплитуды поля волны, т. е.

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon} &= \hat{\varepsilon}(E, H), \\
\hat{\mu} &= \hat{\mu}(E, H), \\
\hat{\sigma} &= \hat{\sigma}(E, H).
\end{aligned}$$

В данном курсе ограничимся случаем

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(E),$$
$$\hat{\mu} = 1,$$
$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(E).$$

1.3. Структура, цели и задачи курса

Курс состоит из семи разделов и заключения.

Первый раздел является Введением.

Во втором разделе изучаются основы нелинейной электродинамики, т. е. методы решения нелинейного волнового уравнения, точные решения уравнений Максвелла, эффекты самовоздействия и взаимодействия электромагнитных волн, неустойчивости, а также стационарные волны и солитоны.

Третий раздел посвящен некоторым нелинейным эффектам в квантовой радиофизике.

В четвертом разделе рассматриваются нелинейные явления в газоразрядной и твердотельной плазме.

В пятом разделе изучаются нелинейные процессы в околоземной космической плазме.

В шестом разделе даются основные понятия о методах решения нелинейных задач статистической радиофизики.

Седьмой раздел посвящен двум актуальным проблемам нелинейной радиофизики – возможности возникновения хаоса в детерминированных системах и самоорганизации.

В Заключении подведены итоги курса.

Целью курса является описание основных эффектов и процессов в нелинейной радиофизике. Для уяснения общности явлений природы приводятся многочисленные примеры из смежных наук. Курс должен способствовать формированию нелинейного мышления и нелинейного мировоззрения.

Студент должен знать:

– причины и механизмы возникновения, методы описания нелинейных явлений;

– основные нелинейные явления, возникающие в различных разделах современной радиофизики;

– место и роль нелинейных эффектов в радиофизике, физике, других науках и в технике.

Студент должен уметь:

– оценивать возможность возникновения нелинейных явлений в различных задачах радиофизики;

– качественно и количественно описывать основные нелинейные явления, возникающие при распространении сильных электромагнитных волн в средах.

Изучению курса должны помочь книги, перечень которых представлен в списке литературы [1–44].

Вопросы для самоконтроля

1. Объясните, почему нелинейность – закономерность, а не исключение.

2. Опишите основные этапы формирования представлений о нелинейном мире.

3. Почему важен учет нелинейности?

4. Опишите причины возникновения нелинейности в радиофизике.

5. Что должен знать читатель, изучивший книгу «Нелинейная радиофизика»?

6. Что должен уметь читатель, изучивший книгу «Нелинейная радиофизика»?

РАЗДЕЛ 2. НЕЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

... Нельзя двигаться дальше, не обсудив предварительно некоторые физические проблемы. Первоначальное развитие теории связано с нелинейными волнами в газах и образованием ударных волн...

Дж. Уизем[1]

... Наиболее интересным явлением, которое описывается лишь нелинейной теорией, оказываются ударные волны, представляющие собой резкие скачки давления, плотности и скорости...

Дж. Уизем[2]

В данном разделе рассматриваются основные нелинейные эффекты, возникающие при распространении сильных электромагнитных волн в средах. Уделено внимание методам нелинейной электродинамики, самовоздействию и взаимодействию волн, нелинейным стационарным волнам (ударным волнам, уединенным волнам, солитонам), а также генерации неустойчивостей [6, 10, 31].

2.1. Качественная картина нелинейных явлений

Нелинейность материальных уравнений приводит к нелинейности уравнений теории электромагнитного поля (волнового уравнения). В отличие от линейной электродинамики, в нелинейной электродинамике несправедлив принцип суперпозиции. Любые две волны теперь распространяются не

---

[1] См.: Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем пер. с англ. – М. : Мир, 1977. – 622 с.

[2] См.: Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны / пер. с англ. – М. : Мир, 1977. – 622 с.

независимо. Это же относится и к большему числу волн. Возникает *нелинейное взаимодействие* волн посредством среды, в которой они распространяются. В частности, имеет место перенос модуляции от одной волны к другой (явление *перекрестной модуляции*, или *кросс-модуляции*).

Итак, в нелинейной теории несправедлив принцип суперпозиции. А что имеем вместо него? Ничего. Говорят, что термин *нелинейный* обозначает отрицание и не обладает конструктивизмом[1]. Это же можно сказать и о термине *нелинейность*.

Продолжим описание качественной картины нелинейных явлений. Волна, создающая возмущения в среде, испытывает их на себе. Так возникает *самовоздействие* волн. Зависимость показателя поглощения волны κ от ее амплитуды A обуславливает увеличение или уменьшение поглощения по сравнению с линейной теорией. Эти эффекты называются соответственно *помутнением* или *просветлением среды*.

Зависимость показателя преломления n от A приводит к изменению фазовой скорости волны и появлению нелинейной добавки к фазе $\Delta\varphi$. Если к тому же $n = n(A(t))$ изменяется во времени, то возникает доплеровское смещение частоты (*нелинейный эффект Доплера*):

$$\Delta\omega = -\frac{d\Delta\varphi}{dt}.$$

В анизотропных средах имеет место двойное лучепреломление, так как показатели преломления нормальных волн (обыкновенной и необыкновенной) неравны, т. е. $n_1 \neq n_2$. В нелинейной теории также неравны нелинейные добавки к ним, т. е. $\Delta n_1 \neq \Delta n_2$. Это приводит к дополнительному повороту эллипса (плоскости) поляризации волн, называемому *нелинейным эффектом Фарадея*.

Зависимость скорости волны от ее амплитуды становится причиной *нелинейного укручения* профиля волны.

Для мощных пучков волн зависимость $n(A)$ приводит к тому же к *пространственной фокусировке* или *дефокусировке пучка*.

Нелинейность среды вызывает генерацию волн на *комбинационных частотах* $(n\omega_1 \pm m\omega_2; n, m \in \mathbb{N})$, а также на *кратных частотах* $(n\omega, n \in \mathbb{N})$.

---

[1] Конструктивизм предполагает условия для развития последующих идей (формулировки правил, теорем, создание теорий).

При воздействии сильных волн может возникнуть экспоненциальный рост амплитуды колебаний, приводящий к генерации *неустойчивостей*.

Вопросы для самоконтроля

1. Опишите качественную картину нелинейных явлений в радиофизике.
2. Почему нелинейность не обладает свойством конструктивизма?
3. Что такое нелинейное взаимодействие электромагнитных волн?
4. Что такое самовоздействие электромагнитных волн?
5. Почему возникает нелинейный эффект Доплера?
6. Почему возникает нелинейный эффект Фарадея?
7. Как возникает нелинейная фокусировка (дефокусировка) пучков электромагнитных волн?
8. Что происходит с мощными радиоимпульсами в нелинейной среде?

2.2. Нелинейные уравнения электродинамики

Пара роторных уравнений Максвелла имеет вид:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \tag{2.2.1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{2.2.2}$$

где $\vec{D}=\hat{\varepsilon}_a(E)\vec{E}$, $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$, $\hat{\varepsilon}_a=\hat{\varepsilon}\varepsilon_0$, ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная постоянные. Далее получим из (2.2.1) и (2.2.2) нелинейное волновое уравнение.

2.2.1. Точное решение нелинейных уравнений электродинамики

Предположим, что среда изотропная, недиспергирующая, без диссипации. Волну будем считать сильной. Пусть она распространяется вдоль оси x, а электрическое и магнитное поля направлены соответственно по осям y и z (рис. 2.1).

Тогда уравнения (2.2.1) и (2.2.2) сводятся к следующим:

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial D}{\partial t}, \tag{2.2.3}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{2.2.4}$$

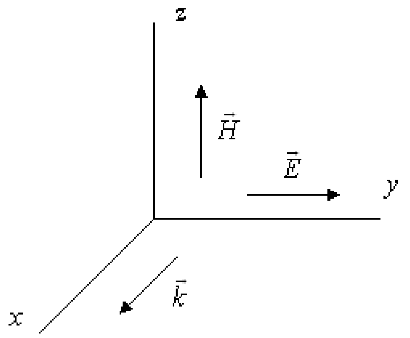


Рис. 2.1. Геометрия задачи

Это следует из роторных уравнений Максвелла в данной системе координат:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{i}\,\frac{\partial H}{\partial y} - \vec{j}\,\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\vec{i}\,\frac{\partial E}{\partial z} + \vec{k}\,\frac{\partial E}{\partial x},$$

где $\dfrac{\partial H}{\partial y} = \dfrac{\partial E}{\partial z} = 0$. Вектор $\vec{D}$ направлен по оси y. Вычислим вначале

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{dD}{dE}\frac{\partial E}{\partial t} \equiv \varepsilon_a(E)\frac{\partial E}{\partial t}, \tag{2.2.5}$$

где по определению

$$\varepsilon_a(E) = \varepsilon_0\varepsilon(E) = \frac{dD}{dE}.$$

В линейной теории поле H пропорционально E. Естественно предположить, что для нелинейной волны $H = H(E)$. Тогда

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{dH}{dE}\frac{\partial E}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{dB}{dE}\frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0\frac{dH}{dE}\frac{\partial E}{\partial t}. \tag{2.2.6}$$

Подставляя (2.2.5) и (2.2.6) в (2.2.3) и (2.2.4), получим

$$-\frac{dH}{dE}\frac{\partial E}{\partial x} - \varepsilon_a\frac{\partial E}{\partial t} = 0, \tag{2.2.7}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \mu_0\frac{dH}{dE}\frac{\partial E}{\partial t} = 0. \tag{2.2.8}$$

Система уравнений (2.2.7) и (2.2.8) для $\dfrac{\partial E}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial E}{\partial t}$ – однородная. Она имеет нетривиальное решение, если определитель системы равен 0, т. е.

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{dH}{dE} & -\varepsilon_a \\ 1 & \mu_0\dfrac{dH}{dE} \end{vmatrix} = -\mu_0\left(\frac{dH}{dE}\right)^2 + \varepsilon_a = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dH}{dE} = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon_a(E)}{\mu_0}}. \tag{2.2.9}$$

Решение (2.2.9) имеет вид:

$$H(E) = \pm\int_0^E \sqrt{\frac{\varepsilon_a(E)}{\mu_0}}dE\,. \tag{2.2.10}$$

Для нахождения $E(t,x)$ обратимся к уравнению (2.2.7). С учетом (2.2.9) оно примет вид:

$$\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_0}}\frac{\partial\, E}{\partial\, x} + \varepsilon_a\frac{\partial\, E}{\partial\, t} = 0. \tag{2.2.11}$$

Нелинейные уравнения в частных производных первого порядка целесообразно решать методом характеристик. Вкратце суть его состоит в следующем. Для уравнения вида

$$f_1(x,y)\frac{\partial\, z}{\partial x} + f_2(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

уравнение характеристик, т. е. семейства линий, покрывающих поверхность $z = z(x,y)$, имеет вид:

$$\frac{dx}{f_1(x,y)} = \frac{dy}{f_2(x,y)} = \frac{dz}{0}.$$

Тогда решение (2.2.11) запишется так:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{\pm\sqrt{\varepsilon_a\mu_0}} = \frac{dE}{0},$$

или же

$$\frac{dx}{dt} = \pm\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}},$$

где $c = (\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,)^{-1}$ – скорость света в вакууме.

Отсюда

$$x = \pm\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}t + C(E), \tag{2.2.12}$$

где $C(E)$ – произвольная функция, вид которой устанавливается из начальных и граничных условий. Из (2.2.12) следует, что

$$C(E) = x \mp \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}t, \quad \varepsilon = \varepsilon(E).$$

Вводя обратную функцию C^{-1}, решение представим в виде

$$E(t,x) = C^{-1}\left(x \mp \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\,(\,E(t,x))}}\,t\right) \equiv f\left(x \pm \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\,(\,E(t,x))}}\,t\right). \tag{2.2.13}$$

Два знака в решении соответствуют двум направлениям распространения волны. Уравнение (2.2.13) описывает распространение нелинейных волн. Волна распространяется с фазовой скоростью

$$u(E) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(E)}}.$$

Важно, что u зависит от E. Поэтому по мере распространения профиль волны искажается. Обычно $\varepsilon(E)$ убывает с ростом E (зависимость $\varepsilon(E)$ стремится к насыщению). Тогда части профиля с большим значением E бегут быстрее, в результате чего увеличивается крутизна переднего фронта (рис. 2.2). Если же $\varepsilon(E)$ возрастает с ростом E, то деформируется задний фронт.

Рис. 2.2. Искажение профиля нелинейной волны (например, на поверхности воды). Для электромагнитных волн ситуации, показанные для $t = t_2$ и $t = t_3$, – невозможны

2.2.2. Нелинейное волновое уравнение

Продифференцируем (2.2.1) по времени и придем к выражению:

$$\mathrm{rot}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}. \qquad (2.2.14)$$

Подставив из (2.2.2) $\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\vec{E}$ в (2.2.14), получим

$$\mathrm{rot\ rot}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}. \qquad (2.2.15)$$

Так как

$$\mathrm{rot\ rot}\vec{E} = \mathrm{grad\ div}\vec{E} - \Delta \vec{E},$$

а $\mathrm{div}\vec{E} = 0$ для поперечных волн ($\vec{E} \perp \vec{k}$, $\vec{k}$ – волновой вектор), то из (2.2.15) следует:

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}. \qquad (2.2.16)$$

Пренебрегая генерацией кратных частот, для монохроматической волны заменим $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ на $(i\omega)^2 = -\omega^2$ и из (2.2.16) получим

$$\Delta \vec{E} = -\omega^2 \mu_0 \vec{D}$$

или

$$\Delta\vec{E} = -\omega^2\mu_0\hat{\varepsilon}_a\vec{E}. \tag{2.2.17}$$

Представим $\hat{\varepsilon}_a(E)$ в виде

$$\hat{\varepsilon}_a = \hat{\varepsilon}(E)\varepsilon_0 = \varepsilon_0\big(\hat{\varepsilon}_{\text{л}} + \hat{\varepsilon}_{\text{нл}}(E)\big),$$

где $\hat{\varepsilon}_{\text{нл}}$ – нелинейная добавка к линейному тензору $\hat{\varepsilon}_{\text{л}}$, и перепишем (2.2.17) с учетом того, что $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$:

$$\Delta\vec{E} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\hat{\varepsilon}_{\text{л}}\vec{E} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\hat{\varepsilon}_{\text{нл}}(E)\vec{E}\,. \tag{2.2.18}$$

Соотношение (2.2.18) называется *нелинейным волновым уравнением*. Оно переходит в линейное волновое уравнение при $\hat{\varepsilon}_{\text{нл}} = 0$.

Вопросы для самоконтроля

1. Получите и проанализируйте точное решение уравнений нелинейной электродинамики. При каких ограничениях удается найти точное решение?
2. Поясните, почему возникает эффект укручения профиля волны?
3. Получите нелинейное волновое уравнение.

Задача

1. Считая среду изотропной, недиспергирующей и без диссипации, получить точное решение уравнений электродинамики, вычислить u, E и H для

а) $\varepsilon(E) = \varepsilon_0(1+\alpha E)^2$, б) $\vec{D} = \int\limits_0^E (1+\alpha\vec{E}^2)^2 d\vec{E}$.

Считать, что до падения волны на среду ($x < 0,\ t < 0$)

$$\vec{E}(0) = \vec{E}_0\cos k_0(x - ct)\,.$$

2.3. Методы нелинейной электродинамики

Чаще всего аналитические методы нелинейной радиофизики базируются на использовании малого параметра. Удачный выбор малого параметра позволяет построить метод решения нелинейной задачи.

Ниже описаны наиболее распространенные методы решения таких задач в электродинамике (см. также [6, 10, 31]).

В качестве исходного возьмем нелинейное волновое уравнение (2.2.18):

$$\Delta\vec{E} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon}_{\text{л}}\vec{E} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon}_{\text{нл}}(E)\vec{E}\,. \tag{2.3.1}$$

2.3.1. Метод малых возмущений

Данный метод применим, если нелинейность слабая, т. е. поле незначительно отличается от поля в линейной теории. В качестве малого параметра можно принять

$$\mu = \left|\frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{\varepsilon_{\text{л}}}\right|,$$

где под $\varepsilon_{\text{нл}}$ и $\varepsilon_{\text{л}}$ понимаются соответствующие компоненты тензора. Тогда решение (2.3.1) ищется в виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots, \tag{2.3.2}$$

где $\vec{E}_i \sim \mu^i, i \in N$. Подставляя (2.3.2) в (2.3.1) и приравнивая члены одинакового порядка малости, получим бесконечную систему уравнений:

$$\Delta\vec{E}_0 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon}_{\text{л}}\vec{E}_0 = 0\,, \tag{2.3.3}$$

$$\Delta\vec{E}_1 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon}_{\text{л}}\vec{E}_1 = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon}_{\text{нл}}(E_0)\vec{E}_0\,, \tag{2.3.4}$$

$$\Delta\vec{E}_2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon}_{\text{л}}\vec{E}_2 = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon}_{\text{нл}}(E_1)\vec{E}_1, \tag{2.3.5}$$

и т. д.

Особенности метода малых возмущений состоят в следующем:

– каждое вышестоящее уравнение решается независимо от нижестоящих; это означает, что уравнение (2.3.3) решается независимо от остальных и дает поле в линейной теории; уравнение (2.3.4) использует решение уравнения (2.3.3), но решается независимо от (2.3.5) и т. д.;

– метод позволяет найти решение с любой наперед заданной точностью;

– все уравнения вида (2.3.3), (2.3.4) и т. д. являются линейными, причем первое из них – однородное, а остальные – неоднородные, т. е. с источником или вынуждающей силой; в качестве такой силы выступает поле предыдущего порядка малости;

– метод применим при достаточно слабом поле волны, приводящем к малой нелинейности.

2.3.2. Метод медленно меняющихся амплитуд

Идея метода позаимствована из теории нелинейных колебаний. Рассмотрим вначале одномерную задачу. Пусть волна распространяется вдоль оси x. Тогда (2.3.1) сводится к уравнению:

$$\frac{d^2E}{dx^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon_{\text{л}}E=-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon_{\text{нл}}(E)E\,, \tag{2.3.6}$$

где под E понимается компонента электрического поля. Для простоты среду далее будем считать изотропной (т. е. $\varepsilon_{\text{л}}$, $\varepsilon_{\text{нл}}$ – скаляры). Решение (2.3.6) ищем в виде

$$E(x)=A(x)e^{-i\Phi}\,,\qquad \Phi=\int\limits_0^x k(x)dx\,, \tag{2.3.7}$$

где k – волновое число, $A(x)$ – медленно меняющаяся амплитуда. Критерием медленности есть малое относительное изменение A на расстоянии порядка длины волны λ:

$$\mu=\left|\frac{\lambda}{A}\frac{dA}{dx}\right|\ll 1.$$

Поле E (или A) считаем сколь угодно большим, но $\left|\varepsilon_{\text{нл}}/\varepsilon_{\text{л}}\right|\sim\mu$. Подстановка (2.3.7) в (2.3.6) дает

$$\left(\frac{d^2A}{dx^2}-i\Phi''A-2ik\frac{dA}{dx}-k^2A\right)e^{-i\Phi}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon_{\text{л}}A\,e^{-i\Phi}=-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon_{\text{нл}}A\,e^{-i\Phi}.$$

Важно, что $\varepsilon_{\text{í ë}}$ зависит лишь от модуля поля, поэтому $\varepsilon_{\text{нл}}=\varepsilon_{\text{нл}}(\left|A\right|)$. Сокращая на экспоненту, отличную от нуля, и приравнивая члены одинакового порядка малости, получим

$$k^2=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon_{\text{л}}, \tag{2.3.8}$$

$$2ik\frac{dA}{dx}=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon_{\text{нл}}\left(\left|A\right|\right)A-i\Phi''A, \tag{2.3.9}$$

где $\Phi''=k'$. (Член $d^2A\,/\,dx^2$ – второго порядка малости.)

Уравнение (2.3.8) представляет собой дисперсионное соотношение:

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{\text{л}}}\,.$$

Тогда

$$k' = \frac{\omega}{c}\frac{\varepsilon_{\text{л}}'}{2\sqrt{\varepsilon_{\text{л}}}}\,.$$

Выражение (2.3.9), переписанное в виде

$$\frac{d\tilde{A}}{dx} = -i\frac{\omega}{c}\frac{\varepsilon_{\text{нл}}\left(|\,\tilde{A}\,|\right)}{2\sqrt{\varepsilon_0}}\tilde{A} - \frac{\varepsilon_{\text{л}}'}{4\varepsilon_{\text{л}}}\tilde{A}\,, \tag{2.3.10}$$

называется *укороченным уравнением для комплексной амплитуды*. (Это дифференциальное уравнение первого, а не второго порядка, как исходное волновое уравнение). Знак ~ введен для того, чтобы подчеркнуть комплексный характер.

Если потери в системе отсутствуют, то для

$$\tilde{A}(x) = A(x)e^{-ik\psi_{\text{нл}}(x)},$$

где $\psi_{\text{нл}}(x)$ – так называемый нелинейный эйконал, или нелинейный фазовый путь ($k\psi$ – фазовый набег), имеем:

$$\frac{dA}{dx} = 0\,, \tag{2.3.11}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_{\text{нл}}(A)}{\varepsilon_0}\,. \tag{2.3.12}$$

Из (2.3.11) следует, что

$$A(x) = A_0\,,$$

где $A(0) = A_0$. В отсутствие потерь амплитуда волны не изменяется. Тогда из (2.3.12) имеем:

$$\psi_{\text{нл}} = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\varepsilon_{\text{нл}}(A)}{\varepsilon_{\text{л}}}\,dx\,,$$

или для однородной среды

$$\psi_{\text{нл}}(x) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{\varepsilon_{\text{л}}}\,x\,.$$

В линейной теории $\varepsilon_{\text{нл}} = 0$, $\psi_{\text{нл}} = 0$.

Если же слабо неоднородная среда с поглощением, то из (2.3.10) можно получить укороченное уравнение для действительной амплитуды в виде

$$\frac{dA}{dx} + \alpha(A)A = 0, \tag{2.3.13}$$

справедливое вдали от области отражения волны. Здесь $\alpha(A)$ – нелинейный коэффициент поглощения волны, зависящий от $\varepsilon_{\text{л}}$ и $\varepsilon_{\text{нл}}(A)$.

Из соотношения (2.3.10) находятся также уравнения для нелинейной добавки к фазе:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \frac{\omega}{c}\int_0^x (n(A) - n_0)\,dx, \tag{2.3.14}$$

где φ_0 и n_0 – фаза волны и показатель преломления в линейной теории, φ и n – то же в нелинейной теории. Если n_0 зависит только от $\varepsilon_{\text{л}}$, то n зависит и от $\varepsilon_{\text{л}}$, и от $\varepsilon_{\text{нл}}$.

2.3.3. Метод нелинейной квазиоптики

Будем считать, что трехмерный пучок волн распространяется вдоль оси x. Для изотропной среды волновое уравнение имеет вид:

$$\Delta E + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{\text{л}} E = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{\text{нл}}\left(\left|E\right|\right)E. \tag{2.3.15}$$

Решение (2.3.15) ищется в виде (см., например, [6, 10])

$$E(x,y,z) = A(x,y,z)e^{-i\Phi},$$

причем

$$\left|\frac{\lambda}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\right| \sim \mu, \qquad \left|\frac{\lambda}{A}\frac{\partial A}{\partial y}\right| \sim \left|\frac{\lambda}{A}\frac{\partial A}{\partial z}\right| \sim \mu^{\frac{1}{2}}.$$

Данные условия означают, что в поперечном (далее индекс $\perp$) по отношению к оси x направлении амплитуда изменяется значительно быстрее, чем в продольном направлении. Этим свойством обычно обладают пучки (лазерные пучки, диаграммы направленности антенн и т. д.). Как и для одномерного случая, в трехмерном случае относительные изменения амплитуды A малы на длине $\sim \lambda$. Так как

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_\perp,$$

то

$$\Delta E = \left(\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - i\Phi'' A - 2ik\frac{\partial A}{\partial x} - k^2 A\right) + \Delta_\perp A\right)e^{-i\Phi}.$$

Тогда уравнение (2.3.15) примет вид:

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - i\Phi'' A - 2ik\frac{\partial A}{\partial x} - k^2 A + \Delta_\perp A + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{\text{л}} A\right) e^{-i\Phi} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{\text{нл}}\left(\left|A\right|\right) A e^{-i\Phi}.$$

Отсюда для величин нулевого и первого порядка малости имеем:

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{\text{л}}, \qquad (2.3.16)$$

$$2ik\frac{\partial A}{\partial x} = \Delta_\perp A + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{\text{нл}}\left(\left|A\right|\right) A - i\Phi'' A. \qquad (2.3.17)$$

Уравнение (2.3.16) является дисперсионным соотношением, а выражение (2.3.17) – основным в нелинейной квазиоптике. Термин квазиоптика предполагает малость λ, что обеспечивает малость μ.

При $\varepsilon_{\text{нл}} = 0$ уравнение (2.3.17) переходит в так называемое *параболическое уравнение*, описывающее дифракцию пучков.

2.3.4. Уравнения эйконала и переноса

Уравнение (2.3.17) – комплексное. Часто при его решении удобно перейти к действительным функциям

$$\tilde{A}(x,y,z) = A(x,y,z)e^{-ik\psi}, \qquad (2.3.18)$$

где $\tilde{A}$ и A – комплексная и действительная амплитуды, ψ – эйконал. Подставляя (2.3.18) в (2.3.17) и разделяя действительную и мнимую части уравнения, получим

$$2\frac{\partial\psi}{\partial x} + \left(\nabla_\perp\psi\right)^2 = \frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{\varepsilon_{\text{л}}} + \frac{\Delta_\perp A}{k^2 A}, \qquad (2.3.19)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \nabla_\perp A \nabla_\perp \psi + \frac{1}{2} A_0 \Delta_\perp \psi = 0. \qquad (2.3.20)$$

Соотношения (2.3.19) и (2.3.20) называют соответственно уравнением эйконала и уравнением переноса. Первое из них описывает изменение фазы, второе – амплитуды волны. В действительности эти уравнения связаны между собой и относятся к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных.

Решение (2.3.19) и (2.3.20) связано с серьезными трудностями.

1.1.1. Метод нелинейной геометрической оптики

В этом случае $\lambda \to 0$, т. е. $k \to \infty$. Тогда уравнение (2.3.19) несколько упростится и примет вид:

$$2\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\nabla_{\perp}\psi\right)^2 = \frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{\varepsilon_{\text{л}}}. \tag{2.3.21}$$

Данное уравнение справедливо, если можно пренебречь дифракционными эффектами.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите методы нелинейной электродинамики.
2. В чем суть метода малых возмущений? В чем заключаются его достоинства и недостатки?
3. В чем суть метода медленно меняющихся амплитуд? В чем заключаются его достоинства и недостатки?
4. В чем суть метода нелинейной квазиоптики? В чем заключаются его достоинства и недостатки?
5. В чем суть метода нелинейной геометрической оптики? В чем заключаются его достоинства и недостатки?

2.4. Самовоздействие и взаимодействие плоских электромагнитных волн

При распространении сильных электромагнитных волн диэлектрическая проницаемость начинает зависеть от амплитуды волны. Последняя как бы сама себе формирует условия распространения. В этом состоит суть явления самовоздействия волн, в результате которого изменяются их характеристики (амплитуда, фаза, частота, поляризация, спектральный состав и т. п.). (Подробнее об этом см., например, в [4].)

Рассмотрим вначале эффект амплитудного самовоздействия, вызванный зависимостью мнимой части ε (или коэффициента поглощения α) от A.

2.4.1. Амплитудное самовоздействие волны

Укороченное уравнение для действительной амплитуды волны имеет вид (2.3.13):

$$\frac{dA}{dx} + \alpha(A)A = 0,\ A(0) = A_0. \tag{2.4.1}$$

К нему необходимо добавить закон изменения $\alpha(A)$, зависящий от конкретного механизма нелинейности. Сначала запишем решение (2.4.1) в общем виде. После разделения переменных имеем:

$$\frac{dA}{\alpha(A)A} = -dx \tag{2.4.2}$$

или

$$\frac{\alpha_0}{\alpha(A)}\frac{dA}{A} = -\alpha_0 dx.$$

Отсюда, с учетом граничного условия, получим решение задачи (2.4.1) в неявном виде:

$$\int\limits_{A_o}^{A(x)} \frac{\alpha_0}{\alpha(A)}\frac{dA}{A} = -k_0, \tag{2.4.3}$$

где $k_0 = \alpha_0 x$ – интегральный коэффициент поглощения в линейной среде с коэффициентом поглощения волны α_0.

Далее для определенности положим

$$\alpha(A) = \alpha_0\left(1 + \frac{A^2}{A_\text{х}^2}\right)^{\delta}, \tag{2.4.4}$$

где $A_\text{х}$ – характерная амплитуда поля волны, являющаяся мерой нелинейности. Очевидно, что при $A^2 \ll A_\text{х}^2$ имеем $\alpha \approx \alpha_0$, т. е. нелинейные эффекты несущественны.

Модель (2.4.4) удобна и тем, что она описывает так называемую квадратичную нелинейность, которая часто встречается в различных электродинамических задачах. Кроме того, знак при δ соответствует случаям $\alpha < \alpha_0$ и $\alpha > \alpha_0$ (при $\delta = 0$ имеет место распространение линейной волны с $\alpha = \alpha_0$).

Подстановка (2.4.4) в (2.4.3) дает

$$\int\limits_{A_0}^{A} \frac{dA}{A\left(1 + A^2\big/A_\text{х}^2\right)^{\delta}} = -k_0. \tag{2.4.5}$$

Далее рассмотрим два случая.

Пусть $\alpha < \alpha_0$, т. е. $\delta < 0$. Положим для простоты $\delta = -1$. Тогда (2.4.5) сводится к выражению

$$\int_{A_0}^{A}\left(\frac{1}{A}+\frac{A}{A_{х}^2}\right)dA=-k_0.$$

Выполняя интегрирование, получим

$$\ln\frac{A}{A_0}+\frac{1}{2}\frac{A^2-A_0^2}{A_{х}^2}=-k_0,$$

или же

$$Ae^{A^2/2A_{х}^2}=A_0e^{A_0^2/2A_{х}^2}e^{-k_0}.$$

В глубине среды $k_0 \gg 1$ и $A \to 0$. Тогда

$$A\approx A_0e^{A_0^2/2A_{х}^2}e^{-k_0}. \tag{2.4.6}$$

В линейной теории

$$A_{ё}=A_0e^{-k_0}. \tag{2.4.7}$$

Для количественной характеристики процесса амплитудного самовоздействия введем множитель самовоздействия

$$P_A=\frac{A}{A_0}.$$

Тогда из (2.4.6) и (2.4.7) следует, что

$$P_A=e^{A_0^2/2A_{х}^2},\ k_0\gg 1.$$

Если на границе среды волна была очень сильной ($A_0^2 \gg A_{х}^2$), то $P_A \gg 1$. Хотя в глубине среды ($k_0 \gg 1$) волна заведомо слабая ($A^2 \ll A_{х}^2$), здесь эффект самовоздействия выражен наиболее заметно. Дело в том, что волна как бы «помнит», что на границе и вблизи нее ($k_0 \le 1$) она была сильной.

Таким образом, на границе среды эффект самовоздействия отсутствует ($P_A = 1$), а в глубине среды он максимален. Это связано с интегральной природой эффекта (рис. 2.3).

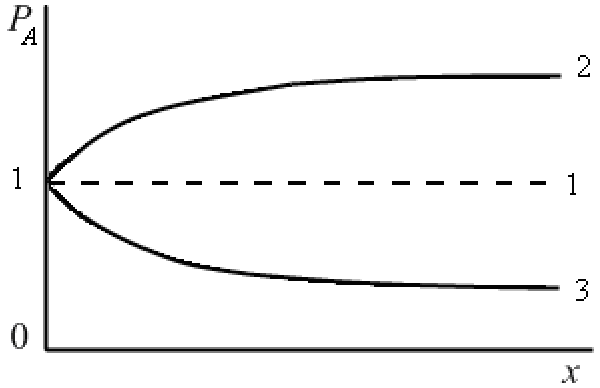


Рис. 2.3. Зависимость множителя самовоздействия от пройденного волной пути:
1 – линейная теория;
2 – эффект просветления среды;
3 – эффект помутнения среды

Случай, когда $A > A_{л}$ или $P_A > 1$, называется *эффектом просветления* среды. Просветление наступает под действием сильной волны, для которой $\alpha < \alpha_0$.

Зависимость амплитуды волны в глубине среды от амплитуды волны на ее границе показана на рис. 2.4.

Будем считать теперь $\alpha > \alpha_0$, т. е. $\delta > 0$. Положим для определенности $\delta = 1$. Тогда из (2.4.5) следует соотношение

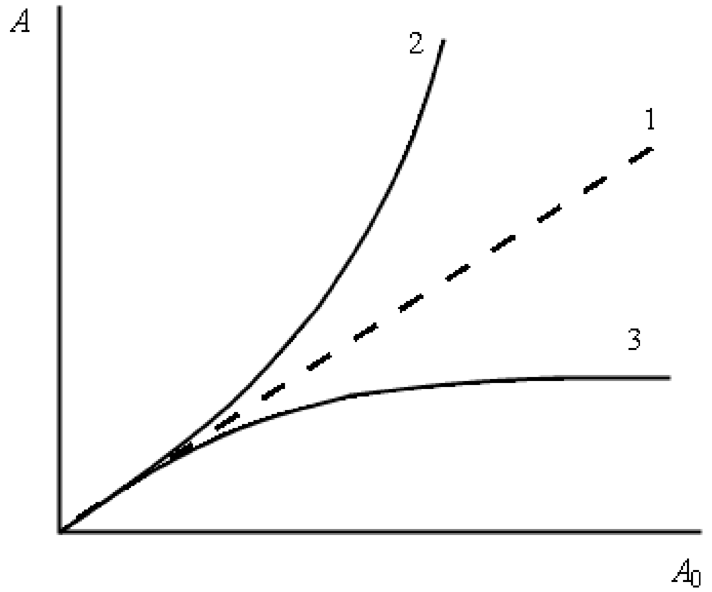


Рис. 2.4. Зависимость амплитуды волны в среде от её значения на границе среды:
1 – линейная теория;
2 – эффект просветления среды;
3 – эффект помутнения среды

$$\int_{A_0}^{A} \frac{dA}{A\left(1 + A^2/A_{х}^2\right)} = -k_0$$

или же

$$\int_{A_0}^{A} \left(\frac{1}{A} - \frac{A}{A_{х}^2\left(1 + A^2/A_{х}^2\right)}\right) dA = -k_0.$$

Выполняя интегрирование и потенцируя, получим

$$\frac{A}{A_0}\left(\frac{1 + A^2/A_{х}^2}{1 + A_0^2/A_{х}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = e^{-k_0}. \qquad (2.4.8)$$

Из (2.4.8) имеем следующее решение:

$$A = \frac{A_0 e^{-K_0}}{\sqrt{1 + \frac{A_0^2}{A_{х}^2}\left(1 - e^{-2K_0}\right)}}.$$

Отсюда

$$P_A = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{A_0^2}{A_{\text{х}}^2}(1 - e^{-2K_0})}}.$$

В глубине среды $k_0 \gg 1$, тогда

$$P_{\text{À}} = \frac{1}{\sqrt{1 + A_0^2 \,/\, A_{\text{х}}^2}}.$$

Отсюда

$$A \approx A_0 \left(1 + A_0^2 \big/ A_{\text{х}}^2\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-k_0}.$$

Важно, что $P_A < 1$. При $A_0^2 \big/ A_{\text{х}}^2 \gg 1$

$$P_{\text{À}} \approx \frac{A_{\text{х}}}{A_0},$$

следовательно, $P_A \ll 1$. В последнем случае

$$A = A_0, \qquad P_A e^{-k_0} \approx A_{\text{х}} e^{-k_0},$$

т. е. $A(x)$ не зависит от A_0. Такой эффект называется *эффектом насыщения поля*. Увеличение амплитуды волны на границе среды не приводит к ее увеличению в глубине среды. Это означает, в частности, что увеличение мощности передатчика радиотехнической системы (например, вещательной радиостанции, космического радара) не приведет к увеличению дальности ее функционирования. Эффект насыщения целесообразно использовать в нелинейных аттенюаторах.

Зависимости $P_A(x)$ и $A(A_0)$ для случая *эффекта помутнения* среды ($P_A < 1$) также приведены на рис. 2.3 и рис. 2.4 соответственно.

Далее рассмотрим решение задачи об амплитудном самовоздействии в общем виде. Полагая $\alpha \,/\, \alpha_0 = f(A)$, из (2.4.3) получим

$$\int\limits_{A_0}^{A} \frac{dA}{f(A)A} = -k_0.$$

Представим подынтегральное выражение в виде

$$\frac{1}{f(A)A} = \frac{1}{A} + \frac{1 - f(A)}{f(A)A}.$$

Тогда, выполняя интегрирование и потенцируя, имеем:

$$A e^{J(A)} = A_0 e^{J(A_0)} e^{-k_0}, \qquad (2.4.9)$$

где

$$J(A) = \int_{A_0}^{A} \frac{1 - f(A)}{f(A)A} dA.$$

В глубине среды, где $k_0 \gg 1$, волна становится слабой, т. е. $A \to 0$. Тогда из (2.4.9) получаем: $A \approx A_0 e^{J(A_0) - J(0)} e^{-k_0}$.

Отсюда следует

$$P_A = \exp\{J(A_0) - J(0)\} = \exp\left\{\int_0^{A_0} \frac{1 - f(A)}{f(A)A} dA\right\}.$$

При $0 < f(A) < 1$ и $f(A) > 1$ имеем соответственно $P_A > 1$ и $P_A < 1$, т. е. эффекты просветления и помутнения среды.

2.4.2. Фазовое самовоздействие волны

В процессе распространения волны от ее амплитуды также зависит действительная часть диэлектрической проницаемости или показатель преломления среды n. Это приводит к фазовому самовоздействию волны. Для его количественной характеристики будем использовать нелинейную добавку к фазе (2.3.14)

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} \int_0^x (n(A) - n_0) dx. \qquad (2.4.10)$$

Подставляя (2.4.2) в (2.4.10), получим

$$\Delta\varphi = -\frac{\omega}{c} \int_{A_0}^{A(x)} \frac{n(A) - n_0}{\alpha(A)} \frac{dA}{A}. \qquad (2.4.11)$$

Видно, что на границе среды $\Delta\varphi = 0$, а по мере проникновения волны в среду $|\Delta\varphi|$ растет (рис. 2.5). В линейной теории $n = n_0$ и $\Delta\varphi = 0$.

Если волна модулирована по амплитуде, то $A = A(t)$. Это приводит к тому, что $\Delta\varphi = \Delta\varphi(t)$. При этом в результате самовоздействия амплитудно-модулированная волна приобретает фазовую модуляцию. Ее можно интерпретировать в терминах нелинейного эффекта Доплера. Действительно,

$$\Delta\omega(t) = -\frac{d\Delta\varphi(t)}{dt}$$

представляет собой нелинейное смещение частоты волны.

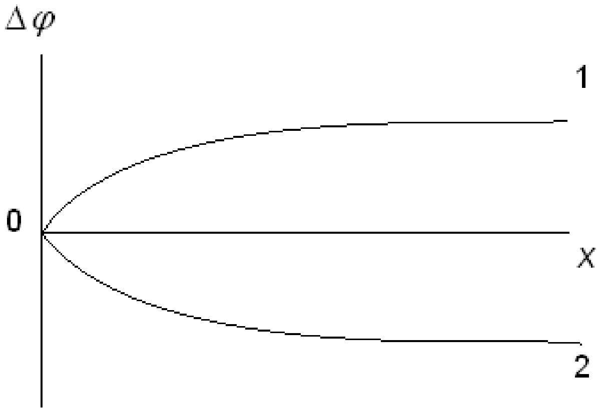


Рис. 2.5. Зависимость эффекта фазового самовоздействия от пройденного волной расстояния:
1 – $n > n_0$*;*
2 – $n < n_0$

2.4.3. Амплитудное взаимодействие волн

Взаимодействие волн возникает в результате того, что волны изменяют параметры среды, и, прежде всего, коэффициент поглощения α и показатель преломления n. Эти изменения оказывают обратное влияние на волны. Так, наряду с самовоздействием возникает взаимодействие волн посредством среды, в которой они распространяются. Возмущения α и n приводят, соответственно, к амплитудному и фазовому взаимодействиям.

Рассмотрим вначале амплитудное взаимодействие волн с амплитудами $A_{1,2}$. Предположим, что обе волны распространяются вдоль оси x. Тогда укороченные уравнения принимают вид:

$$\frac{dA_1}{dx} + \alpha_1(A_1, A_2)A_1 = 0, \qquad A_1(0) = A_{10}, \tag{2.4.12}$$

$$\frac{dA_2}{dx} + \alpha_2(A_1, A_2)A_2 = 0, \qquad A_2(0) = A_{20}, \tag{2.4.13}$$

где $\alpha_{1,2}$ – коэффициенты поглощения волн. Уравнения (2.4.12) и (2.4.13) подобны. Благодаря этому первый интеграл системы находится делением этих уравнений, т. е.

$$\frac{dA_1}{dA_2} = \frac{\alpha_1(A_1, A_2)}{\alpha_2(A_1, A_2)}\frac{A_1}{A_2}. \tag{2.4.14}$$

Если (2.4.14) удается проинтегрировать, решение имеет вид:

$$F(A_1, A_2) = 0.$$

Предположим, что последнее уравнение можно разрешить относительно A_1 или A_2. Пусть, например,

$$A_1 = F_1(A_2). \qquad (2.4.15)$$

Подставляя (2.4.15) в (2.4.13), получим равенство:

$$\frac{dA_2}{dx} + \alpha_2\left(F_1(A_2), A_2\right)A_2 = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$\int\limits_{A_{20}}^{A_2} \frac{dA_2}{\alpha_2\left(F_1(A_2), A_2\right)A_2} = -x. \qquad (2.4.16)$$

Разрешая (2.4.16) относительно A_2, получим

$$A_2 = F_2(x), \qquad (2.4.17)$$

а с учетом (2.4.15)

$$A_1 = F_1(A_2) = F_1\left[F_2(x)\right]. \qquad (2.4.18)$$

Соотношения (2.4.17) и (2.4.18) являются решениями поставленной задачи.

Эффекты совместного действия волны самой на себя и взаимодействия волн можно описать при помощи множителей

$$P_{A1} = A_1 \,/\, A_{1\text{л}},$$

$$P_{A2} = A_2 \,/\, A_{2\text{л}},$$

це $A_{1\text{л},2\text{л}}$ – амплитуды волн в линейной теории.

Рассмотрим частный случай взаимодействия волн, когда волна A_2 слабая, при этом $\alpha_{1,2} = \alpha_{1,2}(A_1)$. Тогда из (2.4.14) имеем:

$$\int\limits_{A_{10}}^{A_1} \frac{\alpha_2(A_1)}{\alpha_1(A_1)}\frac{dA_1}{A_1} = \int\limits_{A_{20}}^{A_2} \frac{dA_2}{A_2}$$

или отсюда

$$A_2 = A_{20}\exp\left\{\int\limits_{A_{10}}^{A_1} \frac{\alpha_2(A_1)}{\alpha_1(A_1)}\frac{dA_1}{A_1}\right\} \equiv f(A_1). \qquad (2.4.19)$$

Решение $A_1(x)$ для $\alpha_1 = \alpha_1(A_1)$ находится из (2.4.12) сразу:

$$\int\limits_{A_{10}}^{A_1} \frac{dA_1}{\alpha_1\left(A_1\right)A_1} = -x.$$

Отсюда

$$A_1 = f_1(x). \qquad (2.4.20)$$

Тогда с учетом (2.4.19)

$$A_2 = f(A_1) = f(f_1(x)) \equiv f_2(x). \qquad (2.4.21)$$

Таким образом, зависимости $A_1 = f_1(x)$ и $A_2 = f_2(x)$ – решения поставленной задачи.

Для слабой волны можно ввести множитель взаимодействия

$$P_{A12} = \frac{A_2}{A_{2л}} = \frac{A_2}{A_{20}e^{-k_{20}}}, \qquad k_{20} = \int_0^x \alpha_{20}dx,$$

где α_{20} и k_{20} – коэффициент поглощения и интегральный коэффициент поглощения волны в линейной теории.

2.4.4. Фазовое взаимодействие волн

Исходная система уравнений для волн, распространяющихся вдоль оси x, имеет вид:

$$\frac{dA_1}{dx} + \alpha_1(A_1, A_2)A_1 = 0, \qquad A_1(0) = A_{10},$$

$$\frac{dA_2}{dx} + \alpha_2(A_1, A_2)A_2 = 0, \qquad A_2(0) = A_{20},$$

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\omega_1}{c}\int_0^x (n_1(A_1, A_2) - n_{10})\,dx,\ \ \Delta\varphi_1(0) = 0, \qquad (2.4.22)$$

$$\Delta\varphi_2 = \frac{\omega_2}{c}\int_0^x (n_2(A_1, A_2) - n_{20})\,dx,\ \ \Delta\varphi_2(0) = 0. \qquad (2.4.23)$$

В данном приближении амплитудные эффекты не зависят от фазовых, т. е. первые два уравнения, совпадающие с (2.4.12) и (2.4.13), решаются независимо от (2.4.22) и (2.4.23). Поскольку $A_1 = f_1(x)$ и $A_2 = f_2(x)$, дальнейшие вычисления $\Delta\varphi_{1,2}(x)$ производятся на основе (2.4.22) и (2.4.23).

Зависимости $P_{A1,2}(x)$ и $\Delta\varphi_{1,2}(x)$ схематически показаны на рис. 2.6 и 2.7.

Отметим, что в зависимости от вида $\alpha_{1,2}$ и $n_{1,2}$ для одной из волн может наблюдаться эффект просветления среды, для второй – помутнения среды, для одной волны $\Delta\varphi > 0$, для другой – $\Delta\varphi < 0$. Разумеется, возможна ситуация, когда для обеих волн эффекты подобны.

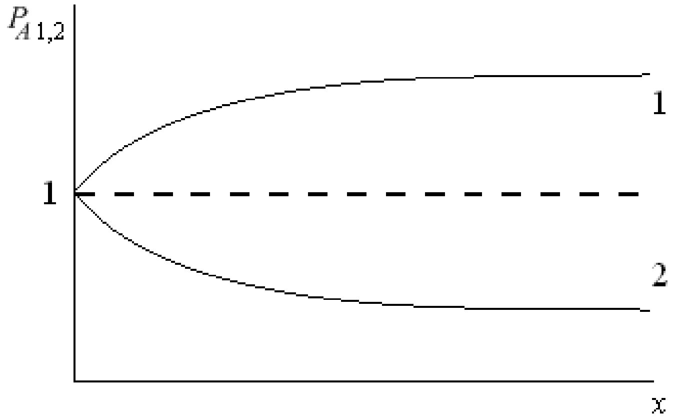


Рис. 2.6. Зависимость множителя взаимодействия волн от пройденного пути:
1 – эффект просветления среды;
2 – эффект помутнения среды (в линейной теории $P_{A1,2} = 1$)

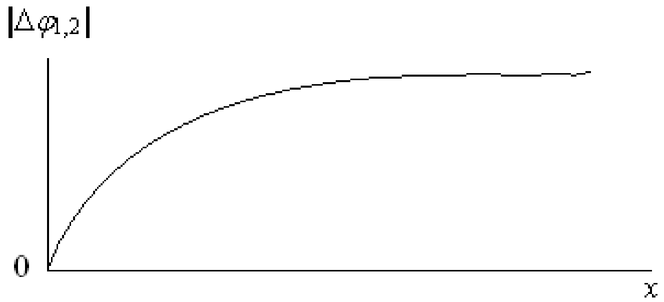


Рис. 2.7. Зависимость эффекта (по модулю) фазового взаимодействия волн от пройденного пути

2.4.5. Нестационарный процесс самовоздействия волны. Динамика фронта просветления (помутнения)

При воздействии мощного электромагнитного излучения поглощение среды может существенно изменяться. Например, при распространении мощного лазерного излучения в атмосфере, вода частично испаряется, влажность и размер капель уменьшаются. Это приводит к ослаблению поглощения света. Наступает просветление облачной структуры.

Эффект просветления может иметь место в плазме, полупроводниках и других средах. При иных соотношениях параметров волны и среды может наступить помутнение среды. Для описания динамики этих эффектов воспользуемся следующей простейшей моделью закона изменения коэффициента поглощения волны во времени [6]:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\gamma \alpha A^2, \qquad \alpha(0,x) = \alpha_0, \tag{2.4.24}$$

где $A^2(t,x) = I(t,x)$ – интенсивность волны, γ – параметр нелинейного взаимодействия волны со средой (при $\gamma > 0$ и $\gamma < 0$ имеют место соответственно эффекты просветления и помутнения). Из укороченного уравнения (2.4.1) следует уравнение для интенсивности волны

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -2\alpha(I)I, \quad I(t,0) = I_0. \tag{2.4.25}$$

Интегрируя (2.4.24), получим

$$\alpha(t,x) = \alpha(0,x)\exp\left(-\gamma\int_0^t I(t,x)dt\right) = \alpha_0 e^{-y}, \tag{2.4.26}$$

где

$$y(t) = \gamma\int_0^t I(t,x)dt, \tag{2.4.27}$$

откуда

$$I = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{2.4.28}$$

Подставим (2.4.28) в (2.4.25) и получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = -2\alpha\frac{\partial y}{\partial t},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -2\alpha\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{2.4.29}$$

С учетом (2.4.26) выражение (2.4.29) приобретает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -2\alpha_0 e^{-y}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{2.4.30}$$

Интегрируя (2.4.30) по времени, получим

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2\alpha_0 e^{-y} + \mathrm{C}_1(x). \tag{2.4.31}$$

Выясним начальные условия для y и для $\frac{\partial y}{\partial x}$. Из (2.4.27) при $t = 0$ имеем:

$$y(0,x) = 0. \tag{2.4.32}$$

Дифференцирование (2.4.27) по x дает

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \gamma\int_0^t \frac{\partial I}{\partial x}dt,$$

откуда следует, что

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{t=0} = 0. \tag{2.4.33}$$

С учетом (2.4.32) и (2.4.33) из (2.4.31) получаем $C_1 = -2\alpha_0$. Тогда (2.4.31) примет вид:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2\alpha_0 \left(e^{-y} - 1 \right).$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$e^{y} = 1 + C_2 e^{-2k_0}. \qquad (2.4.34)$$

При $x = 0$

$$I(t,0) = I_0, \qquad y(t,0) = \gamma \int_0^t I(t,0)dt = \gamma \int_0^t I_0 dt.$$

Введем энергию волны на границе среды

$$W_0 = \int_0^t I_0(t)dt$$

и перепишем выражение для y_0:

$$y_0 = y(t,0) = \gamma W_0. \qquad (2.4.35)$$

Из (2.4.34) с учетом (2.4.35) имеем:

$$C_2 = e^{y_0} - 1 = e^{\gamma W_0} - 1. \qquad (2.4.36)$$

Подставляя (2.4.36) в выражение (2.4.34), из последнего получим

$$e^{y} = 1 + \left(e^{\gamma W_0} - 1 \right) e^{-2k_0}. \qquad (2.4.37)$$

Отсюда после дифференцирования по t имеем:

$$e^{y} \frac{\partial y}{\partial t} = \gamma I_0 e^{\gamma W_0} e^{-2k_0}. \qquad (2.4.38)$$

Тогда из (2.4.28) с учетом (2.4.37) и (2.4.38) следует, что

$$I = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial y}{\partial t} = I_0 \frac{e^{\gamma W_0 - 2k_0}}{1 + \left(e^{\gamma W_0} - 1 \right) e^{-2k_0}},$$

или окончательно

$$I(t,x) = \frac{I_0(t)}{1 + \left(e^{2k_0} - 1 \right) e^{-\gamma W_0}}. \qquad (2.4.39)$$

Подставляя (2.4.37) в (2.4.26), получим

$$\alpha(t,x) = \frac{\alpha_0}{1 + \left(e^{\gamma W_0} - 1 \right) e^{-2k_0}}. \qquad (2.4.40)$$

Проанализируем полученные решения (2.4.39) и (2.4.40). Если волна достаточно слабая на границе среды, то $\gamma W_0 \ll 1$, при этом

$$e^{\gamma W_0} \approx 1,$$
$$I(t,x) \approx I_0(t)e^{-2k_0},$$
$$\alpha(t,x) \approx \alpha_0 .$$

Распространение волны в этом случае, как и должно быть, описывается линейной теорией.

Для сильной волны, т. е. при $\gamma W_0 \gg 1$, не слишком далеко от границы среды ($\gamma W_0 \gg 2k_0$) справедливы следующие соотношения:

$$I(t,x) \approx I_0, \tag{2.4.41}$$
$$\alpha(t,x) \approx \alpha_0 e^{-\gamma W_0} . \tag{2.4.42}$$

Видно, что α значительно меньше α_0, а интенсивность волны практически такая же, как на границе среды. Это и есть эффект просветления среды. Вдали от границы при $2k_0 \gg \gamma W_0 \gg 1$ имеем:

$$I(t,x) \approx I_0 e^{-2k_0} e^{\gamma W_0} = I_{л} e^{\gamma W_0},$$
$$\alpha(t,x) \approx \alpha_0 ,$$

т. е. коэффициент поглощения равен своему значению в линейной теории, а $I \gg I_{л}$, где $I_{л}$ – интенсивность волны в линейной теории. Множитель самовоздействия в глубине среды

$$P_A \approx e^{\frac{1}{2}\gamma W_0} \gg 1.$$

Рассмотрим случай сильной волны ($|\gamma| W_0 \gg 1$) при $\gamma < 0$. Тогда при $|\gamma| W_0 \gg 2k_0$ решения также даются выражениями (2.4.41), (2.4.42), где $\gamma < 0$. При этом $\alpha \gg \alpha_0$, а $I(t,x) \approx I_0$, т. е. эффект помутнения здесь еще не проявляется. Зато в глубине среды ($2k_0 \gg 1$) он проявляется в полной мере:

$$I(t,x) \approx I_0 e^{-2k_0} e^{-|\gamma| W} \ll I_{л}, \tag{2.4.43}$$
$$\alpha(t,x) \approx \alpha_0 \tag{2.4.44}$$

Вернемся к соотношениям (2.4.41), (2.4.42). Поскольку W_0 зависит от времени, то при увеличении t растет W_0, и область, где $\gamma W_0 \gg 2k_0$, сдвигается в сторону больших k_0, т. е. в глубину среды. Это приводит к перемещению фронта просветления в глубину среды (рис. 2.8).

Найдем скорость движения фронта из условия $\gamma W_0 = 2k_0$, после дифференцирования которого по времени приходим к выражению

$$\gamma I_0 = 2\alpha_0 \frac{dx}{dt}.$$

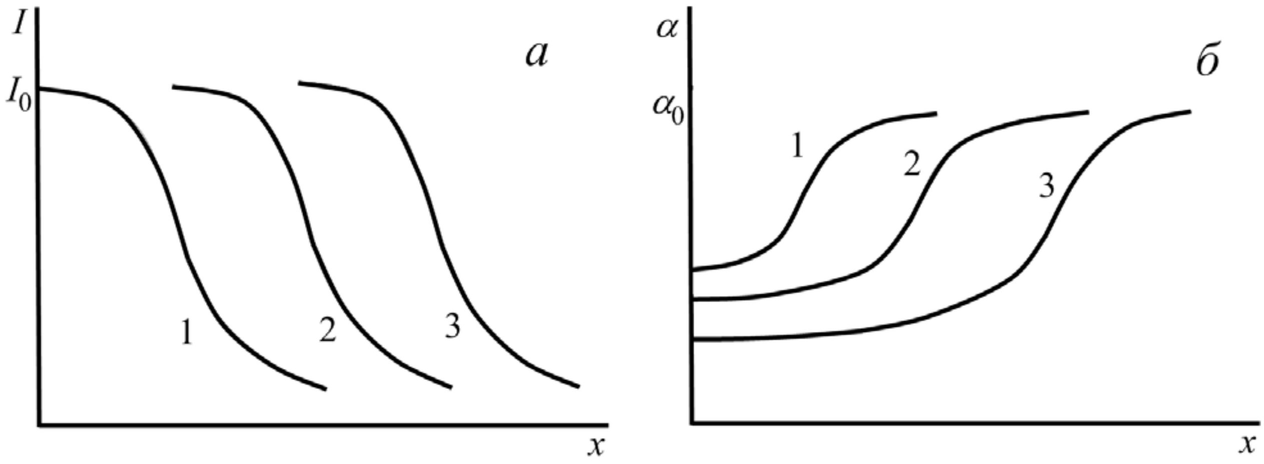


Рис. 2.8. Динамика фронта интенсивности волны (а) и коэффициента поглощения (б): 1 – $t = t_1$*; 2 –* $t = t_2 > t_1$*; 3 –* $t = t_3 > t_2 > t_1$

Отсюда скорость фронта

$$u_{\hat{o}} = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma I_0}{2\alpha_0}. \qquad (2.4.45)$$

Скорость $u_{\hat{o}} \sim I_0 / \alpha_0$. Если $\gamma < 0$, то фронт помутнения движется к границе среды с той же по величине скоростью (2.4.45).

Вопросы для самоконтроля

1. Почему возникает самовоздействие электромагнитных волн?
2. Почему возникает взаимодействие электромагнитных волн?
3. К чему приводит самовоздействие электромагнитных волн?
4. К чему приводит взаимодействие электромагнитных волн?
5. Приведите укороченное уравнение для амплитуды электромагнитного поля. Почему оно так называется?
6. Где сильнее всего проявляется эффект самовоздействия волн? Почему?
7. Где сильнее всего проявляется эффект взаимодействия волн? Почему?
8. В чем суть эффекта просветления среды?
9. В чем суть эффекта помутнения среды?
10. В чем суть эффекта насыщения поля?
11. Приведите исходные уравнения, описывающие фазовое само- воздействие электромагнитных волн.
12. Приведите исходные уравнения, описывающие амплитудное взаимо- действие электромагнитных волн.

13. Приведите исходные уравнения, описывающие фазовое взаимодействие электромагнитных волн.

14. Что такое множитель амплитудного самовоздействия волн? Как он зависит от пройденного волной пути?

15. Что такое множитель амплитудного взаимодействия волн? Как он зависит от пройденного волной пути?

16. Приведите исходные уравнения, описывающие нестационарный процесс самовоздействия электромагнитных волн.

17. Опишите динамику фронта интенсивности электромагнитной волны и коэффициента поглощения в случае просветляющихся сред.

18. Опишите динамику фронта интенсивности электромагнитной волны и коэффициента поглощения в случае помутняющихся сред.

Задачи

1. Решить задачу об амплитудном самовоздействии волны при виде коэффициента поглощения:

$$\text{а) } \alpha = \frac{\alpha_0}{1 + aA}, \text{ б) } \alpha = \alpha_0(1 + aA),$$

где A – амплитуда волны. Исследовать поведение решения в зависимости от величин и знаков a и b. Сделать оценки эффекта при $|a| = A_0^{-1}$, где A_0 – амплитуда волны на границе.

2. Вычислить множитель амплитудного взаимодействия сильной (1) и слабой (2) волн в глубине среды:

$$P_{12} = \frac{A_2}{A_{2\text{л}}} = \frac{A_2}{A_{20}} e^{k_{20}}.$$

Ограничиться распространением обеих волн в одном направлении. Принять коэффициенты поглощения среды:

$$\text{а) } \alpha_{1,2} = \frac{\alpha_{10,20}}{1 + aA_1}, \text{ б) } \alpha_{1,2} = \alpha_{10,20}(1 + aA_1).$$

3. Получить формулу для нелинейной добавки к фазе за счет фазового самовоздействия. Принять, что

$$\text{а) } n(A) = 1 + a_1 A,\ \alpha(A) = \frac{\alpha_0}{1 + a_2 A},$$

б) $n(A) = 1 + a_1 A$, $\alpha(A) = \alpha_0(1 + a_2 A)$.

Оценить величину эффекта при $\left|a_1\right| = A_0^{-1}$, $\left|a_2\right| = A_0^{-1}$, где A_0 – амплитуда волны на границе.

4. Получить формулу для нелинейной добавки к фазе слабой волны (2) за счет взаимодействия ее с сильной волной (1) и проанализировать результат. Обе волны распространяются в одном направлении. Принять следующие выражения для α_1 и n_2:

а) $\alpha_1 = \alpha_{10}(1 + aA_1)$, $n_2 = 1 + bA_1$,

б) $\alpha_1 = \alpha_{10}(1 + aA_1)^{-1}$, $n_2 = 1 + bA_1$.

Для оценок использовать $| a |=| b |= A_{10}^{-1}$.

Указание: ввести глубину затухания сильной волны в линейной теории $L_{10} = \alpha_{10}^{-1}$.

2.5. Нелинейные стационарные волны

Стационарными волнами называют решения уравнений в частных производных с двумя аргументами t и x, зависящие от одной (так называемой *бегущей)* переменной $\xi = x \pm ut$. Эти волны хорошо изучены, так как они описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями [10, 31].

Пусть волновое уравнение имеет вид:

$$\hat{L}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}, \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v(t,x) = 0,$$

где $\hat{L}$ – некоторый оператор, v – скалярное поле. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \pm u \frac{d}{d\xi},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d}{d\xi},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} = \pm u \frac{d^2}{d\xi^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = u^2 \frac{d^2}{d\xi^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{d^2}{d\xi^2},$$

волновое уравнение сводится к следующему:

$$\hat{L}\left(\pm u\frac{d}{d\xi}, \frac{d}{d\xi}, \pm u\frac{d^2}{d\xi^2}, u^2\frac{d^2}{d\xi^2}, \frac{d^2}{d\xi^2}\right)v(\xi) = 0.$$

Это выражение является обыкновенным дифференциальным уравнением для функции $v(\xi)$.

2.5.1. Линейные стационарные волны

Наиболее распространенным линейным волновым уравнением является уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - u^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{2.5.1}$$

или

$$v_{tt} - u^2 v_{xx} = 0. \tag{2.5.2}$$

Поскольку (2.5.1) допускает представление вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)v = 0,$$

из него можно получить следующие волновые уравнения первого порядка

$$v_t - uv_x = 0, \tag{2.5.3}$$

$$v_t + uv_x = 0. \tag{2.5.4}$$

Общие стационарные решения (2.5.3) и (2.5.4) имеют вид:

$$v = F_+(x + ut), \tag{2.5.5}$$

$$v = F_-(x - ut), \tag{2.5.6}$$

где $F_\pm$ – произвольные функции, определяемые из начальных и граничных условий.

Важно, что решения (2.5.5), (2.5.6) уравнений (2.5.3), (2.5.4) могут быть периодическими и апериодическими, в том числе описывающими линейные уединенные волны. Простейшим представителем волны такого типа является одногорбая одинокая волна, напоминающая видеоимпульс.

Стационарные волны обладают тем замечательным свойством, что они в процессе распространения не изменяют своего профиля. В линейной теории это возможно в отсутствие дисперсии и диссипации.

2.5.2. Укручение профиля волны

В пункте 2.2.1 получено точное решение нелинейных уравнений электродинамики. Оно имеет вид:

$$v(t,x) = v(x \pm u(v)t), \tag{2.5.7}$$

где $u(v)$ – скорость волны, зависящая от значения поля в данный момент времени и в данной точке. Нелинейная волна вида (2.5.7) деформируется в процессе распространения из-за влияния нелинейности среды (см. рис. 2.2). Деформацию профиля волны, обусловленную различной скоростью движения его различных участков, называют *укручением профиля волны*. Крутизна профиля волны, постепенно увеличиваясь, достигает своего максимального значения, после чего наступает *опрокидывание фронта волны*.

Получим условие опрокидывания [10]. Пусть волна движется слева направо, тогда

$$v(t,x) = v(x - u(v)t) = v(\xi). \tag{2.5.8}$$

Дифференцируя (2.5.8) по t и x, получим

$$v_t = \frac{dv}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{dv}{d\xi}\left(-u - \frac{du}{dv}\frac{\partial v}{\partial t}t\right) = v'\left(-u - u'v_t t\right),$$

$$v_x = \frac{dv}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dv}{d\xi}\left(1 - \frac{du}{dv}\frac{\partial v}{\partial x}t\right) = v'\left(1 - u'v_x t\right).$$

Отсюда

$$v_t = -\frac{v'u}{1 + v'u't},\ v_x = \frac{v'}{1 + v'ut}. \tag{2.5.9}$$

Рассмотрим (2.5.9) детальнее. Условие $v' \neq 0$ свидетельствует о неоднородности начального профиля, неравенство $u' \neq 0$ предполагает наличие нелинейности. Опрокидывание профиля волны наступает при v_t, $v_x \to \infty$, т. е. при условии

$$1 + v'u't_0 = 0,$$

откуда

$$t_0 = -\frac{1}{v'u'}.$$

Чтобы наступило укручение переднего фронта (см. рис. 2.2), где $v' < 0$, для обеспечения условия $t_0 > 0$ необходимо потребовать $u' > 0$. Последнее неравенство означает, что большим значениям v соответствуют большие значения u, т. е. вершина профиля обгоняет его основание.

2.5.3. Влияние диссипации. Уравнение Бюргерса и его точные решения

Возникновение классических нелинейных эффектов рассмотрим на примере движения несжимаемой жидкости. В отсутствие внешних сил уравнение движения $dv\,/\,dt = 0$ имеет вид:

$$v_t + vv_x = 0\,, \tag{2.5.10}$$

где $v(t,x)$ – скорость движения элемента жидкости. Соотношение (2.5.10) является частным случаем уравнения

$$v_t + u(v)v_x = 0\,, \tag{2.5.11}$$

которое при $u = \mathrm{const}$ переходит в линейное уравнение (2.5.4).

Соотношение (2.5.10), называемое иногда *уравнением Римана*, является простейшим *эталонным*[1] уравнением с квадратичной нелинейностью. Оно, так же, как и более сложные уравнения вида (2.2.11), (2.5.11), описывает укручение профиля волны и его опрокидывание. Последнее наступает при v_t, $v_x \to \infty$. Но при больших градиентах необходимо учитывать процессы переноса и, в частности, вязкость, которая представляет собой пространственную диффузию механического импульса. С учетом вязкости уравнение движения примет вид:

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx}\,, \tag{2.5.12}$$

где $\nu > 0$ – коэффициент вязкости. Соотношение (2.5.12), впервые полученное в 1940 г., называется *уравнением Бюргерса*. Оно также относится к эталонным уравнениям теории нелинейных волн.

Уравнение Бюргерса допускает точные решения. Чтобы убедиться в этом, следует воспользоваться *подстановкой Коула–Хопфа* [10]

$$v = -2\nu\,\frac{w_x}{w}\,.$$

При этом из уравнения (2.5.12) для вспомогательной функции w следует классическое линейное уравнение диффузии (теплопроводности):

$$w_t = \nu w_{xx}\,. \tag{2.5.13}$$

[1] Под эталонными уравнениями понимают уравнения, допускающие точное аналитическое решение. При этом последнее описывает влияние того или иного физического процесса (например, квадратичной нелинейности). Вид решения эталонного уравнения часто «подсказывает» метод приближенного аналитического решения более сложных, чем эталонное, уравнений.

Решение (2.5.13) не представляет труда. Далее нас будут интересовать лишь решения, имеющие вид стационарных волн.

2.5.4. Ударная волна

Ударной волной называется распространяющийся скачок какого-либо параметра волны или среды (плотности, давления и т. п.). В линиях передачи могут формироваться и распространяться ударные электромагнитные волны. При этом компоненты поля претерпевают скачок.

Решение уравнения (2.5.12) ищем в виде стационарной волны [10]:

$$v = v(x - ut). \tag{2.5.14}$$

Подставляя (2.5.14) в (2.5.12), получим

$$-uv' + vv' = \nu v'', \tag{2.5.15}$$

где штрих означает дифференцирование по ξ. В качестве граничных условий выберем следующие:

$$v(-\infty) = v_1, \qquad v(+\infty) = v_2, \qquad v'(\pm\infty) = 0. \tag{2.5.16}$$

Первый интеграл (2.5.15) имеет вид:

$$-uv + v^2/2 = \nu v' + \mathrm{C}_1. \tag{2.5.17}$$

С учетом (2.5.16) из уравнения (2.5.17) получим

$$-uv_1 + v_1^2/2 = \mathrm{C}_1, \tag{2.5.18}$$

$$-uv_2 + v_2^2/2 = \mathrm{C}_1. \tag{2.5.19}$$

Вычитая из (2.5.18) выражение (2.5.19), имеем :

$$-u(v_1 - v_2) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = 0,$$

откуда при $v_1 \neq v_2$ скорость ударной волны

$$u = \frac{v_1 + v_2}{2}. \tag{2.5.20}$$

Тогда из (2.5.18), (2.5.20) следует:

$$\mathrm{C}_1 = -\frac{v_1 + v_2}{2} v_1 + \frac{v_1^2}{2} = -\frac{v_1 v_2}{2}. \tag{2.5.21}$$

С учетом (2.5.21) уравнение (2.5.17) примет вид:

$$-\frac{v_1 + v_2}{2} v + \frac{v^2}{2} = \nu v' - \frac{v_1 v_2}{2}$$

или

$$2\nu v' = v^2 - (v_1 + v_2)v + v_1 v_2. \tag{2.5.22}$$

Для дальнейшего соотношения (2.5.22) удобно записать так:

$$2\nu v' = (v - v_1)(v - v_2). \tag{2.5.23}$$

Замечая, что $v_1 > v > v_2$, (2.5.23) преобразуем к виду

$$2\nu v' = -(v_1 - v)(v - v_2).$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dv}{(v_1 - v)(v - v_2)} = -\frac{d\xi}{2\nu}.$$

Интегрирование этого выражения дает

$$-\ln(v_1 - v) + \ln(v - v_2) = -\frac{v_1 - v_2}{2\nu}\xi + \mathrm{C}_2.$$

Выберем систему отсчета ξ так, чтобы $\mathrm{C}_2 = 0$. Отсюда

$$v(\xi) = \frac{v_1 + v_2 e^{\xi/\xi_0}}{1 + e^{\xi/\xi_0}}, \tag{2.5.24}$$

где

$$v(0) = u, \qquad \xi_0 = \frac{2\nu}{v_1 - v_2}. \tag{2.5.25}$$

Здесь ξ_0 – ширина фронта волны. Выражение (2.5.24) описывает распространение ударной волны. Важно, что при коэффициенте вязкости $\nu \to 0$ ширина фронта $\xi_0 \to 0$, и ударная волна приобретает вид движущейся ступеньки (рис. 2.9).

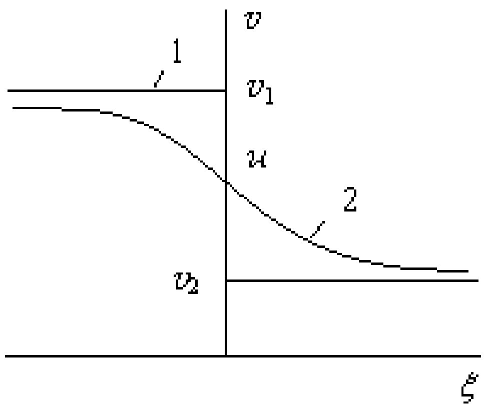


Рис. 2.9. Профиль ударной волны:
1 – при $\xi_0 \to 0$;
2 – при конечном значении ξ_0

Далее на примере уравнения Бюргерса (2.5.12) или его стационарного аналога (2.5.15) рассмотрим *метод оценки* решений дифференциальных уравнений. Идея решения основана на оценке производных. По определению

$$v = \lim_{\Delta\xi \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta \xi}.$$

По аналогии *оценкой производной* назовем величину

$$\left|v'\right| \sim \left|\frac{\Delta v}{\Delta \xi}\right|,$$

где $\Delta\xi$ □ Δv – характерный масштаб изменения аргумента и функции. В данной задаче

$$|\Delta\xi| \sim \xi_0, \qquad \Delta v \sim |v_1 - v_2|,$$

$$\left|v'\right| \sim \frac{v_1 - v_2}{\xi_0}, \qquad \left|v''\right| \sim \frac{v_1 - v_2}{\xi_0^2}.$$

Сравнивая первый и второй члены в (2.5.15), получим

$$\left|uv'\right| \sim \left|vv'\right|$$

или

$$u\frac{v_1 - v_2}{\xi_0} \sim \frac{(v_1 - v_2)^2}{\xi_0}.$$

Отсюда скорость ударной волны

$$u \sim v_1 - v_2.$$

Заметим, что точное значение u (см. (2.5.20)) отличается от полученной оценки. Различие малосущественно, если $v_1 \gg v_2$, при $v_1 \sim v_2$ оно значительно.

Далее сравним нелинейный член vv' и вязкий член $\nu v''$ в уравнении (2.5.15) и получим

$$\frac{(v_1 - v_2)^2}{\xi_0} \sim \nu\frac{v_1 - v_2}{\xi_0^2}.$$

Отсюда

$$\xi_0 \sim \frac{\nu}{v_1 - v_2}.$$

Приведенное значение ξ_0 отличается от точного (см. (2.5.25)) множителем 2.

Таким образом, метод оценки производных, не решая уравнения, позволяет найти основные закономерности в поведении его решений. Естественно, что получаемые оценки справедливы лишь по порядку величины.

Заметим, что отношение нелинейного и вязкого членов есть *число Рейнольдса*:

$$\mathrm{Re} = \frac{(v_1 - v_2)\xi_0}{\nu}.$$

При $\mathrm{Re} \ll 1$ можно пренебречь нелинейностью, а при $\mathrm{Re} \gg 1$ – вязкостью. При $\mathrm{Re} \sim 1$ оба процесса равноправны. Более того, само существование ударной стационарной волны обязано *компенсации эффектов нелинейного* *укручения профиля волны процессами вязкости*, приводящей к «диффузии» профиля волны, или, что то же самое, *процессу диссипации*.

Таким образом, уединенная волна представляет собой нелинейную стационарную бегущую волну с неизменным ступенчатоподобным профилем.

В заключение добавим, что естественными обобщениями уравнений Римана (2.5.10) и Бюргерса (2.5.12) являются следующие уравнения:

$$v_t + u(v)v_x = 0\,, \qquad\qquad v_t + u(v)v_x = \nu v_{xx}\,.$$

Ударные волны играют важную роль в природе, науке и технике. Поэтому далее рассмотрим примеры ударных волн подробнее.

2.5.5. Краткая история исследования ударных волн. Примеры ударных волн

В отличие от синусоидальных волн, ударные волны обладают следующими *особенностями*:

– на фронте волны имеет место скачкообразное изменение параметров состояния и движения среды;

– скорость ударной волны зависит от ее амплитуды;

– скорость ударных волн всегда больше скорости соответствующей линейной волны;

– ударные волны сопровождаются перемещением среды в направлении распространения фронта возмущения;

– ударная волна не периодическая, а распространяется в виде одиночного скачка уплотнения.

Изучение ударных волн начато после их открытия в 1860 г. Риманом. Большой вклад в их исследование внесли физики и математики, такие как Стокс, Риман, Рэнкин, Гюгонио, Вьель, Чепмэн, Жуге и др. [34].

После Второй мировой войны в связи с созданием ядерного оружия, развитием практической космонавтики, сверхзвуковой и гиперзвуковой авиации, а также благодаря появлению компьютеров вновь наблюдается всплеск интереса к исследованию ударных волн.

Замечательные результаты получены в СССР Я. Б. Зельдовичем, Ю. П. Райзером, Л. И. Седовым, а также за рубежом Тейлором, Нейманом, Бете, Теллером и др.

Ударные волны наблюдаются в газах, жидкостях, плазме, а также в иных средах. Существуют не только ударные звуковые, но и *ударные электромагнитные волны*.

Интерес к нелинейным волнам в электродинамике возник в 1950-х гг. XX в. в связи с широким применением ферритов и сегнетоэлектриков. Ударные волны в 1950–1960 гг. исследовались А. В. Гапоновым-Греховым, В. Л. Германом, И. Г. Катаевым и др. Изучены ударные волны в линиях передачи, содержащих ферриты и сегнетоэлектрики, разработаны методы получения импульсов наносекундной длительности.

На возможность возникновения *ударной волны огибающей* лазерного излучения указал в 1963 г. Л. А. Островский. Эти вопросы детально изучены в 1970–1980-е гг.

Таким образом, в настоящее время теория ударных волн достаточно хорошо разработана.

Источниками ударных волн в *естественных* условиях являются молнии, землетрясения, извержения вулканов, падения метеоритов. При этом генерируются ударные волны акустического, сейсмического и, по-видимому, электромагнитного типов.

Совсем другие ударные волны *магнитогидродинамического* (МГД) типа возникают при обтекании солнечным ветром магнитосфер Земли и планет, при солнечных вспышках, взрывах звезд и галактик.

Ударная волна невообразимых масштабов возникла в результате Большого взрыва, давшего жизнь нашей Вселенной.

Ударными волнами являются сбросы воды в водопадах, бегущие по горной речке грязевые потоки – *сели*, снежные лавины, движущаяся по реке волна, пришедшая из моря, – *бор* и др.

Ударные волны генерируются *искусственными* источниками: кнутом пастуха, выстрелами огнестрельного оружия и пушек, лазерными импульсами, взрывами химических и ядерных бомб, самолетами и ракетами, вторгающимися в атмосферы Земли и планет космическими аппаратами. Наряду с акустическими генерируются и МГД ударные волны.

Потоки машин у светофоров также моделируются ударными волнами.

2.5.6. Влияние дисперсии. Уравнение Кортевега–де Вриза и его точные решения

Кроме диссипации, укручению фронта волны *препятствует дисперсия*.

Нелинейное волновое уравнение в случае диспергирующей среды без диссипации имеет вид [10, 32, 34]:

$$v_t + vv_x + \beta v_{xxx} = 0, \quad \beta > 0. \qquad (2.5.26)$$

Уравнение такого вида получено в 1895 г. Кортевегом и де Вризом для описания волн на воде и носит их имя.

Уравнение Кортевега–де Вриза (КдВ) является эталонным. В частности, оно описывает изменение тока I и электрического поля в звене нелинейной линии передачи электромагнитных волн, схема одного звена которой показана на рис. 2.10. В этой схеме нелинейность вызвана нелинейной емкостью C. Можно показать [31], что ток $I(t, x)$ удовлетворяет уравнению вида

$$I_t + I I_x + \beta I_{xxx} = 0\,,$$

где α и β – некоторые коэффициенты.

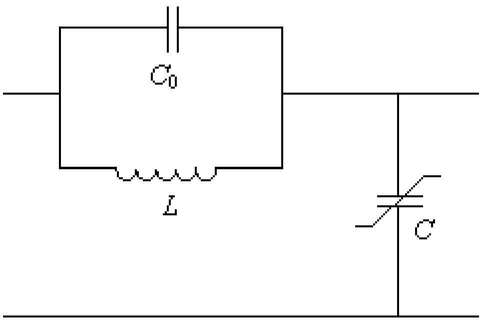


Рис. 2.10. Электрическая схема звена нелинейной линии передачи. Здесь C – нелинейная емкость

Покажем вначале, что уравнение (2.5.26) допускает описание стационарных волн, возникающих в результате *компенсации нелинейного укручения профиля волны его дисперсионным расплыванием*. Пусть u – скорость волны, ξ_0 – ширина ее профиля. Тогда для нелинейного и дисперсионного членов имеем:

$$|vv_x| \sim \frac{u^2}{\xi_0}, \qquad |\beta v_{xxx}| \sim \frac{\beta u}{\xi_0^3}.$$

Сравнивая их, получаем, что стационарная волна существует, если ее скорость и ширина профиля связаны соотношением

$$\xi_0 \sim \sqrt{\frac{\beta}{u}}. \tag{2.5.27}$$

При малых амплитудах волны уравнение (2.5.26) переходит в следующее линейное уравнение:

$$v_t + v_0 v_x + \beta v_{xxx} = 0\,, \tag{2.5.28}$$

где $v_0 = \mathrm{const}$. Оно имеет, в частности, гармонические решения вида

$$v = V_0 \cos(kx - \omega t). \tag{2.5.29}$$

Подставляя (2.5.29) в (2.5.28), получим следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega = k v_0 - \beta k^3\,.$$

По мере увеличения амплитуды волны линеаризованное уравнение (2.5.28) становится неприменимым и возникает необходимость решать уравнение КдВ (2.5.26). При конечных v, как и его линейный аналог (2.5.28), оно также имеет периодическое решение. Однако решение не является гармоническим (рис. 2.11). Амплитуда отрицательной полуволны заметно меньше амплитуды положительной полуволны. При дальнейшем увеличении v волна, оставаясь периодической, имеет только положительные полуволны. Такие периодические, но не гармонические решения уравнения КдВ находятся в виде специальных эллиптических функций, обозначаемых как $\mathrm{Cn}(x)$, а волны поэтому иногда называются *кноидальными* [10].

Важной особенностью уравнения КдВ является то, что оно допускает решения в виде *уединенных* волн. Действительно, если период кноидальных волн устремить к бесконечности, то решение уравнения КдВ будет описывать распространение уединенной волны в виде одинокого холма.

Получим далее непериодическое решение уравнения КдВ. Из (2.5.26) для $v = v(x - ut)$ следует соотношение

$$-uv' + vv' + \beta v''' = 0.$$

Его интегрирование дает

$$-uv + \frac{1}{2}v^2 + \beta v'' = \mathrm{C}_1.$$

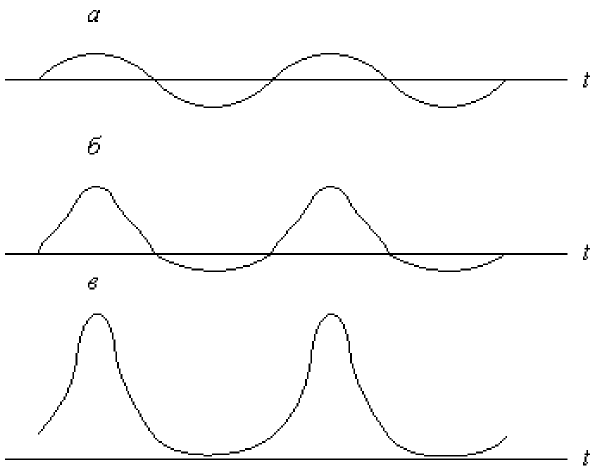


Рис. 2.11. Профиль волны, описываемой уравнением КдВ:
а – $v \to 0$*;*
б – v *– конечное;*
в – v *– достаточно большое*

Будем считать, что для уединенной волны

$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = v''(\pm\infty) = 0.$$

Тогда $\mathrm{C}_1 = 0$ и уравнение

$$-uv + \frac{1}{2}v^2 + \beta v'' = 0 \qquad (2.5.30)$$

можно ещу раз проинтегрировать, если его предварительно умножить на $v' \neq 0$. Интегрирование (2.5.30) дает

$$-\frac{u}{2}v^2 + \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{2}\beta\left(v'\right)^2 = \mathrm{C}_2.$$

Из граничных условий следует, что $\mathrm{C}_2 = 0$, тогда

$$\beta\left(v'\right)^2 = uv^2 - \frac{v^3}{3}.$$

Отсюда

$$\sqrt{\beta}v' = \pm\sqrt{u}v\sqrt{1-\frac{v}{3u}}.$$

Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dv}{v\sqrt{1-\dfrac{v}{3u}}} = \pm\sqrt{\frac{u}{\beta}}d\xi. \tag{2.5.31}$$

Обозначая

$$\frac{v}{3u} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 z}, \tag{2.5.32}$$

из (2.5.31) получим

$$dz = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{\beta}}d\xi$$

или

$$z = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{\beta}}\xi + \mathrm{C}_3. \tag{2.5.33}$$

Поскольку z – вспомогательная переменная, выберем в (2.5.33) знак «плюс» и положим $\mathrm{C}_3 = 0$. Подставляя (2.5.33) в (2.5.32), получим искомое решение:

$$v(\xi) = \frac{v_m}{\mathrm{ch}^2\left(\xi/\xi_0\right)}, \tag{2.5.34}$$

где $v_m = 3u$, $\xi_0 = 2\sqrt{\beta/u}$. Зависимость $v = v(\xi)$ показана на рис. 2.12.

Важно, что ширина уединенной волны $\xi_0 \sim u^{-1/2}$, т. е. чем больше амплитуда волны, тем меньше ширина ее профиля. Решение вида (2.5.34) впервые получено Кортевегом и де Вризом в 1895 г.

Уединенную волну (2.5.34) будем называть *классическим солитоном*. Как оказалось, солитоны в современной науке играют большую роль. Поэтому их следует рассмотреть подробнее.

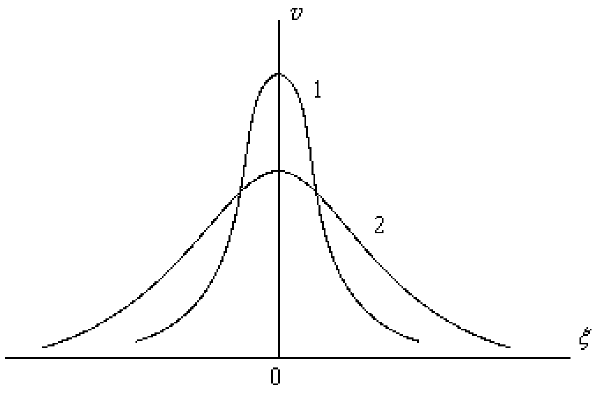


Рис. 2.12. Профиль уединенной волны:

1 – скорость u_1;

2 – скорость u_2 ($u_2 < u_1$)

Вопросы для самоконтроля

1. Что представляет собой нелинейная стационарная волна?
2. Опишите причины и получите условия возникновения эффекта укручения профиля волны.
3. Приведите уравнение Римана и опишите физический смысл его членов.
4. Какие уравнения называются эталонными?
5. Как изменится уравнение Римана при учете диссипации?
6. Приведите уравнение Бюргерса и опишите физический смысл его членов.
7. Что такое ударная волна?
8. Опишите основные свойства ударных волн.
9. Что происходит с ударной волной при увеличении (уменьшении) диссипации в среде?
10. В чем суть оценки производных?
11. Получите выражение для числа Рейнольдса. При каких значениях числа Рейнольдса возникает ударная волна?
12. При каких условиях генерируется ударная волна?
13. Какие Вы знаете обобщения уравнения Римана?
14. Какие Вы знаете обобщения уравнения Бюргерса?
15. Опишите историю исследования ударных волн.
16. Приведите примеры ударных волн.
17. Перечислите естественные источники ударных волн.
18. Перечислите искусственные источники ударных волн.

Задачи

1. Ударная волна описывается уравнением Бюргерса:

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx}.$$

Найти и проанализировать решение, если граничные условия имеют вид:

а) $v(-\infty) = v_0$, $v(+\infty) = 0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$,

б) $v(-\infty) = v_0$, $v(+\infty) = \dfrac{1}{2}v_0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$.

2. Ударная волна описывается следующим уравнением:

$$v_t + 3\alpha v^2 v_x = \nu v_{xx}.$$

Найти и проанализировать решение, если граничные условия имеют вид:

а) $v(-\infty) = 2v_0$, $v(+\infty) = 0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$,

б) $v(-\infty) = v_0$, $v(+\infty) = 0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$.

3. Не решая уравнения Бюргерса

$$v_t + v v_x = \nu v_{xx},$$

оценить скорость и ширину фронта ударной волны, используя метод оценки производных. Граничные условия имеют вид:

а) $v(-\infty) = v_0$, $v(+\infty) = 0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$,

б) $v(-\infty) = v_0$, $v(+\infty) = \dfrac{1}{2}v_0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$.

4. Не решая уравнения для ударных волн с затуханием:

$$v_t + v v_x = \nu v_{xx} + \gamma v^2,\ \gamma > 0,$$

оценить глубину затухания волны $L_{\text{çàò}}$ и сравнить $L_{\text{çàò}}$ с шириной фронта ξ_0, если $v = v(\xi)$, $v(\xi = -\infty) = v_0$, $v(\xi = +\infty) = 0$.

5. Найти и проанализировать решение уравнения Бюргерса

$$v_t + \left(C_0 + v\right) v_x = \nu v_{xx},$$

где $C_0 = \mathrm{const}$ при

а) $v(-\infty) = v_0$, $v(+\infty) = 0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$,

б) $v(-\infty) = v_0$, $v(+\infty) = \dfrac{1}{2}v_0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$.

6. Не решая уравнения

$$v_t + 3\alpha v^2 v_x = \nu v_{xx},$$

оценить скорость и ширину фронта ударной волны. Граничные условия имеют вид:

а) $v(-\infty) = v_0$, $v(+\infty) = 0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$,

б) $v(-\infty) = 2v_0$, $v(+\infty) = 0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$.

2.6. Солитоны

Понятие солитона введено в подразделе 2.5. Рассмотрим свойства солитона более детально [10, 21, 31, 32, 34].

2.6.1. Свойства классического солитона

Солитоном называется *нелинейная уединенная бегущая волна*, сохраняющая профиль и скорость при движении в диспергирующей среде, а также после взаимодействия с подобными ей волнами.

Итак, во-первых, солитон – это нелинейная волна. Во-вторых, солитон – стационарная волна, в-третьих, солитон – волна не периодическая, а локализованная в пространстве и во времени.

Главным свойством солитона является его *неизменность* после взаимодействия с другими солитонами. В результате взаимодействия может наступить только *смещение* в его положении в пространстве по сравнению с тем, которое бы он имел без взаимодействия. Это свойство совершенно неожиданное. Ведь нелинейные волны должны взаимодействовать между собой, изменяя свои характеристики.

Благодаря свойствам неизменности и локализации в пространстве и во времени *солитон имеет признаки частиц*. Именно частицы после упругих столкновений разлетаются, не изменив некоторые свои параметры движения. Чтобы подчеркнуть родство с частицами, термину «солитон» дали окончание, характерное для названий частиц (протон, нейтрон и т. д.). Начальная часть слова (лат. solus – «один») свидетельствует о том, что солитон – волна уединенная.

2.6.2. Краткая история исследования солитонов

Впервые солитоны на воде описал в 1834 г. шотландский инженер и кораблестроитель Дж. С. Рассел. В его наблюдениях высота уединенной волны в канале составила около 0,3 м, ширина – 0,5 м, скорость волны

$u \approx 13$–14 км/ч. Без заметного затухания волна прошла путь порядка 3–4 км. Дж. С. Рассел назвал волну уединенной и уже после первых опытов сформулировал ее основные свойства. Затем о волне Дж. С. Рассела надолго забыли.

В 1895 г. датчане Д. И. Кортевег и Г. де Вриз (или Врис, Фриз) получили уравнение и его решение, называемое теперь уравнением КдВ. В этой работе были заложены основы аналитического исследования солитонов.

Интерес к солитонам резко возрос в 60-е гг. XX в. Этот период по праву называется вторым рождением солитона. Н. Забуский и М. Крускал в 1965 г. в результате численных экспериментов установили факт сохранения формы и скорости уединенных волн вида (2.5.34) при их столкновении. Они же ввели термин «солитон».

В 1967 г. предложен мощный аналитический метод решения нелинейных волновых уравнений – *метод обратной задачи рассеяния*. В развитие аналитических методов большой вклад внесли В. Е. Захаров, Л. Д. Фадеев, В. А. Марченко, А. Б. Шабат и др.

В настоящее время междисциплинарная наука о солитонах – *солитоника* – бурно развивается. Об этом свидетельствует постоянно увеличивающееся количество публикаций о солитонах. Солитоны найдены в физике, радиофизике, астрофизике, биологии и т. д. Теперь под солитоном часто понимают *уединенную структуру*, обладающую некоторым свойством неизменности.

2.6.3. Уравнение Бюргерса–Кортевега–де Вриза и его решение

Уравнения Бюргерса и КдВ являются предельными случаями уравнения *Бюргерса–Кортевега–де Вриза (БКдВ)* вида

$$v_t + vv_x + \beta v_{xxx} = \nu v_{xx}, \qquad \beta,\nu > 0. \tag{2.6.1}$$

Данное уравнение учитывает нелинейность, диссипацию и дисперсию. Для стационарных волн имеем:

$$uv' + vv' + \beta v''' = \nu v''. \tag{2.6.2}$$

Если $v(-\infty) = v_1$, $v(+\infty) = v'(\pm\infty) = v''(\pm\infty) = 0$, то решение уравнения БКдВ имеет вид, представленный на рис. 2.13 [31].

Уравнение БКдВ является комбинацией уравнений Бюргерса и КдВ, поэтому его можно назвать «уравнение-кентавр». Его решение есть «решение-кентавр». Оно состоит из двух частей. Левая часть описывает в основном ударную волну, профиль которой возмущен затухающими колебаниями, а правая часть – в основном солитон.

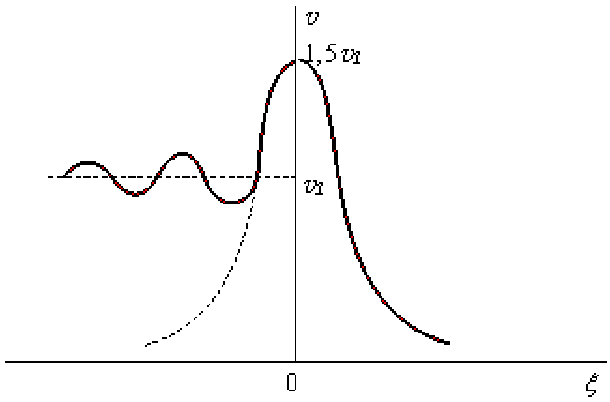


Рис. 2.13. Примерное поведение решения уравнения БКдВ

В целом же решение уравнения (2.6.1) с указанными выше граничными условиями описывает ударную волну в среде с дисперсией.

Основные параметры ударной волны можно получить из (2.6.2) методом оценки производных. Действительно, из сравнения первого и второго членов уравнения получаем оценку скорости движения фронта ударной волны $u \sim v_1$ (точное решение дает $u = v_1 / 2$). Из сравнения первого и третьего членов исходного уравнения имеем ширину солитона (интервал размытия фронта ударной волны) $\xi_0 \sim (\beta / u)^{1/2}$. Наконец, сравнение третьего и четвертого членов дает глубину затухания осцилляций $\xi_1 \sim \beta / \nu$.

В заключение заметим, что, кроме рассмотренного уравнения БКдВ, другим обобщением уравнения КдВ есть соотношение следующего вида:

$$v_t + V(v)v_x + \beta v_{xxx} = 0\,, \qquad \beta > 0\,.$$

В частности, уравнение

$$v_t + \alpha v^2 v_x + \beta v_{xxx} = 0\,, \qquad \alpha, \beta > 0$$

называют *модифицированным уравнением КдВ (*или кратко – *мКдВ)*. Его решение имеет вид:

$$v(\xi) = \frac{v_m}{\operatorname{ch} \xi/\xi_0}\,,$$

где $v_m = \sqrt{6u/\alpha}$, $\xi_0 = \sqrt{\beta/u}$.

2.6.4. Диссипативный солитон

Диссипативный солитон описывается уравнением вида [31]

$$v_t + v_0 v_x = \nu v_{xx} + \alpha v^2 - \beta v\,, \qquad (2.6.3)$$

где

$$v_0, \alpha, \beta > 0, \qquad v_0 = \text{const}.$$

Здесь вместо нелинейного члена vv_x присутствует член αv^2 (источник), член $(-\beta v)$ описывает потери. Для стационарной волны из (2.6.3) имеем:

$$uv' + v_0 v' = \nu v'' + \alpha v^2 - \beta v. \tag{2.6.4}$$

Положим

$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0. \tag{2.6.5}$$

Чтобы волна была стационарной, потребуем равенства нулю коэффициента при v', т. е. $u = v_0$. Тогда уравнение (2.6.4) примет вид:

$$\nu v'' = -\alpha v^2 + \beta v. \tag{2.6.6}$$

Умножая уравнение (2.6.6) на v', после интегрирования получим

$$\frac{\nu}{2}\left(v'\right)^2 = -\frac{\alpha}{3}v^3 + \frac{\beta}{2}v^2 + \mathrm{C}_1. \tag{2.6.7}$$

С учетом (2.6.5) $\mathrm{C}_1 = 0$. Тогда (2.6.7) перепишется в виде

$$\left(v'\right)^2 = \frac{\beta}{\nu}v^2\left(1 - \frac{2\alpha}{3\beta}v\right).$$

Отсюда, извлекая корень квадратный и разделив переменные, приходим к выражению

$$\frac{dv}{v\sqrt{1 - v/v_m}} = \pm\sqrt{\frac{\beta}{\nu}}d\xi,$$

где $v_m = 3\beta/2\alpha$.

Полагая

$$\frac{v}{v_m} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 z},$$

получим

$$-2z = \pm\sqrt{\frac{\beta}{\nu}}\xi + \mathrm{C}_2.$$

Выберем перед радикалом знак «минус» и положим $\mathrm{C}_2 = 0$. Тогда

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\nu}}\xi, \tag{2.6.8}$$

а искомое решение в соответствии с (2.6.8) имеет вид

$$v(\xi) = \frac{v_m}{\mathrm{ch}^2 \xi/\xi_0}, \quad \xi_0 = 2\sqrt{\frac{\nu}{\beta}}. \tag{2.6.9}$$

Итак, уравнение (2.6.3) допускает решение в виде стационарной уединенной волны. Это происходит потому, что *нелинейные эффекты* *компенсируются влиянием диссипации*, обусловленной вязкостью среды. Вид решения (2.6.9) показан на рис. 2.14.

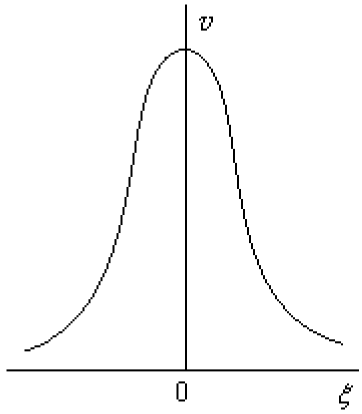


Рис. 2.14. Профиль диссипативного солитона

Из выражения (2.6.9) видно, что диссипативный солитон схож с классическим солитоном (2.5.34), однако есть существенное различие: высота и ширина диссипативного солитона *не связаны* между собой и *не зависят* от его скорости движения.

Почему решения для классического солитона (2.5.34) и диссипативного солитона (2.6.9) подобны? Потому что подобны уравнения (2.5.30) и (2.6.6). Иначе говоря, уравнение (2.6.6) можно реконструировать в уравнение КдВ вида (2.5.26).

Существование диссипативного солитона обусловлено *притоком энергии* извне за счет химических реакций, испарения воды, ветров и т. п. Более правильно диссипативный солитон следовало бы назвать потребляющим солитоном.

2.6.5. Электрические домены (солитоны Ганна)

Эффект Ганна, открытый в 1963 г., относится к твердотельной радиофизике. Его суть заключается в генерации когерентных СВЧ колебаний тока I в кристалле арсенида галлия (GaAs) под действием внешнего поля $E_0 \sim 300$ кВ/м. Частота колебаний $f = v/l$, где $v \sim 10^5$ м/с – скорость дрейфа электронов, $l \sim$ 1–100 мкм – длина образца. При этом $f \sim 10^9$–10^{11} Гц. Колебания связаны с прохождением от катода к аноду области сильного электрического поля (электрических доменов). Каждому колебанию соответствует один домен. Форма колебаний тока и электрического поля показаны на рис. 2.15.

Как видно из рисунка, профиль $E(t)$ очень напоминает профиль нелинейной уединенной волны (солитона). Покажем это. В качестве исходных выберем уравнения для плотности тока $\vec{j}$ и уравнение Максвелла для индукции $\vec{D}$.

Для одномерного движения зарядов вдоль оси x полный ток в цепи равен

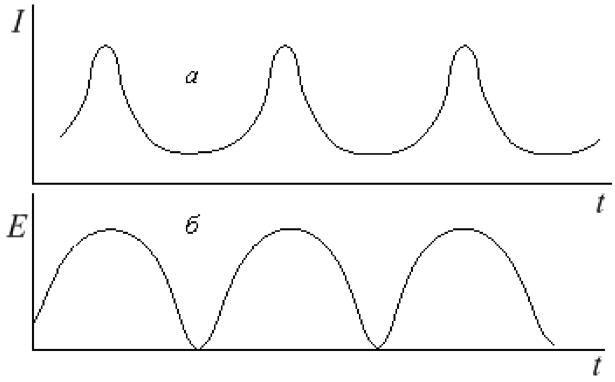


Рис. 2.15. Профиль колебаний тока (а) и электрического поля (б)

$$j_0 = j + \frac{\partial D}{\partial t} = \text{const}, \tag{2.6.10}$$

где

$$j = eNv - eD_e \frac{\partial N}{\partial x}$$

или

$$j = eN\mu(E)E - eD_e \frac{\partial N}{\partial x}\,. \tag{2.6.11}$$

Здесь N – концентрация электронов, $\mu(E)$ – их подвижность, D_e – коэффициент диффузии электронов. В уравнении (2.6.11) учтено, что ток связан как с дрейфом электронов, так и с их переносом за счет градиента N. Из уравнения Максвелла

$$\text{div}\overrightarrow{D} = \rho$$

имеем

$$\varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial x} = e(N - N_0)\,, \tag{2.6.12}$$

где $\varepsilon_a = \varepsilon_0\varepsilon$, ε – абсолютная и относительная диэлектрические проницаемости полупроводникового кристалла (ε_0 – электрическая постоянная), N_0 – концентрация доноров.

Решение системы уравнений (2.6.10), (2.6.11) и (2.6.12) ищем в виде

$$E(t,x) = E(\xi), \quad \xi = x - ut\,.$$

Тогда эти уравнения примут вид:

$$j_0 = j - \varepsilon_a u E', \tag{2.6.13}$$

$$j = eN\mu E - eD_e N', \tag{2.6.14}$$

$$\varepsilon_a E' = e(N - N_0). \tag{2.6.15}$$

(Штрихом, как обычно, обозначается производная по ξ.) Перепишем (2.6.13), (2.6.15) в виде

$$j = j_0 + \varepsilon_a u E', \tag{2.6.16}$$

$$N = N_0 + \frac{\varepsilon_a}{e} E'. \tag{2.6.17}$$

Дифференцируя (2.6.17) по ξ, получим

$$N' = \frac{\varepsilon_a}{e} E''.$$

Отсюда

$$E'' = \frac{e}{\varepsilon_a} N'. \tag{2.6.18}$$

Подстановка (2.6.14), (2.6.16) в (2.6.18) дает:

$$E'' = \frac{1}{\varepsilon_a D_e}\big(eN\mu E - j_0 - \varepsilon_a u E' \big). \tag{2.6.19}$$

Если к тому же исключить N в (2.6.19) при помощи (2.6.17), то придем к уравнению

$$\varepsilon_a D_e E'' = eN_0 \mu E + \varepsilon_a \mu E E' - j_0 - \varepsilon_a u E'$$

или

$$D_e E'' + (u - \mu E) E' = \frac{eN_0}{\varepsilon_a} \mu E - \frac{j_0}{\varepsilon_a}. \tag{2.6.20}$$

Разложим $\mu(E)$ в ряд и ограничимся двумя членами:

$$\mu(E) = \mu(0) + \mu'(0) E. \tag{2.6.21}$$

После подстановки (2.6.21) в (2.6.20) имеем

$$D_e E'' + \big(u - \mu(0)E - \mu'(0)E^2 \big) E' = \frac{eN_0}{\varepsilon_a}\big(\mu(0)E + \mu'(0)E^2 \big) - \frac{j_0}{\varepsilon_a}. \tag{2.6.22}$$

Сравним (2.6.22) с уравнением (2.6.4) для диссипативного солитона:

$$\nu v'' + (u - v_0) v' = \beta v - \alpha v^2.$$

Эти уравнения подобны. Поэтому так же, как для диссипативного солитона, коэффициент при E' должен равняться нулю, т. е.

$$u - \mu(0)E - \mu'(0)E^2 \approx u - \mu(E)E = 0.$$

Это означает, что скорость уединенной волны и дрейфовой скорости порядка μE. С учетом этого (2.6.22) принимает вид:

$$D_e E'' = \tilde{\alpha} E^2 + \tilde{\beta} E + \tilde{\gamma}\,, \qquad (2.6.23)$$

где $\tilde{\alpha} = \dfrac{eN_0}{\varepsilon_a}\mu'(0)$, $\tilde{\beta} = \dfrac{eN_0}{\varepsilon_a}\mu(0)$, $\tilde{\gamma} = -\dfrac{j_0}{\varepsilon_a}$. Уравнения (2.6.23), (2.6.6) аналогичны, поэтому (2.6.23) допускает решение в виде диссипативного солитона. Для его возникновения необходимо, чтобы вольт-амперная характеристика имела участок с отрицательным сопротивлением (рис. 2.16). При $E_1 < E < E_2$ возможна генерация электрических доменов (солитонов Ганна).

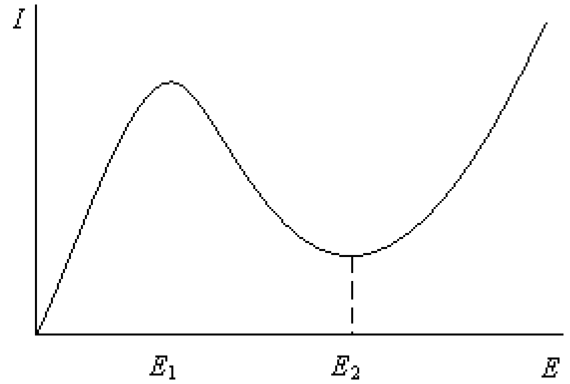


Рис. 2.16. Вольт-амперная характеристика диода Ганна. Генерация солитонов возможна на участке от E_1 до E_2

2.6.6. Нелинейная уединенная волна в радиоэлектронных приборах

Рассмотрим одномерный электронный поток, движущийся вдоль оси *x* с невозмущенной скоростью v_0. Поток считается полностью ионно-скомпенсированным. Поперечное движение отсутствует. Распределением частиц по скоростям и релятивистскими эффектами пренебрегаем.

В качестве исходных уравнений выберем уравнение движения электронов

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}\,, \qquad (2.6.24)$$

уравнение непрерывности для частиц

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0, \quad \vec{j} = N\vec{v} \qquad (2.6.25)$$

и уравнения Максвелла с $\varepsilon = 1$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \qquad (2.6.26)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0\,. \qquad (2.6.27)$$

Из (2.6.27) следует, что поле потенциальное, т. е.

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi = -\varphi_x \vec{i}\,, \tag{2.6.28}$$

где φ – потенциал. Тогда (2.6.26) примет вид:

$$\varphi_{xx} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{e}{\varepsilon_0}(N - N_0), \tag{2.6.29}$$

где $\rho = e(N - N_0)$; N, N_0 – концентрация электронов в возмущённом и невозмущенном пучках.

Из (2.6.24), (2.6.28) имеем:

$$v_t + vv_x = (e/m)\varphi_x. \tag{2.6.30}$$

Соотношение (2.6.25) сводится к следующему:

$$N_t + (Nv)_x = 0. \tag{2.6.31}$$

Уравнения (2.6.29), (2.6.30), (2.6.31) составляют замкнутую систему для неизвестных функций v, N и φ. Ее решение ищем в виде стационарных волн с $\xi = x - ut$, где $u = \mathrm{const}$. Тогда из (2.6.29), (2.6.30), (2.6.31) получаем:

$$\varphi'' = -\frac{eN_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{N}{N_0} - 1\right), \tag{2.6.32}$$

$$-uv' + vv' = (e/m)\varphi', \tag{2.6.33}$$

$$-uN' + (Nv)' = 0. \tag{2.6.34}$$

Положим, что при $\xi = \infty$ $N = N_0$, $v = v_0$, $\varphi = 0$. Тогда первые интегралы уравнений (2.6.33), (2.6.34) имеют вид:

$$-uv + v^2/2 = (e/m)\varphi + \mathrm{C}_1, \tag{2.6.35}$$

$$-uN + (Nv) = \mathrm{C}_2. \tag{2.6.36}$$

Отсюда с учетом граничных условий

$$\mathrm{C}_1 = -uv_0 + \frac{v_0^2}{2}, \tag{2.6.37}$$

$$\mathrm{C}_2 = -uN_0 + N_0 v_0. \tag{2.6.38}$$

Подставляя (2.6.37), (2.6.38) в (2.6.35), (2.6.36), получим

$$\frac{e}{m}\varphi = \frac{v^2 - 2vu - (v_0^2 - 2v_0 u)}{2} = \frac{(v-u)^2 - (v_0 - u)^2}{2}, \tag{2.6.39}$$

$$\frac{N}{N_0} = \frac{v_0 - u}{v - u}. \tag{2.6.40}$$

Разрешив (2.6.39) относительно $(v - u)$ и подставив его в (2.6.40), имеем:

$$\frac{N}{N_0} = (v_0 - u)\left(2\frac{e}{m}\varphi + (v_0 - u)^2\right)^{-1/2}. \tag{2.6.41}$$

С учетом (2.6.41) уравнение (2.6.32) принимает вид:

$$\varphi'' = F(\varphi), \tag{2.6.42}$$

где

$$F(\varphi) = -\frac{eN_0}{\varepsilon_0}\left[(v_0 - u)\left(2\frac{e}{m}\varphi + (v_0 - u)^2\right)^{-1/2} - 1\right].$$

Можно показать, что уравнение (2.6.42) имеет решение как в виде периодических, так и уединенных волн. В частности, при относительно слабой нелинейности функцию $F(\varphi)$ можно разложить в ряд и ограничиться первыми тремя членами:

$$F(\varphi) \approx F(\varphi_0) + F_\varphi{}'(\varphi_0)(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2}F_\varphi{}''(\varphi_0)(\varphi - \varphi_0)^2 \equiv$$
$$\equiv \alpha + \beta\varphi + \gamma\varphi^2. \tag{2.6.43}$$

С учетом (2.6.43) соотношение (2.6.42) приобретает вид:

$$\varphi'' = \alpha + \beta\varphi + \gamma\varphi^2. \tag{2.6.44}$$

Уравнение (2.6.44), как известно, описывает диссипативный солитон (см. выражение (2.6.6)).

2.6.7. Нелинейная уединенная волна в плазме

Процессы в плазме подробнее обсуждаются в главе 4. Здесь рассмотрим лишь распространение нелинейной уединенной волны.

В изотропной плазме с $T_e \gg T_i$ (T_e, T_i – температура электронов и ионов) могут распространяться ионно-звуковые волны. Уравнения движения и непрерывности для ионов аналогичны (2.6.24), (2.6.25). Из них при тех же условиях на границе следует соотношение (2.6.41). Вместо уравнения Пуассона (2.6.29) необходимо записать следующее:

$$\varphi_{xx} = -\frac{e}{\varepsilon_0}(N_e - N_i),$$

где $N_{e,i}$ – концентрация электронов и ионов, причем N_e подчиняется распределению Больцмана

$$N_e = N_0 e^{-e\varphi/kT_e},$$

где k – постоянная Больцмана. При этом вместо (2.6.32) имеем уравнение:

$$\varphi'' = -\frac{eN_0}{\varepsilon_0}\left(e^{-\frac{e\varphi}{kT_e}} - \frac{N_i}{N_0}\right), \tag{2.6.45}$$

где, как и в соотношении (2.6.41),

$$\frac{N_i}{N_0} = (v_0 - u)\left(2\frac{e}{m_i}\varphi + (v_0 - u)^2\right)^{-1/2}. \qquad (2.6.46)$$

Здесь m_i – масса иона. Подставляя (2.6.46) в (2.6.45), получим

$$\varphi'' = F_1(\varphi), \qquad (2.6.47)$$

где

$$F_1(\varphi) = -\frac{eN_0}{\varepsilon_0}\left(e^{-\frac{e\varphi}{kT_e}} - \frac{v_0 - u}{\sqrt{2\frac{e}{m_i}\varphi + (v_0 - u)^2}}\right).$$

Уравнение (2.6.47) аналогично (2.6.42), поэтому и выводы в отношении обоих уравнений подобны.

2.6.8. Уравнение синус-Гордона. Солитон и антисолитон

Продолжаем изучать *«родственников» солитонов*. Некоторые из них описываются уравнением для безразмерной функции v вида [21, 32, 34]:

$$v_{tt} + v_{xx} = f(v),$$

где $f(v)$ – нелинейная функция. Если $f(v) = \sin v$, уравнение носит название *синус-Гордона* (это неудачный перевод с английского, по-русски следовало бы писать «уравнение Гордона синусоидального типа») и имеет вид:

$$v_{tt} + v_{xx} = \sin v. \qquad (2.6.48)$$

Уравнения такого типа возникают, например, в физике твердого тела и полупроводниковой электронике. Периодичность правой части соотношения (2.6.48) обусловлена периодичностью кристаллической решетки.

Так как метод решения уравнения (2.6.48) одинаков для знаков $\pm$, в дальнейшем рассмотрим уравнение

$$v_{tt} + v_{xx} = \sin v. \qquad (2.6.49)$$

Решение ищем в виде $v = v(x - ut)$, тогда из (2.6.49) следует

$$u^2v'' + v'' = \sin v, \qquad v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0. \qquad (2.6.50)$$

Умножая уравнение на $v' \neq 0$ и интегрируя, получим

$$\frac{1 + u^2}{2}(v')^2 = -\cos v + \mathrm{C}_1. \qquad (2.6.51)$$

С учетом граничных условий $\mathrm{C}_1 = 1$. Тогда (2.6.51) примет вид:

$$\frac{1 + u^2}{2}(v')^2 = 1 - \cos v$$

или

$$v' = \pm \frac{2}{\sqrt{1+u^2}} \sin\frac{v}{2}.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dv}{\sin\dfrac{v}{2}} = \pm 2ad\xi,$$

где $a = (1+u^2)^{-1/2}$. После интегрирования имеем

$$2\ln\mathrm{tg}\left(\frac{1}{4}v\right) = \pm 2a\xi + \mathrm{C}_2.$$

Выбором системы отсчета ξ положим $\mathrm{C}_2 = 0$. Тогда решение задачи примет вид:

$$v_{\pm} = 4\mathrm{arctg}\, e^{\pm a\xi}, \tag{2.6.52}$$

где знаки $\pm$ соответствуют знакам при a. Зависимости $v_{\pm}(\xi)$ показаны на рис. 2.17.

Из (2.6.52) следует, что решение является периодической функцией с периодом 2π, это обусловлено периодичностью нелинейной силы $f(v) = \sin v$. Кроме того, каждому периоду соответствуют два решения $v_{+}(\xi)$, $v_{-}(\xi)$, которые названы, соответственно, *солитоном* и *антисолитоном*, иногда их называют *кинком*[1] и *антикинком*, а также в теории эффекта Джозефсона – *флуксоном* и *антифлуксоном* (от англ. flux – поток).

Добавим, что на солитон больше похожа функция ${v_{\pm}}'(\xi)$, чем $v_{\pm}(\xi)$. Покажем это.

Вычисляя ${v_{\pm}}'(\xi)$, имеем

$$v'_{\pm} = \pm 4a\frac{e^{\pm a\xi}}{1+\left(e^{\pm a\xi}\right)^2} = \pm\frac{4a}{e^{\pm a\xi}+e^{\mp a\xi}} = \pm\frac{2a}{\mathrm{ch}\, a\xi}. \tag{2.6.53}$$

Зависимость ${v_{\pm}}'(\xi)$ представляет собой одногорбую уединенную волну (см. рис. 2.17).

[1] Англійською kink – петля

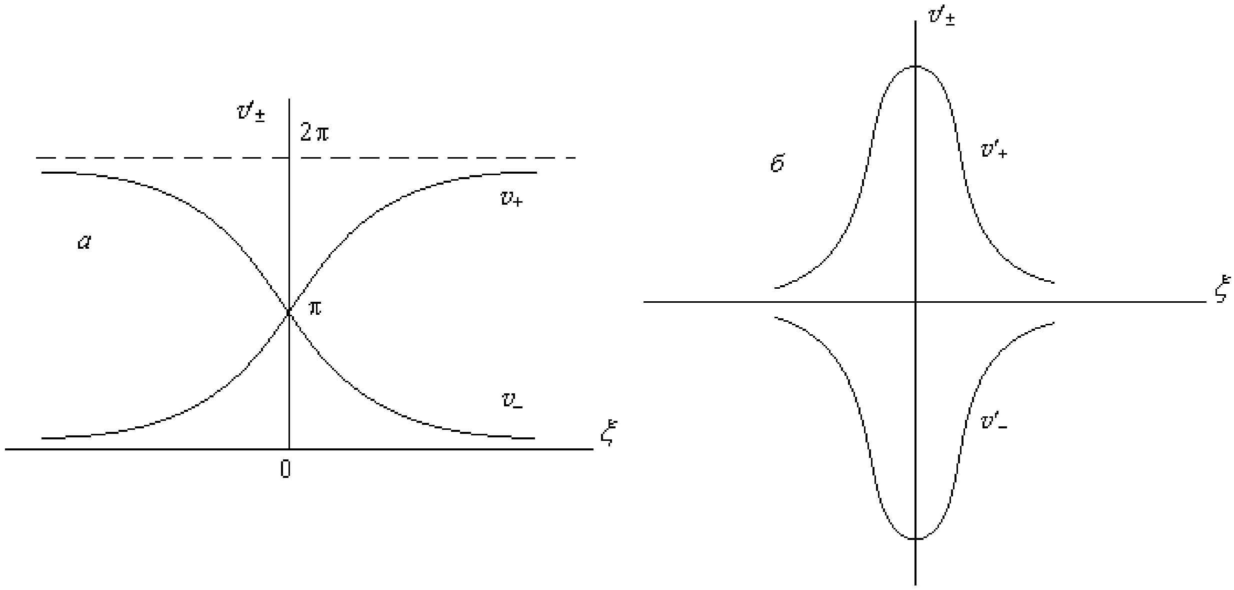


Рис. 2.17. Профиль уединенной волны: а – $v_{\pm}(\xi)$; *б –* $v_{\pm}{}'(\xi)$

2.6.9. Нелинейное уравнение Шредингера. Солитон огибающей

В задачах нелинейной радиофизики часто приходится встречаться с уравнением, получившим название *нелинейного уравнения Шрёдингера* (НуШ). Оно имеет вид:

$$iv_t + v_{xx} + \beta v|v|^2 = 0\,, \qquad \beta > 0\,, \tag{2.6.54}$$

где i – мнимая единица.

Уравнение (2.6.54) отличается от рассмотренных выше тем, что искомая функция (обычно это электромагнитное поле волны) – *комплексная*. Поэтому его решение ищется в виде

$$v(t,x) = w(x - u_1 t)e^{i\varphi(x - u_2 t)}, \tag{2.6.55}$$

где w и φ – огибающая и фаза электромагнитного сигнала. Заметим, что огибающая и фаза распространяются с разными скоростями u_1 и u_2.

Подставляя (2.6.55) в (2.6.54) и приравнивая отдельно действительные и мнимые части, получим систему уравнений для w и φ:

$$u_2 w\varphi' + w'' - w\big(\varphi'\big)^2 + \beta w^3 = 0\,, \tag{2.6.56}$$

$$-u_1 w' + 2w'\varphi' + w\varphi'' = 0\,. \tag{2.6.57}$$

Умножив (2.6.57) на $2w \neq 0$, получим уравнение

$$\big(w^2\big(2\varphi' - u_1\big)\big)' = 0\,, \tag{2.6.58}$$

из которого следует, что

$$w^2\left(2\varphi' - u_1\right) = \mathrm{C}_1 .$$

Ввиду *произвола* в выборе w и φ (см. (2.6.55)) положим $\mathrm{C}_1 = 0$. Тогда при $w \neq 0$ имеем:

$$2\varphi' - u_1 = 0. \tag{2.6.59}$$

Отсюда

$$\varphi = \frac{1}{2}u_1\xi_\varphi + \mathrm{C}_2 ,$$

где $\xi_\varphi = x - u_2 t$. По той же причине $\mathrm{C}_2 = 0$,

$$\varphi = \frac{1}{2}u_1\xi_\varphi . \tag{2.6.60}$$

Подставляя φ' из (2.6.59) в (2.6.56), получим

$$\frac{1}{2}u_1 u_2 w + w'' - w\left(\frac{u_1}{2}\right)^2 + \beta w^3 = 0 .$$

Тогда

$$w'' = w\frac{(u_1 - 2u_2)u_1}{4} - \beta w^3. \tag{2.6.61}$$

Дополним (2.6.61) граничными условиями

$$w(\pm\infty) = w'(\pm\infty) = 0 . \tag{2.6.62}$$

Умножение (2.6.61) на $w' \neq 0$ с последующим интегрированием дает

$$\frac{1}{2}(w')^2 = \frac{(u_1 - 2u_2)u_1}{8}w^2 - \frac{\beta}{4}w^4 + \mathrm{C}_3 , \tag{2.6.63}$$

где в силу (2.6.62) $\mathrm{C}_3 = 0$. Обозначая

$$b^2 = (u_1 - 2u_2)\, u_1 > 0 ,$$

перепишем (2.6.63) в виде

$$w' = \pm\frac{b}{2}w\sqrt{1 - \frac{2\beta}{b^2}w^2} .$$

После этого, разделяя переменные, получим

$$\frac{dw}{w\sqrt{1 - \dfrac{2\beta}{b^2}w^2}} = \pm\frac{b}{2}d\xi_w , \tag{2.6.64}$$

где $\xi_w = x - u_1 t$. Вводя

$$\frac{2\beta}{b^2}w^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 z}, \tag{2.6.65}$$

из (2.6.64) получим

$$dz = \mp \frac{b}{2} d\xi_w,$$

откуда

$$z = \mp \frac{b}{2} \xi_w + \mathrm{C}_4 . \qquad (2.6.66)$$

Ограничимся знаком «плюс» и положим $\mathrm{C}_4 = 0$. Тогда из (2.6.65), (2.6.66) имеем:

$$w = \frac{b}{\sqrt{2\beta}\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{b}{2}\xi_w\right)} . \qquad (2.6.67)$$

С учетом (2.6.60), (2.6.67) искомое решение НуШ примет вид:

$$v(t,x) = \frac{v_m}{\mathrm{ch}\left(\dfrac{b}{2}(x-u_1 t)\right)} e^{i\frac{u_1}{2}(x-u_2 t)}, \qquad (2.6.68)$$

где $v_m = b\big/\sqrt{2\beta}$. Вид решения (2.6.68) показан на рис. 2.18.

Как видно из рис. 2.18, солитоном является огибающая процесса. Он так и называется – *солитон огибающей*. Заметим, что последний встречается не только в радиофизике. Например, солитон огибающей наблюдается на воде. Так, знаменитый *девятый вал* во время шторма на море (вспомним картину И. К. Айвазовского «Девятый вал») представляет собой наибольший по счету девятый горб, справа и слева от него расположены по восемь горбов с постепенно убывающей высотой. Огибающей этих волн служит солитон. Заметим,

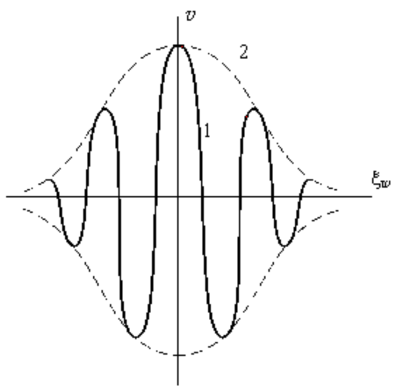


Рис. 2.18. Решение НуШ:
1 – само решение;
2 – огибающая

что обсуждаемый солитон отличается от классического (сравните выражения (2.5.34), (2.6.68)).

2.6.10. Многомерный солитон

Из многомерных солитонов лучше всего изучен *двумерный солитон*. Он описывается уравнением Кадомцева–Петвиашвили (КП), которое получено в 1970 г. [31]:

$$\left(v_t + vv_x + \beta v_{xxx}\right)_x = \alpha v_{yy}, \qquad \alpha, \beta = \text{const}. \qquad (2.6.69)$$

При $\alpha = 0$ уравнение КП переходит в уравнение КдВ. Соотношение (2.6.69) описывает, например, *вихри* в атмосферах планет (*циклон*, *юпитерианское Большое Красное Пятно, плазменные вихри* и др.)

Примером четырехмерного солитона является *инстантон*, с помощью которого осуществляется трансформация элементарных частиц.

2.6.11. Примеры солитонов

«Родственниками» солитонов являются многие *локализованные образования* или *нелинейные структуры* в природе. Приведем ряд примеров.

В астрофизике и космологии к солитоноподобным объектам относятся *спиральные галактические структуры* и *черные дыры*.

Спиральные галактические структуры (*спиральные рукава*) представляют собой спиралеподобные волны плотности, распространяющиеся по веществу галактики и сохраняющие практически неизменной свою форму. Считается, что такие волны генерируются вращающимся баром (от англ. bar – полоска, брусок) или в результате развития неустойчивости.

Черной дырой, как известно, называют астрофизический объект, в котором поле тяготения настолько сильно, что вторая космическая скорость такого объекта превышает скорость света *c*. Поскольку в природе ничто не может двигаться со скоростью, большей *c*, то черную дыру не может покинуть ни вещество, ни излучение. Из-за своей неизменности черная дыра также относится к солитонам.

Примером солитона в Солнечной системе является крупномасштабный вихрь в атмосфере Юпитера – *Большое Красное Пятно*. Это, вероятно, самый большой циклон в нашей системе, его размер – 40 тыс. км × 13 тыс. км (радиус планеты – примерно 71 тыс. км).

Предсказывается существование солитонов при конвекции горячих *сгустков плазмы* из недр Солнца.

На Земле солитоны наблюдаются в разных средах – в литосфере (твердой оболочке Земли), в атмосфере, в океане, в ионосфере и магнитосфере. В земной коре и океане солитоны генерируются при землетрясениях, причем солитоны в океане называют *цунами* (по-японски – большая волна). Обычно высота цунами у берега не превышает 50 м, в очаге землетрясения – не более 10 м. Наибольшая зарегистрированная высота всплеска воды составила 524 м. Гигантский водный солитон возник 10.07.1958 г. В результате схода лавины породы объемом около $3 \cdot 10^8$ м^3 со склонов горы Фейруэзер с высоты 900 м в бухту Литуя (Аляска, США). Энергия всплеска при этом составила величину $\sim 4 \cdot 10^{14}$ Дж, что эквивалентно взрыву 100-килотонной ядерной бомбы.

Зарегистрированная рекордная дальность распространения цунами – примерно 120 тыс. км. Это случилось при падении отколовшейся части острова Кракатау в результате взрыва одноименного вулкана в 1883 г. Солитон при этом трижды обошел земной шар.

Типичный представитель атмосферного солитона – это *циклон*. Его диаметр достигает $\sim$ 1000 км. Солитоны в атмосфере, ионосфере и магнитосфере генерируются при значительных энерговыделениях: землетрясениях, извержениях вулканов, мощных взрывах, полетах крупных ракет, вспышках на Солнце.

Немало примеров возникновения солитонов в микромире. Так, в твердотельной электронике наблюдаются *солитоны Ганна* (см. пункт 2.6.5). В квантовой радиофизике солитоны имеют место в так называемом *явлении самонаведенной прозрачности*. При этом энергия, переданная двухуровневой резонансной среде передней частью мощного лазерного импульса длительностью $\sim$ 10–100 пс, отбирается его задней частью. При соблюдении определенных условий форма импульсов на выходе и входе квантовой системы не отличается, что и позволяет говорить о солитоне. Интересно, что скорость распространения такого солитона в несколько сот раз меньше, чем скорость света. Данный эффект был обнаружен и изучен в середине 1960-х гг.

Уже давно сформировалась идея о том, что элементарные частицы – это солитоноподобные объекты или *солитоны квантовых полей*. В частности, солитонами, по-видимому, являются *монополь Дирака* (гипотетический элементарный магнит с одним полюсом, предсказанный П. Дираком в начале 1930-х гг.), так называемый *флуксон* (квант магнитного потока в эффекте Джозефсона). Величина флуксона и распределение в нем магнитного поля не изменяются при перемещении в длинном джозефсоновском контакте.

В биофизике свойства солитона присущи *нервным импульсам*, которые имеют электрическую природу. Для человека их амплитуда ~ 50 мВ, скорость

~ 100 м/с. Важно, что по нервным волокнам распространяется не электрический ток, а фронт электрохимической реакции, которая и порождает бегущий импульс напряжения. В этом случае укручение фронта волны обусловлено нелинейной зависимостью проницаемости мембраны от амплитуды электрического импульса. Нелинейность уравновешивается диффузией, что и приводит к возникновению солитоноподобного импульса диссипативного типа (см. пункт 2.6.4).

Очень богата на солитоны радиофизика и, в частности, плазменная радиофизика. Сюда относятся уже упомянутые домены Ганна, явление самонаведенной прозрачности, солитоны в линиях передачи, уединенные волны в потоках заряженных частиц радиоэлектронных приборов (см. пункт 2.6.6), солитоны в плазменных устройствах (см. пункт 2.6.7) и др.

Солитоны получены при решении некоторых уравнений математической экономики.

Таким образом, солитон – это не экзотическое образование, как считалось ранее. Солитон – это *фундаментальное понятие* в нелинейном мире и в физике в частности. Оно имеет не меньшее значение, чем понятие линейного осциллятора в линейном мире (физике).

2.6.12. Возможные применения солитонов

Природа подарила нам достаточно большое разнообразие солитонов. Немного сложнее обстоит дело с их применением. Уникальное свойство солитона – его неизменность в процессе распространения – очень заманчиво использовать для связи. Пока не ясно, как это можно реализовать в радиодиапазоне, используя атмосферные каналы связи. Что касается нелинейных линий передачи с дисперсией, то здесь принципиальных трудностей, похоже, нет. Не очень понятно только, как компенсировать неизбежные потери.

Весьма перспективным является использование солитонов в оптических волокнах. Еще в середине 1980-х гг. в лаборатории Белла (США) А. Хасегава выполнил подробные численные расчеты и показал возможность практического использования оптических солитонов для передачи больших объемов информации.

В 1988 г. его выводы были подтверждены сотрудниками той же лаборатории Л. Молленауэром и К. Смитом. Им удалось впервые реализовать солитонный телеграф, приняв сигнал, который прошел путь около 4 тыс. км. В лучших световодах потери составляют ~ 5 % на километр. Поэтому для компенсации потерь необходимо осуществлять подпитку солитонов (вспомним диссипативный солитон, см. пункт 2.6.4). Для этого можно использовать лазерную подсветку. Механизм усиления солитонов связан с эффектом комбинационного рассеяния Рамана, открытым в 1928 г.

Оптические солитоны – почти идеальные импульсы для связи. Из-за отсутствия уширения их можно располагать близко друг к другу. Предположим, что длительность каждого солитона ~ 1 пс. Один бит информации кодируется наличием или отсутствием солитона. При этом пропускная способность системы связи не более 10^3 Гбит/с. Ее можно увеличить, например, в 5 раз применением мультиплексирования по частоте (т. е. многоканальности). Количество каналов ограничено частотной зависимостью волоконных усилителей. Удвоение числа каналов возможно за счет использования различных поляризаций. Таким образом, пропускная способность возрастает до 10^4 Гбит/с.

При использовании фемтосекундных солитонов пропускная способность может увеличиться еще на 2–3 порядка. Для сравнения укажем, что традиционные оптоволоконные телекоммуникационные системы обеспечивают пропускную способность около 1 Гбит/с.

Возможно также применение солитонов в ЭВМ с оптическими элементами памяти и оптическими линиями связи.

Вопросы для самоконтроля

1. Как изменится уравнение Римана при учете дисперсии?

2. Приведите уравнение Кортевега–де Вриза (КдВ) и опишите физический смысл его членов.

3. Приведите примеры уравнений КдВ, встречающихся в радиофизике.

4. Опишите, как происходит эволюция профиля гармонической волны при увеличении ее амплитуды в диспергирующей среде.

5. Что такое классический солитон?

6. Что происходит с классическим солитоном при увеличении его амплитуды?

7. Опишите историю исследования солитонов.

8. Приведите уравнение Бюргерса–Кортевега–де Вриза (БКдВ) и опишите физический смысл его членов.

9. Чем отличается диссипативный солитон от классического? При каких условиях распространяется диссипативный солитон?

10. При каких условиях генерируются солитоны Ганна?

11. Является ли солитон Ганна диссипативным солитоном?

12. Опишите нелинейную уединенную волну в радиоэлектронных приборах.

13. Опишите нелинейную уединенную волну в плазме.

14. Что такое солитон и антисолитон?

15. Что такое кинк и антикинк?

16. Приведите нелинейное уравнение Шредингера и опишите физический смысл его членов.

17. Что такое солитон огибающей?

18. Приведите нелинейное уравнение Кадомцева–Петвиашвили и опишите физический смысл его членов.

19. Приведите примеры солитонов.

20. Чем отличается солитон от классического солитона?

21. Опишите возможные применения солитонов.

Задачи

1. Найти солитоноподобное решение модифицированного уравнения КдВ (мКдВ):

$$v_t + 6\alpha v^2 v_x + \beta v_{xxx} = 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,$$
$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = v''(\pm\infty) = 0.$$

2. Оценить амплитуду v_0 и ширину ξ_0 солитона, не решая уравнения мКдВ:

$$v_t + 6\alpha v^2 v_x + \beta v_{xxx} = 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,$$
$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = v''(\pm\infty) = 0.$$

Сравнить с точным решением.

3. Найти солитоноподобное решение уравнения Гордона типа

$$v_{tt} + v_{xx} = 2v^3,$$
$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0.$$

4. Найти и проанализировать решение нелинейного уравнения Шредингера вида

$$iv_t + v_{xx} + \beta v\left|v\right|^2 = 0,$$
$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0,\ \beta > 0,$$
$$\xi_1 = x + u_1 t,\ \xi_2 = x + u_2 t.$$

5. Показать, что уравнение

$$v_t + v_0 v_x = D v_{xx} + 2\alpha v^3 - \beta v\,,$$
$$v_0, \alpha, \beta, D = \mathrm{const}\,,\ \alpha > 0\,,\ \beta > 0\,,\ D > 0\,.$$

с граничными условиями $v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0$ описывает диссипативный солитон.

6. Найти солитоноподобное решение уравнения с нулевыми условиями на функцию $v(\xi)$ и ее первые две производные при $\xi = \pm\infty$:

а) $v_t + v v_x + \beta v_{xxt} = 0\,,\ \beta < 0\,,$

б) $v_t + v v_x + \beta v_{xtt} = 0\,,\ \beta > 0\,,$

в) $v_t + v v_x + \beta v_{ttt} = 0\,,\ \beta < 0\,,$

г) $v_x + v v_t + \beta v_{ttt} = 0\,,\ \beta > 0\,.$

7. Найти солитоноподобное решение уравнения с нулевыми условиями на функцию $v(\xi)$ и ее первые три производные при $\xi = \pm\infty$:

а) $-v_{tt} + \dfrac{\alpha}{2}\left(v^2\right)_{xx} + \beta v_{xxxx} = 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,$

б) $v_{tt} + \dfrac{\alpha}{2}\left(v^2\right)_{xt} + \beta v_{xxxx} = 0,\ \alpha > 0,\ \beta < 0,$

в) $v_{xx} + \dfrac{\alpha}{2}\left(v^2\right)_{tt} + \beta v_{xxxx} = 0,\ \alpha < 0,\ \beta < 0,$

г) $v_{xt} + \dfrac{\alpha}{2}\left(v^2\right)_{tt} + \beta v_{xxxx} = 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

8. Найти солитоноподобное решение уравнения с нулевыми условиями на функцию $v(\xi)$ и ее первые три производные при $\xi = \pm\infty$:

а) $v_{tt} + \dfrac{\alpha}{2}\left(v^2\right)_{xx} + \beta v_{xxxt} = 0,\ \alpha < 0,\ \beta > 0,$

б) $v_{tt} + \dfrac{\alpha}{2}\left(v^2\right)_{xx} + \beta v_{xxtt} = 0,\ \alpha < 0,\ \beta < 0,$

в) $v_{tt} + \dfrac{\alpha}{2}\left(v^2\right)_{xx} + \beta v_{xttt} = 0,\ \alpha < 0,\ \beta > 0,$

г) $v_{tt} + \dfrac{\alpha}{2}\left(v^2\right)_{xx} + \beta v_{tttt} = 0,\ \alpha < 0,\ \beta < 0.$

9. Выяснить, имеет ли солитоноподобное решение уравнение КдВ с нулевыми условиями на функцию $v(\xi)$ и ее первые две производные при $\xi = \pm\infty$, если $\beta > 0$:

а) $v_t + vv_x + \beta v_{xxx} = 0$,

б) $v_t + \alpha v^2 v_x + \beta v_{xxx} = 0$.

Сравнить полученное решение с решением для $\beta > 0$.

10. Показать, что уравнения

а) $v_t + \alpha v_x + vv_x + \beta v_{xxx} = 0$, $\beta = 0$,

б) $v_t + \alpha v_t + vv_x + \beta v_{xxx} = 0$, $\beta = 0$

сводятся к уравнению КдВ. Найти их решения. Какие условия налагаются на α?

2.7. Самовоздействие пучков электромагнитных волн

Особенностью самовоздействия пучков волн является их сжатие (фокусировка) или расширение (дефокусировка) в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны.

Самовоздействие пучков электромагнитных волн описывается уравнениями (2.3.19) и (2.3.20). Рассмотрим детальнее первое из них:

$$2\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\nabla_\perp \psi\right)^2 = \frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{\varepsilon_{\text{л}}} + \frac{\Delta_\perp A}{k^2 A}. \qquad (2.7.1)$$

Удобно ввести в рассмотрение угол отклонения лучей от оси пучка. Он равен

$$\theta = |\nabla_\perp \psi|.$$

Тогда (2.7.1) примет вид:

$$2\frac{\partial \psi}{\partial x} + \theta^2 = \frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{\varepsilon_{\text{л}}} + \frac{\Delta_\perp A}{k^2 A}. \qquad (2.7.2)$$

2.7.1. Оценка величины эффекта

Решение уравнений эйконала и переноса (2.3.19) и (2.3.20) – задача весьма сложная и громоздкая (см., например, [6]). Поэтому ниже ограничимся *оценкой решения*, используя, как и в пункте 2.5.4, оценку производной. Для этого заметим, что в уравнении (2.7.2) член

$$\frac{\Delta_\perp A}{k^2 A}$$

описывает дифракцию пучка. Она, как известно, приводит к его уширению. Полагая, что на оси пучка амплитуда волны равна $A(0)$, а радиус пучка r_0, имеем:

$$|\nabla_\perp A| \sim \frac{A(0)}{r_0}, \quad |\Delta_\perp A| = \left|\nabla_\perp^2 A\right| \sim \frac{A(0)}{r_0^2}.$$

При этом дифракционный член имеет порядок

$$\left|\frac{\Delta_\perp A}{k^2 A}\right| \sim \frac{1}{(kr_0)^2} \sim \left(\frac{\lambda}{r_0}\right)^2, \tag{2.7.3}$$

где λ – длина волны излучения.

Член $\varepsilon_{\text{нл}} / \varepsilon_{\text{л}}$ описывает нелинейную рефракцию, т. е. искривление лучей в нелинейной среде. Рефракция может приводить как к уширению пучка (при $\varepsilon_{\text{нл}} < 0$), так и к его фокусировке (при $\varepsilon_{\text{нл}} > 0$). Для оценки угла дифракционного уширения потребуем, чтобы величина θ^2 была порядка дифракционного члена (2.7.3). Тогда

$$\theta_{\text{д}} \sim \frac{1}{kr_0}. \tag{2.7.4}$$

Для оценки угла рефракции потребуем, чтобы $\theta_{\text{р}}^2 \sim \dfrac{\varepsilon_{\text{нл}}}{\varepsilon_{\text{л}}}$.

Отсюда

$$\theta_{\text{р}} \sim \left|\frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{\varepsilon_{\text{л}}}\right|^{1/2}. \tag{2.7.5}$$

2.7.2. Критическая интенсивность пучка

Поскольку нелинейная рефракция может приводить к фокусировке пучка, то особый интерес представляет ситуация, когда *дифракционное уширение пучка точно скомпенсировано рефракционным сжатием*, т. е. $\theta_{\text{д}} = \left|\theta_{\text{р}}\right|$. При этом, как следует из (2.7.4), (2.7.5),

$$\frac{1}{kr_0} \sim \left|\frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{\varepsilon_{\text{л}}}\right|^{1/2}. \tag{2.7.6}$$

Например, для квадратичной нелинейности

$$\varepsilon_{\text{нл}} = \gamma \frac{A^2}{A_{\text{х}}^2}, \tag{2.7.7}$$

где $A_{\text{х}}$ – характерная амплитуда поля, γ – коэффициент (сжатие пучка имеет место при $\gamma > 0$). Тогда условие (2.7.6) сводится к следующему:

$$A_{\text{кр}}^2 \sim A_{\text{х}}^2 \frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{k^2 r_0^2}.$$

Здесь $A_{\text{кр}}^2$ – критическая интенсивность поля волны, при которой $\theta_{\text{д}} = \left|\theta_{\text{р}}\right|$, а значит, наступает *эффект самоканалирования*. Пучок при этом не имеет расходимости, т. е. не изменяет своей ширины в процессе распространения. Такой эффект имел бы большое практическое значение. Вся трудность состоит в соблюдении условий *точной компенсации* указанных выше искажений пучка. Ниже рассмотрим эффект самоканалирования подробнее.

2.7.3. Эффект самоканалирования

Для двумерного пучка уравнение (2.3.17) имеет вид:

$$2ik\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{\text{нл}}\left(\left|A\right|\right)A, \tag{2.7.8}$$

где $A(x, y)$ – комплексная амплитуда. Решение (2.7.8) ищем в виде [6]

$$A(x, y) = A_{\text{в}}(y)e^{-i\varGamma x}, \tag{2.7.9}$$

где $A_{\text{в}}(y)$ – действительная амплитуда поля в волноводе, $\varGamma$ – постоянная распространения. Подстановка (2.7.9) в (2.7.8) дает

$$2k\varGamma A_{\text{в}} = A_{\text{в}}'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{\text{нл}}(A_{\text{в}})A_{\text{в}}, \tag{2.7.10}$$

где $A_{\text{в}}'' = d^2 A_{\text{в}} \big/ dy^2$. Полагая

$$\varepsilon_{\text{нл}} = \gamma \frac{A_{\text{в}}^2}{A_{\text{х}}^2},$$

из (2.7.10) получим

$$2k\varGamma A_{\text{в}} = A_{\text{в}}'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \gamma \frac{A_{\text{в}}^3}{A_{\text{х}}^2}$$

или

$$A_{\text{в}}'' = bA_{\text{в}} - aA_{\text{в}}^3, \tag{2.7.11}$$

где $a = \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2 \dfrac{\gamma}{A_{\text{х}}^2}$, $b = 2k\Gamma$. Граничные условия для уравнения (2.7.11) имеют вид:

$$A_{\text{в}}\left(\pm\infty\right) = A_{\text{в}}'\left(\pm\infty\right) = 0. \qquad (2.7.12)$$

Умножая (2.7.11) на $A_{\text{В}}' \neq 0$ и интегрируя, получим

$$\left(A_{\text{в}}'\right)^2 = bA_{\text{в}}^2 - \frac{a}{2}A_{\text{в}}^4 + C_1,$$

где в силу граничных условий (2.7.12) $C_1 = 0$. Тогда

$$A_{\text{в}}' = \pm\sqrt{b}A_{\text{в}}\sqrt{1 - \frac{a}{2b}A_{\text{в}}^2}, \qquad (2.7.13)$$

где $1 - \dfrac{a}{2b}A_{\text{в}}^2 \geq 0$. Разделяя переменные в (2.7.13) и интегрируя, получим

$$A_{\text{в}}(y) = \frac{A_{\text{в}m}}{\operatorname{ch} y/y_0}, \qquad (2.7.14)$$

где $A_{\text{в}m} = (2b / a)^{1/2}$, $y_0 = b^{-1/2}$.

Полученное решение (2.7.14) напоминает солитон огибающей (2.6.67). Разумеется, в данном случае речь идет не о солитоне как о стационарной волне, а о распределении поля волны в поперечном направлении по отношению к направлению распространения. Необходимо ответить на вопрос: почему математические выражения оказались сходными?

Вернемся к уравнению (2.7.11) и продифференцируем его по y, после чего получим

$$A_{\text{в}}''' = bA_{\text{в}}' - 3aA_{\text{в}}^2A_{\text{в}}'$$

или

$$-bA_{\text{в}}' + 3aA_{\text{в}}^2A_{\text{в}}' + A_{\text{в}}''' = 0.$$

Если ввести $\tilde{\xi} = \tilde{x} - b\tilde{t}$, то последнее соотношение может быть реконструировано к следующему виду:

$$A_{\text{в}t} + 3aA_{\text{в}}^2A_{\text{в}x} + A_{\text{в}xxx} = 0.$$

Такой вид имеет модифицированное уравнение КдВ, которое описывает, в частности, солитон огибающей (см. пункты 2.6.3, 2.6.9).

Вопросы для самоконтроля

1. Как возникает самовоздействие пучков электромагнитных волн?
2. В чем особенность взаимодействия пучков электромагнитных волн?
3. Что такое нелинейная рефракция?
4. При каких условиях возникает эффект самоканалирования?

2.8. Когерентное взаимодействие волн. Неустойчивости

Под действием мощной волны, называемой *волной накачки*, при определенных условиях может возникнуть *раскачка* других волн с иными параметрами, например, с иной частотой. Такие волны всегда существуют, хотя их амплитуда крайне незначительна и определяется *уровнем шумов*. Так в нелинейных средах происходит генерация 2-й, 3-й и более высоких гармоник, а также комбинационных частот.

2.8.1. Двухволновое взаимодействие

Рассмотрим среду без потерь. Пусть волна накачки с амплитудой A_0 возбуждает волну с амплитудой A_1. Система укороченных уравнений (интересуемся развитием процесса во времени)[1] имеет вид:

$$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_1, \qquad A_1(0) = A_{10}\,, \tag{2.8.1}$$

$$\frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1 A_0, \qquad A_0(0) = A_{00}\,, \tag{2.8.2}$$

где γ_0, γ_1 – коэффициенты взаимодействия. Так как волна накачки отдает свою энергию, то $\dfrac{dA_0}{dt} < 0$ и $\gamma_0 < 0$. При этом $\dfrac{dA_1}{dt} > 0$ и $\gamma_1 > 0$.

2.8.1.1. Несамосогласованная постановка задачи

Будем считать, что $A_0(t) \gg A_1(t)$. При этом уменьшением энергии волны накачки можно пренебречь и считать, что $dA_0 \,/\, dt \approx 0$ в уравнении (2.8.2) и $A_0(t) \approx A_{00}$ в уравнении (2.8.1). Тогда из (2.8.1) следует:

---

[1] Взаимодействие волн может происходить как в пространстве, так и во времени. Поскольку время распространения фронта волны и пройденное ею расстояние связаны между собой, то можно ограничиться рассмотрением взаимодействия во времени.

$$\frac{dA_1}{dt} \approx \gamma_1 A_{00} A_1 .$$

Отсюда

$$A_1(t) = A_{10} e^{\gamma_1 A_{00} t},$$

т. е. амплитуда возбуждаемой волны нарастает во времени по экспоненциальному закону с постоянной времени $\tau_H = (\gamma_1 A_{00})^{-1}$. Такие процессы связаны с неустойчивостями.

Неустойчивостью будем называть колебательный или волновой процесс, сопровождаемый быстрым (*часто экспоненциальным*) *ростом амплитуды*.

Величина $\lambda_0 = \tau_H^{-1} = \gamma_1 A_{00}$ называется *инкрементом неустойчивости*. Важно, что $\lambda_0 \sim A_{00}$.

Неустойчивость возникает в результате когерентного взаимодействия волн. С радиотехнической точки зрения неустойчивость – результат действия *положительной обратной связи.*

2.8.1.2. Самосогласованная постановка задачи

Учтем уменьшение амплитуды волны накачки. При этом система уравнений (2.8.1), (2.8.2) решается совместно. Учитывая подобие этих уравнений, разделим (2.8.1) на (2.8.2) и найдем первый интеграл системы уравнений:

$$\frac{dA_1}{dA_0} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}.$$

Отсюда имеем *соотношения Мэнли–Роу*, которые представляют собой разновидность закона сохранения энергии:

$$\frac{A_1 - A_{10}}{\gamma_1} = \frac{A_0 - A_{00}}{\gamma_0}.$$

Тогда

$$A_0 = A_{00} + \frac{\gamma_0}{\gamma_1}(A_1 - A_{10}). \tag{2.8.3}$$

Подставляя (2.8.3) в (2.8.1), получим

$$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_1 \left(A_{00} + \frac{\gamma_0}{\gamma_1}(A_1 - A_{10}) \right)$$

или

$$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_0 A_1 \left(A_1 - A_{10} + \frac{\gamma_1}{\gamma_0} A_{00} \right). \tag{2.8.4}$$

Пусть при $\dfrac{dA_1}{dt} = 0$ амплитуда $A_1 = A_{1\infty}$. Тогда из (2.8.4) имеем:

$$A_{1\infty} = A_{10} - \frac{\gamma_1}{\gamma_0} A_{00}. \qquad (2.8.5)$$

Важно, что $A_{1\infty} \geq A_1(t) \geq A_{10}$. Перепишем (2.8.4) в виде

$$\frac{dA_1}{dt} = -\gamma_0 A_1 \left(A_{1\infty} - A_1 \right).$$

Отсюда

$$\frac{dA_1}{A_1(A_{1\infty} - A_1)} = -\gamma_0 dt.$$

Интегрирование данного выражения и последующее потенцирование дает

$$\frac{A_1}{A_{10}} \frac{A_{1\infty} - A_{10}}{A_{1\infty} - A_1} = e^{-\gamma_0 A_{1\infty} t}. \qquad (2.8.6)$$

При $t = 0$ значение $A_1(0) = A_{10}$. Разрешая (2.8.6) относительно A_1, получим

$$\begin{aligned} A_1(t) &= A_{10} \frac{A_{1\infty} e^{-\gamma_0 A_{1\infty} t}}{A_{1\infty} + A_{10}\left(e^{-\gamma_0 A_{1\infty} t} - 1\right)}, \\ A_0(t) &= A_{00} \frac{A_{1\infty}}{A_{1\infty} + A_{10}\left(e^{-\gamma_0 A_{1\infty} t} - 1\right)}. \end{aligned} \qquad (2.8.7)$$

Поскольку $\gamma_0 < 0$, из (2.8.5) имеем:

$$-\gamma_0 A_{1\infty} \approx \gamma_1 A_{00} = \lambda > 0.$$

Тогда (2.8.7) примет вид:

$$\begin{aligned} A_1(t) &\approx A_{10} \frac{A_{1\infty} e^{\lambda t}}{A_{1\infty} + A_{10}\left(e^{\lambda t} - 1\right)}, \\ A_0(t) &\approx A_{00} \frac{A_{1\infty}}{A_{1\infty} + A_{10}\left(e^{\lambda t} - 1\right)}. \end{aligned} \qquad (2.8.8)$$

Данное соотношение описывает *развитие неустойчивости* во времени. При малых временах (*линейная стадия неустойчивости*) $\lambda t < 1$, а

$$A_1(t) \approx A_{10} e^{\lambda t},$$

т. е. амплитуда $A_1(t)$ нарастает экспоненциально с ростом времени. Если же $\lambda t \gg 1$ (*нелинейная стадия неустойчивости*), то $A_1(t) \approx A_{1\infty}$ (рис. 2.19). На нелинейной стадии происходит насыщение уровня неустойчивости, что связано с конечным значением энергии волны накачки.

2.8.2. Учет затухания при двухволновом взаимодействии

В этом случае уравнения (2.8.1) и (2.8.2) преобразуются к следующему виду:

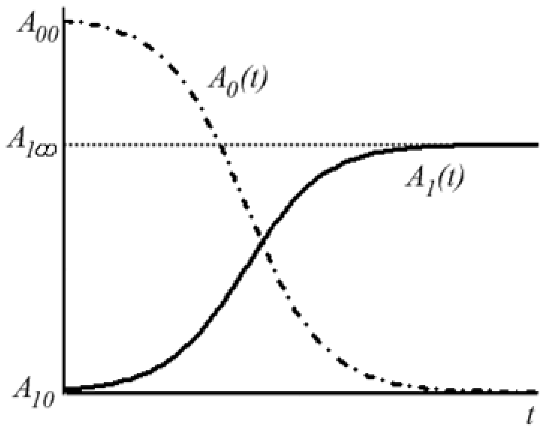


Рис. 2.19. Зависимость амплитуд (а) и (б) волны от времени в самосогласованной постановке задачи

$$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_1 - \nu_1 A_1, \qquad (2.8.9)$$

$$\frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1 A_0 - \nu_0 A_0, \qquad (2.8.10)$$

где ν_1, ν_0 – неотрицательные коэффициенты, описывающие потери в системе. Поскольку $\gamma_1 > 0$, то уравнение (2.8.9) имеет стационарное решение. Для его нахождения положим $d\,/\,dt = 0$. При этом

$$\gamma_1 A_0 A_1 - \nu_1 A_1 = 0.$$

Поскольку $A_1 \neq 0$,

$$\gamma_1 A_0 - \nu_1 = 0.$$

Отсюда

$$A_0 = \frac{\nu_1}{\gamma_1} \equiv A_0^{(0)},$$

где $A_0^{(0)}$– *пороговое значение амплитуды* волны накачки (кратко – *порог*). Выясним смысл величины $A_0^{(0)}$. Для этого вновь вернемся к несамосогласованной постановке задачи. Пусть в уравнении (2.8.9) $A_0(t) \approx A_{00}$. Тогда

$$\frac{dA_1}{dt} = (\,\gamma_1 A_0 - \nu_1\,)\,A_1, \qquad A_1(0) = A_{10},$$

откуда

$$A_1(t) = A_{10} e^{(\gamma_1 A_{00} - \nu_1)t}.$$

Если $\nu_1 = 0$, то

$$A_1(t) = A_{10} e^{\gamma_1 A_{00} t}.$$

Таким образом, наличие потерь приводит к уменьшению инкремента неустойчивости на величину ν_1. Теперь неустойчивость возникает, если

$$\gamma_1 A_{00} - \nu_1 > 0$$

или же при $A_{00} > A_0^{(0)}$. Следовательно, в системе с затуханием неустойчивость носит *пороговый характер*. В остальном же качественная картина неустойчивости не изменяется (рис. 2.20).

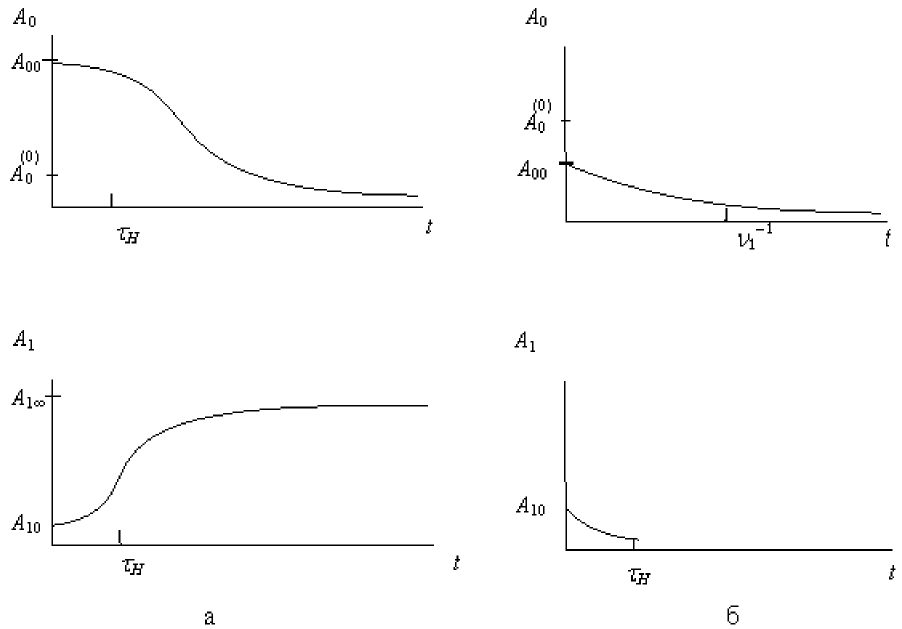


Рис. 2.20. Развитие неустойчивости: а – при $A_{00} > A_0^{(0)}$; б – затухание процесса при $A_{00} < A_0^{(0)}$

2.8.3. Трехволновое взаимодействие (несамосогласованная постановка задачи)

Трехволновое взаимодействие возникает, например, при распаде волны с частотой ω_0 и волновым вектором $\vec{k}_0$ (волны накачки) на две волны с частотами $\omega_{1,2}$ и волновыми векторами $\vec{k}_{1,2}$. При этом должны соблюдаться законы сохранения энергии и импульса квантов электромагнитного поля:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \qquad \vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2. \tag{2.8.11}$$

Неустойчивость, для которой выполняются условия распада (2.8.11), именуют *распадной*. В общем случае неустойчивости, которые возникают в результате когерентного нелинейного взаимодействия волн, называются *параметрическими*.

В несамосогласованной постановке задачи $A_0 = \mathrm{const}$, а уравнения для $A_{1,2}$ имеют вид:

$$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2, \qquad A_1(0) = A_{10}, \tag{2.8.12}$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1, \qquad A_2(0) = A_{20}, \tag{2.8.13}$$

где $\gamma_{1,2}$ – коэффициенты взаимодействия. Интеграл системы (2.8.12), (2.8.13) имеет вид:

$$\frac{A_1^2 - A_{10}^2}{\gamma_1} = \frac{A_2^2 - A_{20}^2}{\gamma_2}.$$

Изучим развитие процесса во времени. Для этого (2.8.12) продифференцируем по времени и получим

$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} = \gamma_1 A_0 \frac{dA_2}{dt}. \tag{2.8.14}$$

Подстановка (2.8.13) в (2.8.14) дает

$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} = \gamma_1 \gamma_2 A_0^2 A_1. \tag{2.8.15}$$

Для $A_1 \sim e^{\lambda t}$ имеем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 = \gamma_1 \gamma_2 A_0^2,$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} A_0.$$

Решение (2.8.15) имеет вид:

$$A_1(t) = \mathrm{C}_1 e^{\lambda_1 t} + \mathrm{C}_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{2.8.16}$$

где $\mathrm{C}_{1,2}$ – постоянные интегрирования. Тогда из (2.8.12) с учетом (2.8.16) получаем

$$A_2(t) = \frac{1}{\gamma_1 A_0} \frac{dA_1}{dt} = \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} \left(\mathrm{C}_1 e^{\lambda_1 t} - \mathrm{C}_2 e^{\lambda_2 t} \right). \tag{2.8.17}$$

Из (2.8.16), (2.8.17) следует, что при $\gamma_1 \gamma_2 > 0$ амплитуды $A_{1,2}$ нарастают во времени по экспоненциальному закону, т. е. генерируется неустойчивость. Если же $\gamma_1 \gamma_2 < 0$, то процесс носит колебательный характер.

2.8.4. Учет затухания при трехволновом взаимодействии

Более реальной моделью взаимодействия трех волн является система уравнений, учитывающая затухание волн:

$$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2 - \nu_1 A_1, \tag{2.8.18}$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1 - \nu_2 A_2, \tag{2.8.19}$$

$$\frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1 A_2 - \nu_0 A_0. \tag{2.8.20}$$

Для волны накачки $\gamma_0 < 0$. Уравнения (2.8.18), (2.8.19) имеют стационарные решения при $\frac{d}{dt} = 0$:

$$\gamma_1 A_0 A_2 - \nu_1 A_1 = 0,$$
$$\gamma_2 A_0 A_1 - \nu_2 A_2 = 0.$$

Определитель данной системы

$$\nu_1 \nu_2 - \gamma_1 \gamma_2 A_0^2 = 0.$$

Отсюда следует выражение для порога волны накачки:

$$A_0^{(0)} = \left(\frac{\nu_1 \nu_2}{\gamma_1 \gamma_2}\right)^{1/2}. \tag{2.8.21}$$

При $A_0 = A_0^{(0)}$ приток энергии к волнам $A_{1,2}$ равен потере энергии.

В несамосогласованной постановке задачи в уравнениях (2.8.18), (2.8.19) можно считать $A_0 \approx \mathrm{const}$. Тогда, дифференцируя (2.8.18) по времени, получим

$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} = \gamma_1 A_0 \frac{dA_2}{dt} - \nu_1 \frac{dA_1}{dt}. \tag{2.8.22}$$

Учтем, что

$$A_2 = \frac{1}{\gamma_1 A_0}\left(\frac{dA_1}{dt} + \nu_1 A_1\right), \tag{2.8.23}$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1 - \frac{\nu_2}{\gamma_1 A_0}\left(\frac{dA_1}{dt} + \nu_1 A_1\right). \tag{2.8.24}$$

Подставляя (2.8.23), (2.8.24) в (2.8.22), имеем:

$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} + (\nu_1 + \nu_2)\frac{dA_1}{dt} + \left(\nu_1 \nu_2 - \gamma_1 \gamma_2 A_0^2\right) A_1 = 0.$$

Для решения $A_1 \sim e^{\lambda t}$ характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + (\nu_1 + \nu_2)\lambda + \left(\nu_1 \nu_2 - \gamma_1 \gamma_2 A_0^2\right) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)^2 - \left(\nu_1\nu_2 - \gamma_1\gamma_2 A_0^2\right)}.$$

Корень λ_2 всегда отрицателен, а $\lambda_1 > 0$ при

$$\nu_1\nu_2 - \gamma_1\gamma_2 A_0^2 < 0$$

или, в соответствии с (2.8.21),

$$1 - \frac{A_0^2}{A_0^{(0)}} < 0\,.$$

Таким образом, неустойчивость ($A_1 \sim e^{\lambda_1 t}$, $\lambda_1 > 0$) возникает при $A_0 > A_0^{(0)}$. Если же $A_0 < A_0^{(0)}$, то процесс носит затухающий характер.

Общее решение (2.8.18), (2.8.19) имеет вид:

$$A_1(t) = \mathrm{C}_1 e^{\lambda_1 t} + \mathrm{C}_2 e^{\lambda_2 t}\,, \tag{2.8.25}$$

$$A_2(t) = \frac{1}{\gamma_1 A_0}\left(\frac{dA_1}{dt} + \nu_1 A_1\right) = \mathrm{C}_1 \frac{\lambda_1 + \nu_1}{\gamma_1 A_0} e^{\lambda_1 t} + \mathrm{C}_2 \frac{\lambda_2 + \nu_1}{\gamma_1 A_0} e^{\lambda_2 t}. \tag{2.8.26}$$

2.8.5. Трехволновое взаимодействие (самосогласованная постановка задачи)

Как следует из системы уравнений (2.8.18), (2.8.19) и (2.8.20), величина порога в самосогласованной постановке задачи также задается выражением (2.8.21).

Точное аналитическое решение указанной системы уравнений найти не удается, поэтому ниже будем пренебрегать потерями, т. е. считать $\nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = 0$. При этом

$$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2, \qquad \gamma_1 > 0\,, \tag{2.8.27}$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1, \qquad \gamma_2 > 0\,, \tag{2.8.28}$$

$$\frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1 A_2, \qquad \gamma_0 < 0\,, \tag{2.8.29}$$

где $A_0(0) = A_{00}$, $A_{1,2}(0) = A_{10,20}$.

Поступая так же, как в пункте 2.8.1, получим интеграл системы (2.8.27), (2.8.28), (2.8.29):

$$\frac{A_1^2 - A_{10}^2}{\gamma_1} = \frac{A_2^2 - A_{20}^2}{\gamma_2} = \frac{A_0^2 - A_{00}^2}{\gamma_0} = \mathrm{const}\,. \tag{2.8.30}$$

Уравнения (2.8.30) являются *соотношениями Мэнли–Роу* [6, 31]. Они представляют собой разновидность *закона сохранения энергии*. Действительно, разрешая (2.8.30) относительно A_0^2, A_1^2 и A_2^2 и суммируя, получим

$$\frac{A_1^2(t)}{\gamma_1}+\frac{A_2^2(t)}{\gamma_2}+\frac{A_0^2(t)}{\gamma_0}=\mathrm{const}_1.$$

Решения для несамосогласованной задачи (2.8.25), (2.8.26) и соотношения Мэнли–Роу (2.8.30) позволяют качественно представить процесс генерации неустойчивостей в самосогласованной постановке задачи (рис. 2.21). При $\lambda_1 t\le 1$ справедлив несамосогласованный подход, в этом случае $A_0(t)\approx\mathrm{const}$, а $A_{1,2}(t)$ нарастают по экспоненциальному закону. Это линейная стадия неустойчивости. При $\lambda_1 t>1$ амплитуда волны накачки заметно уменьшается, и рост $A_{1,2}$ постепенно прекращается (нелинейная стадия неустойчивости).

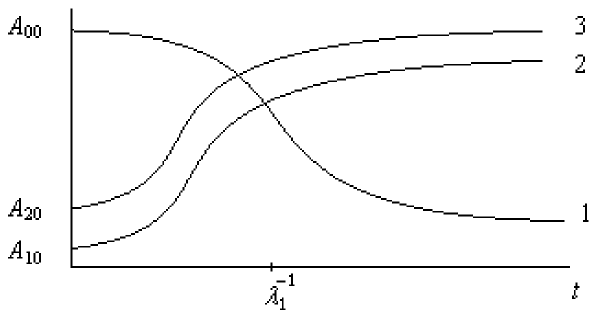


Рис. 2.21. Зависимость амплитуд от времени при трехволновом взаимодействии:
1 – волна накачки;
2 – волна A_1;
3 – волна A_2

2.8.6. Взрывная неустойчивость

Взрывная неустойчивость возникает, если *приток энергии превышает потери*. При этом амплитуда неустойчивости неограниченно возрастает за *конечное время* t_0. Простейшая модель, описывающая такую неустойчивость, дается уравнением типа

$$\frac{dA}{dt}=\gamma A^2-\nu A,\quad \gamma,\nu>0, \tag{2.8.31}$$

где $A(t=0)=A(0)$. Важно, что приток энергии $\sim A^2$, а потери $\sim A$. Пороговое значение находится из уравнения (2.8.31) при $\dfrac{d}{dt}=0$ и имеет вид

$$A^{(0)}=\frac{\nu}{\gamma}. \tag{2.8.32}$$

(Тривиальное значение $A^{(0)}=0$ не принимается во внимание). С учетом (2.8.32) уравнение (2.8.31) перепишется в следующем виде:

$$\frac{dA}{dt} = -\nu A\left(1 - \frac{A}{A^{(0)}}\right).$$

Его решение есть

$$A(t) = \frac{A(0)A^{(0)}}{A(0) + \left(A^{(0)} - A(0)\right)e^{\nu t}}. \qquad (2.8.33)$$

Если $A(0) < A^{(0)}$, то при $\nu t \gg 1$ имеем: $A(t) \to 0$ (рис. 2.22). Если же $A(0) > A^{(0)}$, то при $t = t_0$ знаменатель в (2.8.33) обращается в нуль, а $A(t_0) \to \infty$. Значение t_0 находится из выражения

$$t_0 = \frac{1}{\nu}\ln\frac{A(0)}{A(0) - A^{(0)}}.$$

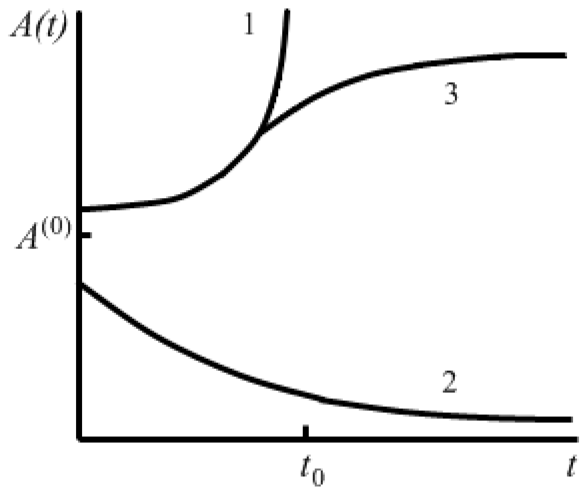


Рис. 2.22. Зависимость амплитуды волны при взрывной неустойчивости:

1 – $A(0) > A^{(0)}$, $\beta = 0$;

2 – $A(0) < A^{(0)}$, $\beta = 0$;

3 – $A(0) > A^{(0)}$, $\beta \neq 0$

Реально неограниченный рост $A(t)$ невозможен, так как, начиная с некоторых значений A, потери будут расти быстрее, чем приток энергии. Модель такого процесса сводится к уравнению вида

$$\frac{dA}{dt} = \gamma A^2 - \nu A - \beta A^3, \qquad (2.8.34)$$

где $\beta > 0$ – достаточно «малая» величина в смысле $\beta A^3(0) \ll \gamma A^2(0)$. Уравнение (2.8.34) имеет стационарное решение, которое находится из соотношения

$$\gamma A^2 - \nu A - \beta A^3 = 0.$$

Считая, что $A \neq 0$, получим $A_{1,2} = \dfrac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\beta\nu}}{2\beta}$.

Если $4\beta\nu \ll \gamma^2$, то

$$A_1 \approx \gamma / \beta \equiv A_\infty,$$

$$A_2 \approx \nu / \gamma \equiv A^{(0)}.$$

Таким образом, $A_1 = A_\infty$ есть стационарное решение (2.8.34) при $t \to \infty$, а $A_2 = A^{(0)}$ является пороговым значением амплитуды волны.

Качественно решение (2.8.34) представить нетрудно. При $t < t_0$ имеет место резкий рост амплитуды (линейная стадия неустойчивости), а при $t \gg t_0$ наступает ее *стабилизация* (нелинейная стадия неустойчивости). *Время «выхода»* на значения $A \approx A_\infty$ можно получить из уравнения (2.8.34) методом оценки производных:

$$t_\infty \approx \frac{1}{\beta A_\infty^2}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое неустойчивость?
2. Как возникает неустойчивость?
3. Какими характеристиками описывается неустойчивость?
4. Опишите двухволновое взаимодействие.
4. Какие стадии неустойчивостей различают?
5. Чем отличаются несамосогласованная и самосогласованная постановки задач?
6. К чему приводит учет затухания при двухволновом взаимодействии?
7. Опишите трехволновое взаимодействие.
8. Что такое распадная неустойчивость?
9. Что такое параметрическая неустойчивость?
10. Приведите соотношения Мэнли–Роу. Что они представляют собой?
11. Что такое взрывная неустойчивость?
12. Как возникает взрывная неустойчивость?
13. В результате чего наступает стабилизация взрывной неустойчивости?

Задачи

1. Решить задачу о двухволновом взаимодействии, если оно описывается системой вида

а) $$\frac{dA_1}{dt} = -\gamma_1 A_1 A_2, \qquad A_1\Big|_{t=0} = A_1(0),$$
$$\frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1, \qquad A_2\Big|_{t=0} = 0,$$

б) $$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_2^2, \qquad A_1\Big|_{t=0} = 0,$$
$$\frac{dA_2}{dt} = -\gamma_2 A_1 A_2, \quad A_2\Big|_{t=0} = A_2\left(0\right).$$

Учесть, что $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

2. Вычислить пороговое значение амплитуды волны накачки в задаче о трехволновом когерентном взаимодействии ($\gamma_{1,2} > 0$; $\gamma_0 < 0$):

а) $$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0^2 A_2 - \nu_1 A_1,$$
$$\frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0^2 A_1 - \nu_2 A_2,$$
$$\frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1^2 A_2 - \nu_0 A_0,$$

б) $$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0^2 A_2 - \nu_1 A_1 A_0,$$
$$\frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_1 A_0^2 - \nu_2 A_2 A_0,$$
$$\frac{dA_0}{dt} = -\gamma_0 A_1^2 A_2 - \nu_0 A_0^2.$$

Начальные условия имеют вид:

$$A_1\Big|_{t=0} = 0, \quad A_2\Big|_{t=0} = 0, \quad A_0\Big|_{t=0} = A_{00}.$$

3. Исследовать взрывную неустойчивость, описываемую уравнением

а) $$\frac{dA}{dt} = \gamma A^3 - \nu A,$$

б) $$\frac{dA}{dt} = \gamma A^3 - \nu A^2,$$

где $\nu, \gamma > 0,\ A(0) > A^{(0)}$, $A^{(0)}$ – пороговое значение.

4. В результате трехволнового взаимодействия могут возникать солитоны огибающих. Они описываются следующей моделью:

$$\begin{cases} \dfrac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2, \\ \dfrac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1, \\ \dfrac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1 A_2, \end{cases}$$

где $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, $\gamma_0 < 0$, $A_{1,2}(\pm\infty) = 0$, $t = t' - \dfrac{x}{v_г}$, $A_0(\pm\infty) = A_{00}$, $v_г$– групповая скорость. Отыскать $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$.

Указание. Использовать соотношения Мэнли–Роу.

5. Известно, что ребенок интенсивно растет до 12 – 13 лет: его масса в начале жизни увеличивается в e раз примерно за 2,6 года. Считая, что относительная скорость увеличения массы ребенка уменьшается по экспоненциальному закону с характерным временем, равным 8 годам, составить уравнение, описывающее закон изменения массы человека в течение жизни. Найти его решение и постройте зависимость $m(t)$. Относится ли такое поведение к неустойчивости? Если да, то какого типа? Принять $m(0) = 3,5$ кг.

6. Скорость роста численности N простейших организмов в биосфере пропорциональна их числу. Это же можно сказать и о скорости их гибели. Составить дифференциальное уравнение, описывающее изменение N во времени. Получить его решение. Описывает ли оно неустойчивость? При каких условиях? Привести примеры.

7. Скорость роста численности N сложных организмов в биосфере пропорциональна квадрату их числа, а скорость гибели – N. Составить дифференциальное уравнение, описывающее изменение N во времени. Получить его решение. Описывает ли оно неустойчивость? Какую? При каких условиях? Привести примеры.

8. Численность N многих организмов в биосфере описывается логистическим законом, согласно которому относительная скорость изменения N во времени убывает с ростом N по линейному закону. Составить дифференциальное уравнение, описывающее изменение N во времени. Получить его решение. Описывает ли оно неустойчивость? Какую? При каких условиях? Привести примеры.

9. В некоторую историческую эпоху, которая включает в себя и настоящее время, рост численности населения на Земном шаре хорошо описывается простейшей моделью С. П. Капицы:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^2}{C},$$

где $C \approx 1{,}86 \cdot 10^{11}$ чел.·год.

Является ли такой рост устойчивым? Найдите и проанализируйте зависимость $N(t)$. В каком году наступит «взрыв» численности населения, если в 1999 г. $N = 6$ млрд человек? Реальна ли модель С. П. Капицы? Чего она не учитывает? Попытайтесь усовершенствовать эту модель.

10. В некоторую историческую эпоху, которая включает в себя и настоящее время, рост численности населения на Земном шаре хорошо описывается усовершенствованной моделью С. П. Капицы:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{C}{(\tau_0 - t)^2 + \tau^2},$$

где $C \approx 1{,}86 \cdot 10^{11}$ чел.·год, $\tau \approx 42$ года – характерное время для человека, $\tau_0 \approx 2007$ год.

Является ли такой рост устойчивым? Найдите и проанализируйте зависимость $N(t)$. В каком году наступит стабилизация численности населения, если в 1999 г. $N = 6$ млрд человек? Реальна ли эта модель С. П. Капицы? Вычислите N в текущем году и сравните его с результатами переписи населения. Существенны ли отклонения от модели?

11. Рост потребляемой человечеством мощности описывается моделью вида

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(P)P, \qquad P\Big|_{t=0} = P_0,$$

где $P_0 = 20$ ТВт, $\alpha = \alpha_0(1 + \beta P)$, $\alpha \approx 0{,}03$ год$^{-1}$, $\left|\beta\right| \approx 10^{-14}$ Вт$^{-1}$. Найдите и проанализируйте решение модельного уравнения. Описывает ли оно неустойчивость? Какую? При каких условиях?

12. Рост мощности электромагнитного излучения, «загрязняющего» радиоэфир описывается моделью вида

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(1 + \beta P + \gamma P^2), \qquad P\Big|_{t=0} = P_0,$$

где $P_0 = 10$ ГВт, $\alpha = 0{,}1$ год$^{-1}$, $\left|\beta\right| \approx 10^{-12}$ Вт$^{-1}$, $|\ \gamma\ | \approx 10^{-21}$ Вт$^{-2}$. Найдите и проанализируйте решение модельного уравнения. Описывает ли оно неустойчивость? Какую? При каких условиях?

<u>13.</u> Рост численности фрагментов космического «мусора» на околоземных орбитах описывается моделью вида

$$\frac{dn}{dt} = \alpha(n)n - \beta n\,, \qquad n\Big|_{t=2000\,\text{ãî ä}} = n_0,$$

где, $n_0 = 10^4$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 n$, $\alpha_0 \approx 0,05$ год$^{-1}$, $\alpha_1 \approx 10^{-7}$ год$^{-1}$, $\beta = 0,02$ год$^{-1}$. Найдите и проанализируйте решения модельного уравнения. Описывает ли оно неустойчивость? Какую? При каких условиях? Через сколько лет полеты в околоземном космосе станут невозможными?

2.9. Основные результаты

1. При распространении сильных электромагнитных волн в средах нарушается принцип суперпозиции, возникает самовоздействие и взаимодействие волн.

2. Точное решение нелинейных уравнений электродинамики удается найти в крайне небольшом числе случаев.

Для приближенного решения нелинейных волновых уравнений разработан ряд методов: малых возмущений, медленно меняющихся амплитуд, нелинейной квазиоптики, нелинейной геометрической оптики и др.

3. При самовоздействии волн возникают эффекты просветления и помутнения среды, фазовые искажения, нелинейный эффект Доплера и др.

Самовоздействие пучков волн приводит к эффекту самофокусировки (самодефокусировки), а также к эффекту самоканалирования, который наступает при компенсации дифракционного уширения нелинейным сжатием пучка.

Аналогичные эффекты наблюдаются при взаимодействии волн.

4. При распространении нелинейных волн в недиспергирующих средах без диссипации происходит укручение профиля волны.

Учет диссипации может привести к компенсации нелинейных эффектов размытием профиля волны и возникновению стационарной волны (например, ударной).

При компенсации нелинейного укручения дисперсионным расплыванием возникают также стационарные волны и, в частности, солитоны.

Солитон – фундаментальное междисциплинарное понятие.

5. При нелинейном взаимодействии когерентных волн амплитуда одной из них может быстро нарастать (в частности, по экспоненциальному закону), т. е. может возбуждаться неустойчивость.

Неустойчивость возникает за счет передачи энергии от источника и при наличии положительной обратной связи. Учет затухания приводит к тому, что этот процесс становится пороговым.

Неограниченный рост амплитуды волны за конечное время представляет собой взрывную неустойчивость.

Линейная стадия любой неустойчивости сменяется нелинейной, что связано с конечностью энергии источника неустойчивости.

РАЗДЕЛ 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В КВАНТОВОЙ РАДИОФИЗИКЕ

Экстремальные состояния вещества особенно привлекательны для физики, поскольку в них наиболее ясно проявляются законы природы[1]

Нелинейные явления возникают в результате взаимодействия излучения мощных квантовых генераторов с веществом (твердыми телами, жидкостями, газами и плазмой) [11, 38].

Первые нелинейные эффекты при распространении света в веществе были обнаружены еще в *долазерную* эпоху. Поэтому соответствующий раздел физики получил название *нелинейной оптики*.

Поскольку оптика традиционно исследует видимый свет (длина волны $\lambda \sim 4{\cdot}10^{-7}$–$8{\cdot}10^{-7}$ м), а квантовые генераторы излучают в диапазонах от субмиллиметрового ($\lambda \sim 10^{-4}$ м) до рентгеновского ($\lambda \sim 10^{-10}$ м), целесообразно говорить о *нелинейной квантовой радиофизике*.

3.1. Краткая историческая справка

Первые предпосылки к существованию нелинейных эффектов, вызванных взаимодействием оптического излучения с веществом, появились в 20-х гг. прошлого столетия.

В 1923 г. С. И. Вавилов и В. Л. Левшин обнаружили эффект самопросветления при прохождении света через урановое стекло. В качестве

[1]Великович А. Л. Физика ударных волн в газах и плазме А.Л. Великович, М. А. Либерман. – М. : Наука, 1987. – С. 4.

источника света использовались мощные электромагнитные искры. Уменьшение коэффициента поглощения составило $1{,}5 \pm 0{,}3$ %. С. И. Вавилов понимал, что обнаруженный эффект – один из многих, способных составить новое направление. Он назвал это направление нелинейной оптикой.

В 50-х гг. XX в. Г. С. Горелик теоретически обосновал возможность наблюдения некоторых нелинейных эффектов с помощью фотоэлектрических умножителей.

Рождение нелинейной квантовой радиофизики обязано созданию *мощных когерентных источников света – лазеров.*

В 1961 г. физик из США П. Франкен впервые наблюдал *генерацию второй гармоники*. В 1962 г. обнаружен *эффект генерации третьей гармоники*.

В 1961–1963 гг. Р. В. Хохлов, С. А. Ахманов в СССР и Н. Бломберген в США выполнили фундаментальные теоретические исследования, заложив тем самым основы нелинейной квантовой радиофизики и оптики.

В 1962–1963 гг. открыто и объяснено *вынужденное комбинационное рассеяние* света.

В 1965 г. обнаружен эффект *самофокусировки света* (Н. Ф. Пилипецкий, А. Ф. Рустамов), предсказанный Г. А. Аскарьяном в 1962 г.

К середине 1960-х гг. нелинейная квантовая радиофизика (нелинейная оптика) сформировалась как самостоятельное направление. Нелинейные явления быстро внедрялись в практику.

В 1964–1966 гг. появились первые работы по *нелинейной спектроскопии*.

В 1965 г. были созданы *параметрические генераторы света*, использующие нелинейные эффекты для генерации излучения, плавно перестраиваемого по частоте в широких пределах.

В 1967 г. начались исследования эффектов при воздействии на среду *пикосекундных импульсов* ($\tau \sim 10^{-12}$ с), а в 1970–1980-х гг. и *фемтосекундных импульсов* ($\tau \sim 10^{-15}$ с).

В 1971–1972 гг. открыто и изучено *явление обращения волнового фронта* в нелинейных средах, положившее начало адаптивной оптике.

В настоящее время основные нелинейные явления используются на практике. Нелинейная квантовая радиофизика – одна из немногих нелинейных наук, которая может «похвастаться» сравнительно быстрым и широким внедрением своих эффектов в практику [11, 38].

Вопросы для самоконтроля

1. Выделите основные этапы в исследовании нелинейных явлений в квантовой радиофизике.

2. Опишите историю исследования нелинейных явлений в квантовой радиофизике.

3.2. Механизмы нелинейных явлений

Существует несколько механизмов, приводящих к возникновению нелинейных явлений. Величина характерного поля, при которой становится существенным тот или иной механизм, зависит от вещества, его агрегатного состояния и параметров, частоты волны и т. п. [11].

Рассмотрим механизмы подробнее.

3.2.1. Тепловой механизм

Тепловой механизм нелинейности связан с нагревом вещества мощным электромагнитным излучением, в результате чего показатели поглощения и преломления вещества становятся зависящими от напряженности поля волны. Это приводит, в частности, к самовоздействию волны, к эффекту самофокусировки и т. д.

Величина характерного поля E_t для теплового механизма зависит от вещества. Так, заметный нагрев кристалла возможен уже при $P \sim 10^{-2}$ Вт, т. е. при $E_t \sim 10^3$ В/м. Для плазмы $E_t \sim 10^6$ В/м. В последнем случае E_t обычно называют *плазменным полем* E_p (см. пункт 4.2.1).

Получим выражение для напряженности характерного поля E_t при тепловом механизме нелинейности.

В качестве исходного выберем уравнение баланса внутренней энергии при нагревании вещества плотностью ρ, удельной теплоемкостью C, длиной образца L:

$$\frac{dQ}{dt} = \kappa P - P_1,$$

где $Q = C\rho SL\Delta T$, S – площадь сечения лазерного пучка, ΔT – изменение абсолютной температуры образца, $P = qS$ – мощность лазера, q – плотность потока энергии излучения, κ – коэффициент поглощения излучения, P_1 –

мощность потерь (за счет теплового излучения образца, теплопроводности, конвекции и т. п.).

Обычно $\kappa P \gg P_1$ и уравнение баланса принимает вид:

$$C\rho SL\frac{d\Delta T}{dt} \approx \kappa P = \kappa qS\,.$$

Отсюда при длительности воздействия τ получим, что

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\kappa q\tau}{C\rho T_0 L}.$$

Поскольку в системе СИ

$$q = \frac{P}{S} = \frac{E_0^2}{2Z_0} = \frac{E_0^2}{240\pi},$$

где $Z_0 = 120\pi$ Ом – сопротивление свободного пространства,

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{E_0^2}{E_t^2}.$$

Здесь

$$E_t^2 = \frac{240\pi C\rho T_0 L}{\kappa\tau}.$$

Очевидно, что при $E_0 = E_t$ значение $\Delta T = T_0$.

Выполним оценки E_t.

Для слабопоглощающего газа $\kappa = 10^{-6}$ и $\rho = 1$ кг/м^3, $C = 10^3$ Дж/кг·К, T_0 = 300 К, $L = 0{,}03$ м, $\tau = 10$ с имеем $E_t \approx 2{,}6 \cdot 10^6$ В/м. При $S = 10^{-5}$ м^2, $q \approx 10^{10}$ Вт/м^2 получим $P \approx 0{,}1$ МВт.

Для кристалла (конденсированного вещества) с $\kappa = 10^{-6}$, $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м^3, $C = 5 \cdot 10^2$ Дж/кг·К, T_0 = 300 К, $L = 0{,}03$ м, $\tau = 10$ с получим $E_t \approx 8{,}2 \cdot 10^7$ В/м. Если $S = 10^{-3}$ м^2, $q \approx 10^{13}$ Вт/м^2, $P \approx 100$ МВт.

3.2.2. Стрикционный механизм

Под электрострикцией понимается возникновение упругих деформаций среды под действием приложенного электромагнитного поля. В результате электрострикции в среде генерируются и распространяются акустические волны.

Как следствие деформации среды изменяется абсолютная диэлектрическая проницаемость:

$$\Delta\varepsilon_a = \left(\frac{\partial\varepsilon_a}{\partial\rho}\right)_0 \Delta\rho,$$

где $\Delta\rho = (\rho - \rho_0)$, ρ и ρ_0 – плотность среды в возмущенных полем волны и невозмущенных условиях.

За счет изменения ε_a возникают изменения плотности энергии w электрического поля

$$\Delta w = \frac{\Delta\varepsilon_a E_0^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varepsilon_a}{\partial\rho}\right)_0 \Delta\rho E_0^2.$$

Изменения w эквивалентны действию стрикционного давления

$$p_s = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varepsilon_a}{\partial\rho}\right)_0 \Delta\rho E_0^2.$$

Относительная деформация среды определяется безразмерным параметром:

$$\frac{p_s}{K} = \left(\frac{\partial\varepsilon_a}{\partial\rho}\right)_0 \frac{\Delta\rho}{2K} E_0^2 \equiv \frac{E_0^2}{E_s^2}.$$

Здесь K – модуль всестороннего сжатия. Стрикционное поле

$$E_s^2 = \frac{2K}{\left(\frac{\partial\varepsilon_a}{\partial\rho}\right)_0 \Delta\rho} = \frac{2K}{\varepsilon_0\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_0 \Delta\rho} = \frac{2K}{\varepsilon_0\Delta\varepsilon}.$$

Стрикционная нелинейность становится существенной при возмущениях относительной диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon \approx 0{,}1 - 1$.

Для газов при атмосферном давлении $K = 10^5$ Н/м^2, для жидкостей $K = (1 - 9)\cdot 10^9$ Н/м^2, для твердых тел $K \approx (1 - 3)\cdot 10^{11}$ Н/м^2. Таким значениям K соответствуют значения E_s порядка $(1 – 3)\cdot 10^8$, $10^{10} – 10^{11}$ и $10^{11} – 10^{12}$ В/м.

3.2.3. Керровский механизм

Под действием электрического поля оптически изотропное вещество приобретает свойства одноосного кристалла с оптической осью, параллельной вектору $\vec{E}_0$. Этот эффект называется явлением Керра. Он был открыт в 1875 г.

Экспериментально установлено, что при распространении света перпендикулярно оптической оси для разности показателей преломления обыкновенной ($n_{\text{î}}$) и необыкновенной ($n_{\text{í}}$) волн справедливо следующее соотношение:

$$n_{\text{í}} - n_{\text{î}} = k_K \lambda E_0^2,$$

где k_K – постоянная Керра, λ – длина волны. Мерой нелинейности служит отношение

$$\frac{n_{\text{í}} - n_{\text{î}}}{n^{(0)}} = \frac{k_K \lambda E_0^2}{n^{(0)}} \equiv \frac{E_0^2}{E_K^2},$$

где $n^{(0)}$ – показатель преломления среды в отсутствие электрического поля, E_K – характерное поле для керровского механизма (керровское поле). Последнее дается выражением:

$$E_K^2 = \frac{n^{(0)}}{k_K \lambda}.$$

В оптическом диапазоне для газов $E_K \approx 3 \cdot 10^{11} - 3 \cdot 10^{12}$ В/м, для жидкостей – $E_K \approx 10^{10} - 10^{11}$ В/м. При повышении концентрации молекул эффект Керра усиливается, а значение поля E_K уменьшается.

Характерное время становления эффекта Керра составляет $10^{-12} - 10^{-11}$ с.

3.2.4. Механизм нелинейности Поккельса

Эффект Поккельса заключается в возникновении в некоторых кристаллах двойного лучепреломления при наложении электрического поля. При этом

$$n_{\text{í}} - n_{\text{î}} = k_P E_0 .$$

Важно, что величина эффекта линейна по E_0, k_P – постоянная.

Для характерного поля (поля Поккельса) имеем:

$$E_P = \frac{n^{(0)}}{k_P}.$$

Обычно $E_P \approx 3 \cdot 10^9$ В/м, т. е. на порядок меньше, чем E_K.

Заметим, что эффект Поккельса столь же безинерционен, как и эффект Керра.

3.2.5. Атомный механизм

Данный механизм связан с *нелинейным откликом* атомных или молекулярных осцилляторов вещества, в котором распространяется электромагнитная волна.

Атомный механизм является *основным* в нелинейной квантовой радиофизике. Он возникает тогда, когда напряженность поля волны становится соизмеримой с внутриатомной напряженностью поля

$$E_a = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_a^2}, \tag{3.2.1}$$

где ε_0 – электрическая постоянная,

$$r_a = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{me^2}. \tag{3.2.2}$$

Здесь r_a – радиус первой боровской орбиты, $\hbar$ – постоянная Планка, e и m – заряд и масса электрона.

Из (3.2.1), (3.2.2) получаем

$$E_a = \frac{m^2 e^5}{(4\pi\varepsilon_0)^3 \hbar^4}. \tag{3.2.3}$$

Величина $E_a \sim 10^{12}$ В/м.

3.2.6. Релятивистский механизм

Данный механизм возникает в случае, если *осцилляторная* скорость свободных электронов (в пренебрежении релятивистским изменением массы)

$$v_e = \frac{eE_0}{m\omega}$$

становится порядка скорости света c, т. е. при напряженности поля

$$E_r = \frac{mc\omega}{e}. \tag{3.2.4}$$

Например, при $f \sim 10^{15}$ Гц $E_r \sim 10^{13}$ В/м.

3.2.7. Вакуумный механизм

Данный механизм может стать существенным, если работа электрического поля над электроном на комптоновской длине волны этой частицы $\lambda_k = \hbar / mc$ сравняется с энергией покоя электрона, т. е.

$$eE_v\lambda_k = mc^2$$

или

$$eE_v \frac{\hbar}{mc} = mc^2 .$$

Отсюда

$$E_v = \frac{m^2 c^3}{e\hbar} . \qquad (3.2.5)$$

Величина E_v зависит только от фундаментальных констант и равна $\sim 10^{18}$ В/м.

При $E \sim E_v$ возникают нелинейные эффекты в вакууме. Разумеется, речь идет не о классическом вакууме (пустоте), а о *физическом вакууме*, в котором непрерывно рождаются и исчезают виртуальные частицы.

3.2.8. Сравнение механизмов

Обычно в наименьших полях проявляется тепловая нелинейность, в несколько больших полях – стрикционная, т. е.

$$E_t \ll E_s . \qquad (3.2.6)$$

В еще больших полях становятся существенными атомный, релятивистский и вакуумный механизмы. Покажем это, для чего составим отношения, исходя из (3.2.3), (3.2.4) и (3.2.5):

$$\frac{E_a}{E_v} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \right)^3 \equiv \alpha^3 , \ \frac{E_r}{E_v} = \frac{\hbar\omega}{mc^2} ,$$

где $\alpha \approx 1/137$ – постоянная тонкой структуры. При этом $E_a / E_v \sim 10^6$, а $E_r / E_v \sim 10^{-5}$ при $f \sim 10^{15}$ Гц.

Таким образом,

$$E_a \ll E_r \ll E_v ,$$

а с учетом (3.2.6) имеем

$$E_t \ll E_s \ll E_a \ll E_r \ll E_v .$$

Результаты оценок этих полей, а также соответствующих им мощностей излучения P и плотностей потока энергии $q = P / S$ для сечения пучка $S = 10$ мм^2 приведены в табл. 3.1.

Какими же полями располагает экспериментатор в настоящее время? Приведем примеры сверхсильных световых полей. При помощи эксимерной системы KrF ($\lambda =$ 0,24 мкм, $\tau =$ 70 фс) еще в 1980-х гг. получено $q \sim 10^{22}$ Вт/м^2 ($P \sim 10^{17}$ Вт), в перспективе можно получить $q \sim 10^{23}$ Вт/м^2 ($P \sim 10^{18}$ Вт, $\tau \sim$ 100 фс). Для твердотельных систем (видимый и ближний инфракрасный диапазоны) при $\tau \sim 10$ фс получено $q \sim 10^{22}$ Вт/м^2, а в перспективе – $q \sim 10^{27}$ Вт/м^2 ($P \sim 10^{22}$ Вт, $\tau \sim 10$ фс) [11].

Таблица 3.1. Сравнительные характеристики различных механизмов

Механизм	E, В/м	E / E_v	P, Вт	q, Вт/м^2
Тепловой	10^3	10^{-15}	10^{-2}	10^3
Стрикционный	10^5	10^{-13}	10^2	10^7
Атомный	10^{12}	10^{-6}	10^{16}	10^{21}
Релятивистский	10^{13}	10^{-5}	10^{18}	10^{23}
Вакуумный	10^{18}	1	10^{28}	10^{33}

Так называемые СРА-лазеры позволили достичь $q \sim 10^{24} - 10^{25}$ Вт/м^2. Они имеют мощность $P \sim 10^{19} - 10^{20}$ Вт при $\tau \sim 10 - 10^3$ фс [11].

В России и Великобритании в 2006–2007 гг. достигнуты значения $q \sim 10^{26}$ Вт / м^2.

Таким образом, даже в отдаленной перспективе вряд ли удастся приблизиться к величине E_v. Что же касается величины E_r, можно утверждать, что к ней подошли вплотную.

Полезно сравнить объемную плотность энергии различных источников (табл. 3.2).

При оценке объемной плотности энергии $w = q / c$, излучаемой квантовым генератором, считалось, что мощность лазера – около 1 ПВт, луч фокусируется на мишени диаметром около 3 мкм.

Таблица 3.2. Объемная энергия различных источников

Источник энергии	Плотность энергии, Дж/м^3
Аннигиляция частиц и античастиц	10^{35}
Квантовый генератор	10^{18}
Ядерная реакция	10^{17}
Химическая реакция	$8{\cdot}10^9$
Вулканическая лава	$2{\cdot}10^9$
Молния	10^7
Землетрясение	10^3
Мощные атмосферные процессы	10^2–10^3

Из табл. 3.2 видно, что по объемной плотности энергии квантовые генераторы уступают лишь аннигиляции частиц с античастицами.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите механизмы нелинейных явлений в квантовой радиофизике.
2. Опишите тепловой механизм нелинейности в квантовой радиофизике.
3. Опишите стрикционный механизм нелинейности в квантовой радиофизике.
4. Опишите атомный механизм нелинейности в квантовой радиофизике.
5. Опишите релятивистский механизм нелинейности в квантовой радиофизике.
6. Опишите вакуумный механизм нелинейности в квантовой радиофизике.
7. Опишите керровский механизм нелинейности в квантовой радиофизике.
8. Сравните механизмы нелинейных явлений в квантовой радиофизике.
9. Приводит ли к нелинейности эффект Поккельса?
10. Все ли механизмы нелинейных явлений в квантовой радиофизике реализуются на практике?

3.3. Генерация второй гармоники

Генерация второй гармоники – *классический* нелинейный эффект квантовой радиофизики. Рассмотрим его подробнее.

3.3.1. Исходные уравнения

Исходными соотношениями являются укороченные уравнения для комплексных амплитуд [6]:

$$\frac{d\tilde{A}_1}{dx} = -i\delta_1\tilde{A}_2\tilde{A}_1^* e^{-i\Delta kx}, \quad \delta_1 > 0, \quad \tilde{A}_1(0) = A_{10}, \tag{3.3.1}$$

$$\frac{d\tilde{A}_2}{dx} = -i\delta_2\tilde{A}_1^2 e^{i\Delta kx}, \quad \delta_2 > 0, \quad \tilde{A}_2(0) = 0, \tag{3.3.2}$$

где $\Delta k = k_2 - 2k_1 = 2\dfrac{\omega}{c}(n_2 - n_1)$, $\tilde{A}_{1,2}$ и $n_{1,2}$ – комплексные амплитуды и показатели преломления волны накачки (1) и волны с частотой 2ω (2), $\delta_{1,2}$ – действительные коэффициенты.

Решение (3.3.1), (3.3.2) ищем в виде

$$\tilde{A}_{1,2} = A_{1,2}e^{i\varphi_{1,2}}. \tag{3.3.3}$$

Подставляя (3.3.3) в (3.3.1), (3.3.2), получим

$$\frac{dA_1}{dx} + iA_1\frac{d\varphi_1}{dx} = -i\delta_1 A_1 A_2 e^{-i\Phi}, \tag{3.3.4}$$

$$\frac{dA_2}{dx} + iA_2\frac{d\varphi_2}{dx} = -i\delta_2 A_1^2 e^{i\Phi}, \tag{3.3.5}$$

где $\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta kx$. Комплексные уравнения (3.3.4), (3.3.5) позволяют найти $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$. Выделим в этих уравнениях действительную часть:

$$\frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1 A_2 \sin\Phi, \tag{3.3.6}$$

$$\frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^2 \sin\Phi. \tag{3.3.7}$$

Решая эту систему, найдем $A_1(x)$ и $A_2(x)$.

3.3.2. Амплитуда второй гармоники

Из (3.3.7) видно, что источником волны (2) является волна накачки, причем $dA_2 / dx > 0$. Это означает, что амплитуда второй гармоники растет, а волны накачки – убывает, так как $dA_1 / dx < 0$ (см. (3.3.6)). Максимальное взаимодействие имеет место при $\sin\Phi = 1$ (при $\sin\Phi = 0$ взаимодействие отсутствует). В этом случае уравнения (3.3.6), (3.3.7) сводятся к следующим:

$$\frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1 A_2, \quad A_1(0) = A_{10}, \tag{3.3.8}$$

$$\frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^2, \qquad A_2(0) = 0. \tag{3.3.9}$$

Разделив верхнее уравнение на нижнее, получим

$$\frac{dA_1}{dA_2} = -\frac{\delta_1}{\delta_2}\frac{A_2}{A_1}.$$

Отсюда первый интеграл системы (3.3.8), (3.3.9) имеет вид:

$$A_1^2 = A_{10}^2 - \frac{\delta_1}{\delta_2}A_2^2. \tag{3.3.10}$$

С учетом (3.3.10) уравнение (3.3.9) преобразуется к такому:

$$\frac{dA_2}{dx} = \delta_2\left(A_{10}^2 - \frac{\delta_1}{\delta_2}A_2^2\right). \tag{3.3.11}$$

Из (3.3.11) следует, что в глубине среды (формально при $x \to \infty$) имеет место максимальное значение квадрата амплитуды волны 2, равное

$$A_{2\infty}^2 = \frac{\delta_2}{\delta_1}A_{10}^2. \tag{3.3.12}$$

Тогда (3.3.11) с учетом (3.3.12) перепишется как

$$\frac{dA_2}{dx} = \delta_1 A_{2\infty}^2 \left(1 - \frac{A_2^2}{A_{2\infty}^2}\right).$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$A_2 = A_{2\infty}\mathrm{th}(\delta_1 A_{2\infty} x + \mathrm{C}),$$

где из граничного условия $A_2(0) = 0$ находим, что $\mathrm{C} = 0$. Тогда

$$A_2(x) = A_{2\infty}\mathrm{th}\,\delta_1 A_{2\infty} x\,. \qquad (3.3.13)$$

Подстановка (3.3.13) в уравнение (3.3.10) с учетом (3.3.12) дает

$$A_1^2 = A_{10}^2 - \frac{\delta_1}{\delta_2}\frac{\delta_2}{\delta_1} A_{10}^2 \mathrm{th}^2 \delta_1 A_{2\infty} x\,.$$

Отсюда

$$A_1(x) = \frac{A_{10}}{\mathrm{ch}\,\delta_1 A_{2\infty} x}\,. \qquad (3.3.14)$$

Зависимости $A_1(x)$ и $A_2(x)$ показаны на рис. 3.1.

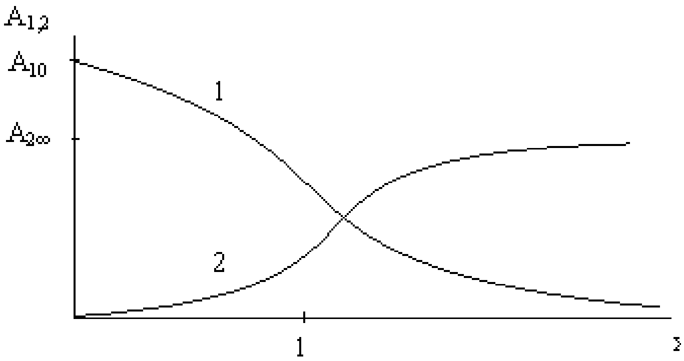


Рис. 3.1. Зависимость амплитуды волны накачки (1) и второй гармоники (2) от длины взаимодействия

Из рис. 3.1 видно, что при $L = (\delta_1 A_{1\infty})^{-1}$ происходит перекачка энергии волны накачки в энергию второй гармоники. Эффективность энергетических преобразований

$$\eta = \frac{A_{2\infty}^2}{A_{10}^2} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

составляет величину ~ 0,6–0,8.

Вопросы для самоконтроля

1. Опишите генерацию второй гармоники.

2. Дайте сравнительный анализ генерации второй гармоники и неустойчивости.

3.4. Использование нелинейных явлений

В настоящее время нелинейные явления широко используются в науке и технике, в частности для генерации высших комбинационных частот, параметрической генерации света, исследования вещества методами нелинейной спектроскопии, преобразования сигналов и изображений, в интересах адаптивной оптики и т. д.

Рассмотрим эти приложения подробнее [6, 11, 38].

3.4.1. Генерация оптических гармоник

Генерация второй гармоники описана в подразделе 3.3. Этот эффект давно стал классическим. Особой наглядностью обладает эксперимент по преобразованию инфракрасного луча лазера ($\lambda = 1{,}06$ мкм) в зеленый ($\lambda = 0{,}53$ мкм) при прохождении излучения через кристалл ниобата бария.

Легко генерируются 3-я, 4-я и 5-я гармоники. К. п. д. генерации, однако, с увеличением номера гармоники быстро падает. Поэтому приходится увеличивать мощность квантового генератора. Последняя ограничена величиной, при которой происходит оптический пробой вещества. Прочность вещества увеличивается при уменьшении длительности импульса излучения до значений $\tau \sim 10^{-12}$–10^{-11} с = 1–10 пс. Так, например, в благородных газах и парах металлов пробой наступает при $q \sim 10^{16}$–10^{17} В/м^2. Эта величина значительно больше той, при которой наступает пробой конденсированных сред.

В газах и парах металлов удается получить 5-ю и 7-ю гармоники излучения. Давно получено значение $\lambda_{\min} = 38{,}02$ нм.

Аналогично осуществляется генерация комбинационных гармоник. В этом случае в веществе имеет место трехволновое взаимодействие, которое происходит по следующей схеме:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2\,, \tag{3.4.1}$$

$$\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2. \tag{3.4.2}$$

Эти соотношения, называемые *условиями пространственно-временного синхронизма*, представляют собой законы сохранения энергии и импульса взаимодействующих фотонов. Примеры таких взаимодействий будут приведены ниже.

3.4.2. Параметрические генераторы света

Эти генераторы используют процесс *распада* мощной волны с частотой ω и волновым вектором $\vec{k}$ на две волны с частотами $\omega_{1,2}$ и волновыми векторами $\vec{k}_{1,2}$ согласно уравнениям (3.4.1), (3.4.2). Процесс распада называют также *параметрическим* процессом. Вследствие этого генераторы также именуют *параметрическими*. Схема такого генератора показана на рис. 3.2.

Устроен он следующим образом. В оптический резонатор, состоящий из двух зеркал, помещен нелинейный кристалл. Зеркала прозрачны для волны накачки с частотой ω. Волны с частотами $\omega_{1,2}$ первоначально в резонаторе присутствуют в электромагнитных шумах. В результате когерентного трехволнового взаимодействия (см. подраздел 2.8) происходит раскачка неустойчивостей на частотах $\omega_{1,2}$. Левое зеркало для этих излучений непрозрачное, а правое – полупрозрачное. Обычно полезным является сигнал на одной из частот ω_1 или ω_2, второй – подавляется при выходе из резонатора. Оба сигнала покидают резонатор после достижения определенного уровня мощности излучения.

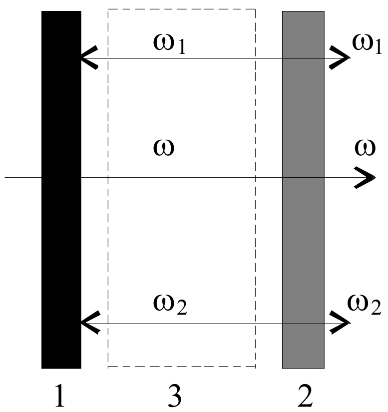


Рис. 3.2. Простейший параметрический генератор света: 1 – зеркало, непрозрачное для волн с частотами $\omega_{1,2}$; 2 – зеркало, полупрозрачное для этих волн; 3 – рабочее вещество (нелинейный кристалл)

Важно, что изменением ориентации нелинейного кристалла можно осуществлять *плавную перестройку частоты* в широких пределах. Например, при накачке второй гармоникой ($\lambda = 0{,}53$ мкм) излучения лазера на основе кристалла ниобата лития удается получить когерентный пучок света в диапазоне $\lambda = 0{,}55$–3 мкм.

К. п. д. таких параметрических генераторов света может достигать 40–50 %.

3.4.3. Нелинейная спектроскопия

Нелинейная спектроскопия представляет собой совокупность методов, в которых для исследования строения вещества используются различные нелинейные явления в средах, облучаемых мощными источниками света. Примерами таких явлений могут быть генерация высших и комбинационных гармоник, нелинейное поглощение, самонаведенная прозрачность и др. Методы нелинейной спектроскопии основаны на наблюдении указанных процессов и изучении их зависимости от параметров источника излучения (мощности, частоты, поляризации, направления распространения и т. п.).

Нелинейная спектроскопия использует плавно перестраиваемые по частоте квантовые или параметрические генераторы излучения. Эта наука решает традиционные для спектроскопии задачи, но со значительно большей точностью и разрешением[2], а также новые, свойственные лишь нелинейной спектроскопии. К последним относятся, например, измерения частотных зависимостей нелинейных восприимчивостей вещества.

Нестационарная нелинейная спектроскопия изучает временной отклик квантовой системы на возбуждающие импульсы излучения. К примеру, исследование комбинационного рассеяния импульсов с $\tau \sim 10^{-12}$ с позволяет получить раздельно времена жизни молекул в возбужденном состоянии и времена релаксации, определяющие ширину линии.

3.4.4. Адаптивная оптика

Адаптивная оптика использует явление *обращения волнового фронта* (ОВФ) в нелинейных средах. Последнее, как известно, заключается в изменении направления распространения луча на 180^0 при отражении от *адаптивного зеркала*.

Обратимость лучей света, следующая из уравнений Максвелла, известна давно. Однако обратить световые лучи не удавалось из-за отсутствия устройств, способных выполнять эту операцию в реальном масштабе времени для сложной (произвольной) структуры фронта волны. Эта процедура стала возможной при использовании одного из двух нелинейных явлений: четырехволнового взаимодействия или вынужденного рассеяния света на гиперзвуковых неоднородностях.

---

[2] Относительная ширина оптических резонансов $\sim 10^{-11}$ относится к сверхразрешению.

Иллюстрация функционирования обычного и адаптивного зеркал показана на рис. 3.3. Следует иметь ввиду, что адаптивное зеркало, конечно, не плоское, а объемное.

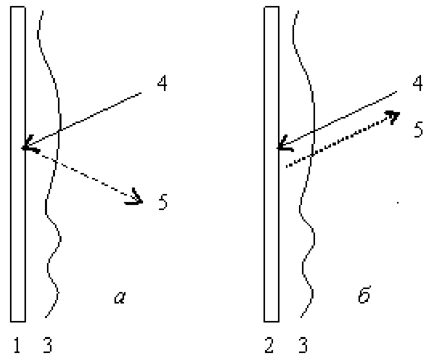


Рис. 3.3. Иллюстрация принципа отражения обычным (а) и адаптивным (б) зеркалами:
1 – обычное зеркало;
2 – адаптивное зеркало;
3 – фронт волны;
4 – падающий луч;
5 – отраженный луч

Благодаря ОВФ стала возможна фокусировка реальными линзами крупноапертурных лазерных пучков в пятно с дифракционными (т. е. порядка λ) размерами, когерентное суммирование пучков света, пришедших по разным траекториям, многокаскадное усиление лазерного излучения и т. п.

На многокаскадном усилении остановимся подробнее. Оно применяется для усиления излучения квантовых генераторов при прохождении излучения через рабочее вещество. Последнее, к сожалению, является неоднородным, содержит случайные включения, которые приводят к искажению плоского фронта излучения. Он подвергается случайной модуляции. Это приводит к уменьшению мощности излучения, среднее значение которого можно рассчитать по формуле

$$\overline{P} = Pe^{-\sigma_\varphi^2},$$

где P – мощность излучения в случае, когда фронт плоский, $\sigma_\varphi^2 = \left(\frac{\omega}{c}\sigma_R\right)^2$ – дисперсия флуктуаций фазы, σ_R^2 – дисперсия флуктуаций фазового пути волны. При $\sigma_\varphi^2 \ll 1$ (фронт почти плоский) $\overline{P} \approx P$, а при $\sigma_\varphi^2 \gg 1$ мощность $\overline{P} \ll P$.

При сильных флуктуациях увеличивать число каскадов не имеет смысла. Это справедливо, если не использовать явление ОВФ. При его использовании каждый луч, отразившись от адаптивного зеркала, пройдет назад точно по той же траектории, что и при прямом распространении. В результате этого происходит *самокоррекция* (причем автоматическая) волнового фронта.

Таким образом, использование явления ОВФ позволяет многократно увеличить излучаемую мощность при сохранении плоского вида фронта волны.

3.4.5. Лазерный управляемый термоядерный синтез

Возможность создания и нагрева плазмы до термоядерных ($\sim 10^8$ K) температур с помощью сфокусированного лазерного излучения была обоснована еще в 1962 г.

Современная технология лазерного управляемого термоядерного синтеза (ЛУТС) основана на всестороннем облучении сферической мишени диаметром $D \sim 0{,}1$–1 мм мощным лазерным импульсом с $P \sim 10^{13} - 10^{14}$ Вт и $\tau \sim 10^{-9}$ с (энергия в импульсе $W \sim 10^4 - 10^5$ Дж). При этом плотность потока энергии на поверхности мишени $q \sim 10^{18} - 10^{20}$ Вт/м^2. Под действием импульса мишень должна сильно сжиматься до плотностей $\rho \sim 10^6$ кг/м^3 и нагреваться до $T \sim 10^8$ K. Расчет показывает, что при $W \sim 10^5 - 10^6$ Дж получаемая при ЛУТС мощность будет в 10–10^3 раза больше затрачиваемой. Одна из самых мощных лазерных систем «Нова-новетта» имеет суммарную энергию импульсов $\sim 10^5$ Дж при $\tau \approx 0{,}3$ нс ($P \approx 3 \cdot 10^{14}$ Вт, $q \approx 3 \cdot 10^{22}$ Вт/м^2). Такие параметры лазера, в принципе, позволяют осуществить ЛУТС.

При ЛУТС возникнут, пожалуй, самые сильные нелинейные эффекты в соответствующем диапазоне электромагнитных волн.

3.4.6. Другие применения нелинейных явлений

Эффект самопросветления световых полей. При введении в резонатор резонансно поглощающей среды в сильных лазерных полях она просветляется и быстро возвращается в исходное состояние за счет безызлучательной релаксации электронного возбуждения. Это явление позволило практически реализовать лазер на основе *самопросветляющейся* среды, генерирующий импульсы с $\tau \sim 1$ пс.

Квантовая метрология. За счет использования нелинейных процессов удается достичь ширины линии поглощения атомами и молекулами $\Delta f \sim 10^3$ Гц, а значит, относительной нестабильности частоты излучения $\sim 10^{-13}$–10^{-12}. Поэтому лазер является наиболее *монохроматическим* источником излучения во всем электромагнитном диапазоне волн. Благодаря этому свойству он оказывается незаменимым инструментом в метрологии.

Преобразование сигналов и изображений. Оно основано на эффекте генерации гармоник на комбинационной частоте. Таким образом можно осуществить *гетеродинирование* или, напротив, *перенос спектра* по частоте вверх на основе соотношения $\omega = \pm\omega_i + \omega_c$, где ω_i, ω_c – частоты волн накачки и сигнала. Так осуществляется преобразование сигналов инфракрасного или далекого ультрафиолетового диапазонов в видимое изображение. Описанная методика используется, например, в инфракрасной астрономии.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите применения нелинейных явлений в квантовой радиофизике.

2. Запишите и объясните физический смысл условий пространственно-временного синхронизма.

3. Нарисуйте схему и опишите принцип работы параметрических генераторов света.

4. В чем заключаются главные достоинства параметрических генераторов света?

5. Что представляет собой нелинейная спектроскопия?

6. Что представляет собой адаптивная оптика?

7. Опишите особенности лазерного термоядерного синтеза.

3.5. Основные результаты

1. К нелинейным явлениям в квантовой радиофизике приводят следующие механизмы: тепловой, стрикционный, атомный и релятивистский. Вакуумный механизм в ближайшей перспективе реализован быть не может. Важно, что $E_t \ll E_s \ll E_a \ll E_r \ll E_v$.

2. Генерация второй гармоники – основной классический нелинейный эффект квантовой радиофизики.

К классическим эффектам также можно отнести самофокусировку (самодефокусировку) лазерного пучка.

3. Нелинейные явления широко используются для генерации оптических гармоник, параметрической генерации излучения, в нелинейной спектроскопии и адаптивной оптике, в квантовой метрологии, а также при решении других сложных задач.

РАЗДЕЛ 4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПЛАЗМЕННОЙ РАДИОФИЗИКЕ

... Наиболее «богатой» относительно различных нелинейных проблем средой оказалась плазма[1].

В этом разделе рассматриваются основные параметры плазмы, механизмы нелинейности, а также эффекты, возникающие при распространении сильных электромагнитных волн в плазме [4].

4.1. Общие сведения о плазме

Плазмой называется *квазинейтральный ионизированный газ*. Плазма представляет собой *четвертое* и *основное* состояние вещества. Практически вся Вселенная заполнена плазмой. Плазма – смесь из электронов, ионов и нейтральных частиц (нейтралов).

Важнейшее свойство плазмы состоит в *коллективном характере* процессов.

Термин «плазма» ввели в физику в 1929 г. И. Ленгмюр и Л. Тонкс, которые проводили исследования газоразрядной плазмы.

Основы *кинетического описания* плазмы заложили Л. Д. Ландау и А. А. Власов в 1930–1940-е гг.

В 1942 г. Х. Альфвен предложил систему уравнений *магнитной гидродинамики* (*МГД*).

[1] См.: Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. – М. : Наука, 1988. – 368 с.

Интерес к исследованию плазмы резко возрос после Второй мировой войны в связи с появлением ядерного оружия и ракетно-космической техники, а также в связи с постановкой задачи и попытками решить проблему управляемого термоядерного синтеза.

Уже в 1950-е гг. стало ясно, что большинство эффектов в плазме являются *нелинейными*.

Теоретические и экспериментальные исследования взаимодействия сильных электромагнитных полей с лабораторной плазмой были вызваны предложением В. И. Векслера осуществить *радиационное ускорение* сгустков плазмы (1956 г.).

Вскоре было открыто *аномальное поглощение* волн в плазме, сопровождающееся ее эффективным нагревом, самовоздействием волн, генерацией неустойчивостей и т. д. Данные процессы носили *пороговый характер*.

В последние годы нелинейное взаимодействие сильных электромагнитных волн с плазмой интенсивно исследовалось [4].

4.1.1 Методы теоретического описания плазмы

Известны три основных метода описания плазмы.

Элементарное описание. Рассматривается движение отдельных частиц, причем частицы данного сорта (электроны, ионы и нейтралы) идентичны, т. е. имеют одинаковую скорость и другие параметры движения. Такое описание наиболее простое, хотя и не строгое. Именно оно используется ниже. Его целесообразно применять при описании достаточно разреженной плазмы.

МГД описание. Справедливо при изучении достаточно плотной плазмы. Плазма при этом рассматривается как сплошная среда, в которой протекают токи. Такое описание также является приближенным.

Кинетическое описание – наиболее строгое. Основано на изучении функции распределения частиц по скоростям. Ее находят из кинетического уравнения Больцмана.

4.1.2. Основные параметры плазмы

Поскольку плазма – это газ, хотя и ионизированный, то в ней действуют *термодинамические* процессы, характерные для газа. Наличие заряженных частиц приводит к *электродинамическим* процессам.

Плазму характеризуют температурой T_e, T_i и T_n, а также тепловой скоростью ее частиц:

$$v_{Te} = \sqrt{\frac{kT_e}{m}}, \qquad v_{Ti} = \sqrt{\frac{kT_i}{m_i}}, \qquad v_{Tn} = \sqrt{\frac{kT_n}{m_n}}.$$

Кроме этих скоростей, вводится также скорость ионного звука, который существует при $T_e \gg T_i$,

$$v_s = \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}}.$$

Здесь k – постоянная Больцмана; m, m_i и m_n – массы частиц.

При движении частицы сталкиваются между собой, число соударений в единицу времени:

$$\nu_e = \nu_{ee} + \nu_{ei} + \nu_{en},$$
$$\nu_i = \nu_{ii} + \nu_{ie} + \nu_{in},$$
$$\nu_n = \nu_{nn} + \nu_{ne} + \nu_{ni},$$

где индексы указывают на сорт сталкивающихся частиц. Длины свободного пробега частиц:

$$l_e = v_{T_e} / \nu_e, \qquad l_i = v_{T_i} / \nu_i, \qquad l_n = v_{T_n} / \nu_n.$$

Главный параметр плазмы – концентрация заряженных частиц $N = N_e$. В силу квазинейтральности $N + N^- \approx N^+$, где N^-, N^+ – концентрация отрицательных и положительных ионов. Свойства плазмы существенно зависят от степени ионизации:

$$S_i = \frac{N}{N + N_n},$$

где N_n – концентрация нейтралов. При $N \ll N_n$, величина $S_i \ll 1$, т. е. плазма является слабо ионизированной. Если же $N \gg N_n$, то $S_i \approx 1$ и плазму называют сильно ионизированной. В этом случае обычно $N^- \approx 0$ и $N \approx N^+$. Ионы будем считать однозарядными.

Кроме перечисленных, плазма характеризуется и другими параметрами.

Добавим, что температура лабораторной плазмы изменяется от $\sim 10^3$ K (плазменные электронные приборы) до $\sim 10^8$ K (плазма ядерного взрыва). В то же время N варьируется от $\sim 10^{20}$ м$^{-3}$ (МГД-генераторы, токомаки, плазменные электронные приборы) до $\sim 10^{28}$ – 10^{30} м$^{-3}$ (полупроводниковая плазма, плазма металлов, плазма ядерного взрыва).

4.1.3. Плазменная частота

Любое возмущение плазмы приводит к колебаниям на собственной частоте, получившей название *плазменной*, или *ленгмюровской*. Получим для нее выражение.

Возмущение вызывает появление *поля разделения заряда* $\vec{E}$, под действием которого электрон движется со скоростью $\vec{v}$. Уравнение движения электрона имеет вид:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}, \tag{4.1.1}$$

где, как обычно, m, e – масса и заряд электрона. Для линейных колебаний

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\,\vec{v}}{\partial\,t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} \approx \frac{\partial\,\vec{v}}{\partial\,t},$$

тогда из (4.1.1)

$$\frac{\partial\,\vec{v}}{\partial\,t} \approx \frac{e}{m}\vec{E}. \tag{4.1.2}$$

Для поля $\vec{E}$ справедлива теорема Гаусса:

$$\oint\limits_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \tag{4.1.3}$$

где $\vec{S}$ – замкнутая поверхность, окружающая полный заряд Q, ε_0 –электрическая постоянная. Полный заряд находится из уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial\,Q}{\partial\,t} = -\oint \vec{j}d\vec{S}, \tag{4.1.4}$$

где

$$\vec{j} = eN\vec{v} \tag{4.1.5}$$

есть плотность тока, обусловленного движением электронов (массивные ионы считаем неподвижными).

Система уравнений (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4) и (4.1.5) является замкнутой и позволяет вычислить $\vec{v}$, Q, $\vec{j}$ и $\vec{E}$. Получим уравнение для Q, исключив $\vec{v}$, $\vec{j}$ и $\vec{E}$. Для этого продифференцируем (4.1.4) по времени:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\,t^2} = -\oint \frac{\partial\,\vec{j}}{\partial\,t}d\vec{S}. \tag{4.1.6}$$

Из (4.1.5), (4.1.2) имеем:

$$\frac{\partial\,\vec{j}}{\partial\,t} = eN\frac{\partial\,\vec{v}}{\partial\,t} = \frac{e^2N}{m}\vec{E}. \tag{4.1.7}$$

Подставим (4.1.7) в (4.1.6):

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = -\frac{e^2 N}{m} \oint \vec{E} d\vec{S} \,. \tag{4.1.8}$$

С учетом (4.1.3) из (4.1.8) получаем:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} Q = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \omega_p^2 Q = 0 \,, \tag{4.1.9}$$

где

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}} \tag{4.1.10}$$

есть плазменная частота электронов. Как известно, уравнение вида (4.1.9) описывает колебания. Под действием произвольного возмущения в плазме возникают колебания полного заряда Q, а вместе с ним и $\vec{v}$, $\vec{j}$ и $\vec{E}$.

По аналогии с ω_p вводится плазменная частота ионов:

$$\omega_{pi} = \sqrt{\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m_i}} \,.$$

Так как $m_i \gg m$, то $\omega_{pi} \ll \omega_p$.

4.1.4. Диэлектрическая проницаемость холодной изотропной плазмы

Под *холодной плазмой* понимается среда, для которой можно пренебречь тепловым движением частиц, т. е. считать, что $T_{e,i,n} \to 0$. *Изотропность* плазмы обеспечивается отсутствием внешних магнитных полей. Свойства плазмы при этом во всех направлениях одинаковы.

Предположим, что в плазме распространяется монохроматическая волна с частотой ω вида:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t} \,.$$

Она вызывает движение электронов, которое описывается уравнением:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m}\Big(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]\Big) - \nu\vec{v} \,, \tag{4.1.11}$$

где ν – частота соударений электронов (индекс для простоты опущен), $\vec{B}$ – индукция магнитного поля волны. В нерелятивистском приближении $\left|\left[\vec{v}\vec{B}\right]\right| \ll \left|\vec{E}\right|$, и уравнение (4.1.11) примет вид:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m}\vec{E} - \nu\vec{v}\,. \tag{4.1.12}$$

С учетом того что в линейном приближении для периодического движения электрона

$$\frac{d}{dt} \approx \frac{\partial}{\partial t} = i\omega\,,$$

из (4.1.12) получим

$$\vec{v} = \frac{e}{m(i\omega + \nu)}\vec{E}\,.$$

Тогда

$$\vec{j} = eN\vec{v} = \frac{e^2 N}{m(i\omega + \nu)}\vec{E}\,. \tag{4.1.13}$$

Уравнение (4.1.13) представляет собой закон Ома в дифференциальной форме, из которого следует выражение для проводимости плазмы:

$$\sigma = \frac{e^2 N}{m(i\omega + \nu)}\,. \tag{4.1.14}$$

Так как полный ток определяется током смещения и током проводимости,

$$\frac{\partial\,\vec{D}}{\partial\,t} = \frac{\partial\varepsilon_0\vec{E}}{\partial\,t} + \vec{j}$$

или для гармонических процессов

$$i\omega\vec{D} = i\omega\varepsilon_0\vec{E} + \vec{j}\,.$$

Отсюда

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \frac{\vec{j}}{i\omega} = \left(\varepsilon_0 + \frac{\sigma}{i\omega}\right)\vec{E}\,.$$

Поскольку

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\,,$$

$$\varepsilon = 1 + \frac{\sigma}{i\omega\varepsilon_0}\,. \tag{4.1.15}$$

Подставляя (4.1.14) в (4.1.15), получим

$$\varepsilon = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m i\omega(i\omega + \nu)}$$

или

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\nu)}, \qquad (4.1.16)$$

где ω_p дается формулой (4.1.10).

Важно, что ε – функция комплексная. Это обусловлено соударениями электронов, в результате чего волна поглощается. При $\nu = 0$

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \qquad (4.1.17)$$

Проанализируем выражение (4.1.17). При $\omega = \omega_p$ относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 0$. Так как волновое число $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}$, то при $\omega = \omega_p$ имеем $k = 0$. Это означает, что наступает отражение волны.

В области, где $\varepsilon > 0$, т. е. $\omega > \omega_p$, волна распространяется (k – величина действительная). При $\omega \to \infty$ имеем $\varepsilon \to 1$. Таким образом, при достаточно высоких частотах электроны становятся инерционными и плазма ведет себя, как вакуум.

В области, где $\omega < \omega_p$ или $\varepsilon < 0$, волна распространяется не может (рис. 4.1).

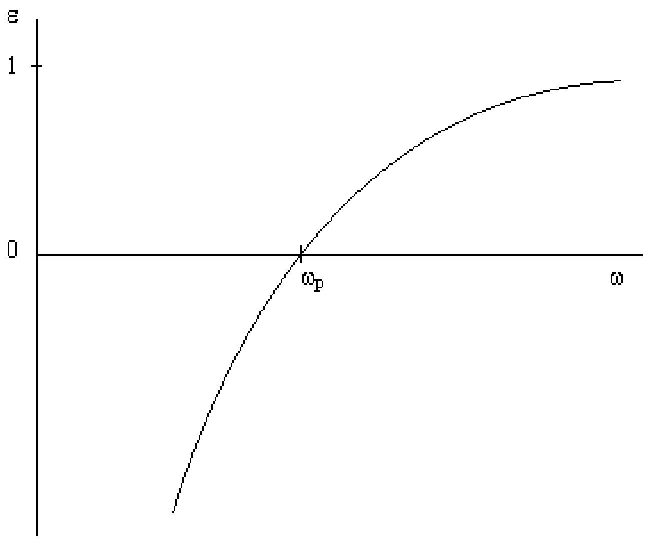


Рис. 4.1. Зависимость диэлектрической проницаемости изотропной плазмы без потерь от частоты волны

4.1.5. Показатели преломления и поглощения волн

Преобразуем (4.1.16) к следующему виду:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} - i\frac{\omega_p^2 \nu}{\omega(\omega^2 + \nu^2)}. \qquad (4.1.18)$$

Введем комплексный показатель преломления

$$\tilde{n} = n - i\kappa,$$

причем $\tilde{n}^2 = \varepsilon$. Тогда

$$\varepsilon = (n - i\kappa)^2 = n^2 - \kappa^2 - 2in\kappa. \qquad (4.1.19)$$

Сравнивая (4.1.18) и (4.1.19), получим

$$n^2 - \kappa^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2},$$

$$2n\kappa = \frac{\omega_p^2 \nu}{\omega(\omega^2 + \nu^2)}.$$

Данная система имеет точное аналитическое решение, которое является громоздким. Поэтому далее приведем приближенное решение, справедливое при $n^2 \gg \kappa^2$, т. е. вдали от области отражения волны:

$$n^2 \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}, \qquad (4.1.20)$$

$$\kappa = \frac{\omega_p^2 \nu}{2n\omega(\omega^2 + \nu^2)}. \qquad (4.1.21)$$

Если к тому же $n \approx 1$, то из (4.1.21) имеем

$$\kappa = \frac{\omega_p^2 \nu}{2\omega(\omega^2 + \nu^2)}. \qquad (4.1.22)$$

Зависимость $\kappa(\nu)$ приведена на рис. 4.2.

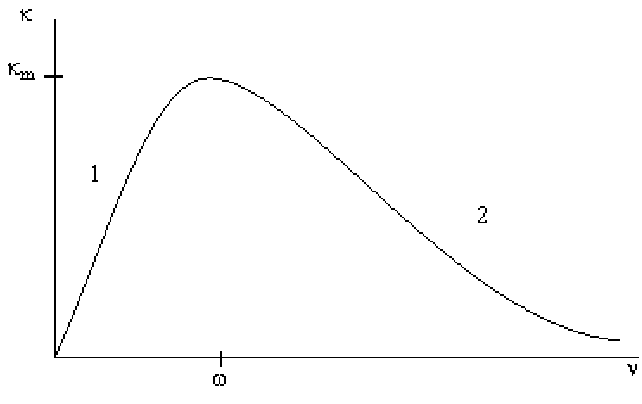


Рис. 4.2. Зависимость показателя поглощения волны от ν: при $\nu \ll \omega$ показатель преломления $\kappa \sim \nu$ (участок 1), при $\nu \gg \omega$ показатель преломления $\kappa \sim \nu^{-1}$ (участок 2), при $\nu = \omega$ величина κ достигает максимального значения $\kappa_m = \omega_p^2 / 4\omega^2$

4.1.6. Влияние внешнего магнитного поля

В магнитном поле с индукцией $\vec{B}_0$ под действием силы Лоренца движущаяся заряженная частица вращается вокруг силовой линии с частотой, называемой *гироскопической* (кратко *гиро*-) *частотой* электронов ω_B или ионов ω_{Bi}.

Получим выражение для ω_B. При движении по окружности сила Лоренца сообщает электрону центростремительное ускорение $v_\perp^2 / R$, т. е.

$$ev_\perp B_0 = \frac{mv_\perp^2}{R_B},$$

где $v_\perp$ – перпендикулярная к $\vec{B}_0$ составляющая скорости, R_B – *гирорадиус* электронов. Отсюда

$$v_\perp = \frac{eB_0}{m} R_B.$$

Тогда

$$\omega_B = \frac{eB_0}{m}. \tag{4.1.23}$$

Аналогично вводятся выражения для ω_{Bi} и гирорадиуса ионов:

$$\omega_{Bi} = \frac{eB_0}{m_i}, \quad R_{Bi} = \frac{v_{\perp i}}{\omega_{Bi}},$$

где $v_{\perp i}$ – перпендикулярная к $\vec{B}_0$ составляющая скорости ионов.

В магнитном поле заряженные частицы в общем случае движутся по спирали, «навиваясь» на вектор $\vec{B}_0$. Поэтому $\vec{v}$ и $\vec{j}$ уже не параллельны вектору электрического поля волны $\vec{E}$. Это означает, что $\hat{\sigma}$ является тензором, т. е. закон Ома приобретает следующий вид:

$$\vec{j} = \hat{\sigma}\vec{E}.$$

Тогда относительная диэлектрическая проницаемость также есть тензор:

$$\hat{\varepsilon} = \hat{I} + \frac{\hat{\sigma}}{i\omega\varepsilon_0},$$

где

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Схема нахождения $\hat{\varepsilon}$ такая же, как и в изотропном случае. Направляя $\vec{B}_0$ по оси z, получим, что

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \qquad (4.1.24)$$

где

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2}, \qquad \varepsilon_{xy} = i\frac{\omega_p^2\omega_B}{\omega(\omega^2 - \omega_B^2)}, \qquad \varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \qquad (4.1.25)$$

Из (4.1.25) видно, что компонента ε_{zz} имеет вид ε для изотропной среды (4.1.17). Этот результат – следствие того, что сила Лоренца вдоль оси z равна нулю. Важно, что ε_{xy} и $\varepsilon_{yx} = -\varepsilon_{xy}$ – комплексные, хотя среда рассматривается *без диссипации*. Это вызвано *гиротропией* среды. В данном случае поглощение волны отсутствует.

Очевидно, что при $\omega_B = 0$ тензор (4.1.24) переходит в скаляр (4.1.17).

4.1.7. Двойное лучепреломление

Наличие $\vec{B}_0$ приводит к *двойному лучепреломлению*. Электромагнитная волна может распространяться в виде *обыкновенной* или *необыкновенной* волн (или же их комбинации). При продольном ($\vec{k} \parallel \vec{B}_0$) распространении

$$\varepsilon_{\text{о,н}} = \varepsilon_{xx} \mp i\varepsilon_{xy}$$

или с учетом (4.1.25)

$$\varepsilon_{\text{о,н}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_B)}. \qquad (4.1.26)$$

Здесь знаки «$\pm$» соответствуют обыкновенной и необыкновенной волнам.

Выражение (4.1.26) приближенно справедливо и при «квазипродольном» распространении. В выражении (4.1.26) следует заменить ω_B на $\omega_L = \omega_B \cos\chi$, где χ – угол между $\vec{k}$ и $\vec{B}_0$.

Как следует из (4.1.26), при $\omega \to \omega_B$ наступает *гирорезонанс*, связанный с тем, что вектор $\vec{E}$ необыкновенной волны и электроны в магнитном поле вращаются в одну сторону с одинаковыми угловыми скоростями, а значит, волна и электрон могут *резонансно* взаимодействовать между собой.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое плазма?
2. Какие методы теоретического описания плазмы Вы знаете? Охарактеризуйте и сравните их.
3. Перечислите основные параметры плазмы.
4. Получите выражение для плазменной частоты электронов.
5. Какую плазму называют холодной? Изотропной? Однородной?
6. Получите выражение для диэлектрической проницаемости холодной изотропной плазмы без потерь.
7. Как изменится выражение для диэлектрической проницаемости холодной изотропной плазмы при учете потерь?
8. Каков физический смысл плазменной частоты электронов?
9. Каково условие отражения электромагнитных волн в холодной изотропной плазме без потерь?
10. Получите выражения для показателей преломления и поглощения электромагнитных волн в плазме.
11. Дайте физическое истолкование зависимости показателя поглощения от частоты соударений.
12. К чему приводит наличие внешнего магнитного поля в плазме?
13. Что такое гироскопическая частота электронов?
14. Получите выражение для гироскопической частоты электронов.
15. Приведите и прокомментируйте выражения для тензора диэлектрической проницаемости плазмы.

4.2. Механизмы нелинейных явлений в плазме

Дадим характеристику основных механизмов нелинейности и сравним их [4].

4.2.1. Тепловой (нагревный) механизм

Данный механизм возникает в плазме с соударениями, благодаря которым происходит *трансформация* направленной скорости электронов $\vec{v}$ в тепловую или хаотическую v_T. В результате этого возникает *нагрев* электронов. Последние весьма медленно отдают свою энергию при столкновении с тяжелыми частицами. Так, при упругих соударениях относительная доля энергии, теряемая электроном при одном столкновении, в среднем равна

$$\delta = 2\frac{m}{m_i} \sim 10^{-4} - 10^{-3}. \qquad (4.2.1)$$

Выделим единичный объем плазмы и рассмотрим баланс энергий. С одной стороны, волна в соответствии с законом Джоуля–Ленца передает электронам в единицу времени энергию, равную

$$P_{\text{Дж}} = \vec{j}\vec{E}.$$

С другой стороны, электроны, сталкиваясь, за то же время отдают ионам и нейтралам энергию:

$$P_{\text{ст}} = \delta\nu N\left(\frac{3}{2}kT_e - \frac{3}{2}kT_{e0}\right).$$

Здесь T_e и T_{e0} – температура электронов при наличии волны и в ее отсутствие. С учетом сказанного *уравнение баланса* энергии электронов примет вид:

$$N\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}kT_e\right) = P_{\text{Дж}} - P_{\text{ст}}, \qquad (4.2.2)$$

куда следовало бы включить член, описывающий *теплопроводность* электронов. Последняя несущественна для достаточно больших объемов плазмы, находящихся в однородном электрическом поле, т. е. для которых амплитуда $E_0 \neq E_0(\vec{r})$.

Вычислим далее $P_{\text{Дж}}$ для

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0\cos\omega t. \qquad (4.2.3)$$

Из уравнения движения электронов

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m}\vec{E}(t) - \nu\vec{v}$$

с учетом (4.2.3) при $\nu \neq \nu(t)$ для *осцилляторной скорости* получаем следующее выражение:

$$\vec{v} = \frac{e\vec{E}_0}{m(\omega^2+\nu^2)}(\omega\sin\omega t + \nu\cos\omega t). \qquad (4.2.4)$$

Тогда

$$P_{\text{Дж}} = \vec{j}\vec{E} = eN\vec{v}\vec{E} = \frac{e^2N}{m(\omega^2+\nu^2)}E_0^2\left(\omega\sin\omega t\cos\omega t + \nu\cos^2\omega t\right). \quad (4.2.5)$$

Усредняя (4.2.5) по времени, равному периоду колебания, получим выражение для средней мощности Джоуля–Ленца:

$$\overline{P}_{\text{Дж}} = \frac{1}{2}\frac{e^2 N}{m(\omega^2+\nu^2)}E_0^2 \equiv \frac{1}{2}\sigma E_0^2. \tag{4.2.6}$$

Как следует из (4.2.2), в стационарном случае $\overline{P}_{Дж} = P_{\text{ст}}$, т. е.

$$\frac{1}{2}\frac{e^2 N}{m(\omega^2+\nu^2)}E_0^2 = \frac{3}{2}kT_{e0}\delta\nu N\left(\frac{T_e}{T_{e0}} - 1\right).$$

Отсюда

$$\frac{T_e}{T_{e0}} = 1 + \frac{E_0^2}{E_p^2}, \tag{4.2.7}$$

где

$$E_p^2 = \frac{3kT_{e0}m\delta(\omega^2+\nu^2)}{e^2}. \tag{4.2.8}$$

Здесь E_p – *плазменное поле*. Из (4.2.7) видно, что при $E_0 = E_p$ возмущенная температура $T_e = 2T_{e0}$.

Таким образом, плазменное поле является тем характерным полем, которое определяет величину нагрева электронов плазмы.

4.2.2. Стрикционный механизм

Из выражения (4.2.4) следует, что в среднем за период поля $\overline{\vec{v}} = 0$. Вычислим

$$\overline{\vec{v}^2} = \overline{v^2} = \frac{e^2E_0^2}{m^2(\omega^2+\nu^2)^2}(\omega^2\overline{\sin^2\omega t} + 2\omega\nu\overline{\sin\omega t\cos\omega t} + \nu^2\overline{\cos^2\omega t}) =$$

$$= \frac{e^2E_0^2}{2m^2(\omega^2+\nu^2)}.$$

Оказалось, что $\overline{v^2} \neq 0$. Это означает, что под действием поля электрон в среднем приобретает кинетическую энергию

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{e^2E_0^2}{4m(\omega^2+\nu^2)}. \tag{4.2.9}$$

Электрон как бы находится в потенциальном поле с потенциалом φ. Тогда

$$e\varphi = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{e^2E_0^2}{4m(\omega^2+\nu^2)}.$$

В таком поле электроны описываются распределением Больцмана:

$$N = N_0\exp\left\{-\frac{e\varphi}{kT_{e0}}\right\} = N_0\exp\left\{-\frac{E_0^2}{E_s^2}\right\}, \tag{4.2.10}$$

где

$$E_s^2 = \frac{4kT_{e0}m(\omega^2 + \nu^2)}{e^2}. \qquad (4.2.11)$$

Здесь E_s – *стрикционное поле*, $N_0 = N|_{E_0=0}$.

В потенциальном поле на электрон действует сила

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\ e\varphi = -\frac{e^2}{4m(\omega^2 + \nu^2)}\mathrm{grad}\ E_0^2.$$

Она отлична от нуля при

$$\mathrm{grad}\ E_0^2 \neq 0,$$

т. е. при $E_0 = E_0(\vec{r})$.

Следовательно, в неоднородном поле (в пучке волн) на электроны действует выталкивающая сила, приводящая в соответствии с (4.2.10) к уменьшению их концентрации. Этот эффект носит название *электрострикции*. Величина N уменьшается в e раз при $E_0 = E_s$ (см. 4.2.10).

4.2.3. Ионизационный механизм

В достаточно сильных полях электрон, приобретая кинетическую энергию (4.2.9), при столкновении с нейтралом способен ионизировать его. Вновь образованный электрон также ускоряется полем и тоже ионизирует частицы. Процесс ионизации протекает *лавинообразно*.

Оценим поле ионизации E_i из условия

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} \geq w_i, \qquad (4.2.12)$$

где w_i – потенциал ионизации атомов или молекул. Обычно $w_i \sim 10$ эВ. Заметная ионизация воздуха электромагнитным полем, однако, наступает уже при средней энергии электрона $\sim$2 эВ за счет наличия быстрых электронов в «хвосте» распределения частиц по скоростям.

Из (4.2.12) с учетом (4.2.9) получаем выражение для поля *ионизации* (или *пробоя*) газа:

$$E_i^2 = \frac{4mw_i(\omega^2 + \nu^2)}{e^2}. \qquad (4.2.13)$$

4.2.4. Релятивистский механизм

С учетом силы Лоренца уравнение движения электрона имеет вид (4.1.11):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m}(\vec{E} + [v\vec{B}]) - \nu\vec{v}\,,$$

где $\vec{B}$ – индукция магнитного поля волны. Так как под действием электрической компоненты поля волны электрон приобретает скорость $v \sim E$, а $B \sim E$, то сила Лоренца оказывается пропорциональной E^2. Найдем выражение для характерного поля в случае релятивистского механизма нелинейности из условия $v = c$, где v – осцилляторная скорость, получаемая из (4.1.11) в пренебрежении силой Лоренца:

$$\vec{v} = \frac{e\vec{E}}{m(i\omega + \nu)}\,.$$

Отсюда ее модуль:

$$v = \frac{eE_0}{m(\omega^2 + \nu^2)^{1/2}}\,.$$

Тогда $v = c$ при $E_0 = E_r$, где

$$E_r^2 = \frac{m^2c^2(\omega^2 + \nu^2)}{e^2}\,. \qquad (4.2.14)$$

4.2.5.Сравнение механизмов

Перепишем еще раз выражения для характерных интенсивностей поля волны (см. (4.2.8), (4.2.11), (4.2.13) и (4.2.14)):

$$E_p^2 = \frac{3kT_{e0}m\delta(\omega^2 + \nu^2)}{e^2}, \qquad (4.2.15)$$

$$E_s^2 = \frac{4kT_{e0}m(\omega^2 + \nu^2)}{e^2}, \qquad (4.2.16)$$

$$E_i^2 = \frac{4mw_i(\omega^2 + \nu^2)}{e^2}, \qquad (4.2.17)$$

$$E_r^2 = \frac{m^2c^2(\omega^2 + \nu^2)}{e^2}\,. \qquad (4.2.18)$$

Из этих выражений видно, что зависимость интенсивности от частоты волны и ν для всех механизмов подобна (строго говоря, здесь ν – возмущенная частота соударений, однако этим пока будем пренебрегать).

Построим отношения:

$$\frac{E_p^2}{E_r^2} = 3\delta \frac{kT_{e0}}{mc^2},$$

$$\frac{E_s^2}{E_r^2} = 4\frac{kT_{e0}}{mc^2},$$

$$\frac{E_i^2}{E_r^2} = 4\frac{w_i}{mc^2}.$$

Так как $kT_{e0} \ll mc^2$, $w_i \ll mc^2$, то

$$E_p \ll E_s \ll E_i \ll E_r.$$

Например, при $T_{e0} = 300$ K, $\delta = 10^{-4}$, $w_i = 10$ эВ $\approx 1{,}6\cdot10^{-18}$ Дж, $mc^2 \approx 10^{-13}$ Дж имеем:

$$E_p : E_s : E_i : E_r = 4\cdot10^{-6} : 4\cdot10^{-4} : 8\cdot10^{-3} : 1.$$

Величина $E_r \sim 10^7$ В/м при $\omega \gg \nu$, $f = 10^9$ Гц. Это очень большое значение напряженности поля для электромагнитных волн радиодиапазона. Для достижения полей $\sim 10^7$ В / м необходима мощность генератора $\sim 10^{10} - 10^{12}$ Вт. Поэтому для практики представляют интерес тепловой, стрикционный и ионизационный механизмы нелинейности.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите механизмы нелинейных явлений в плазменной радиофизике.
2. Опишите тепловой (нагревный) механизм нелинейности в плазменной радиофизике.
3. Опишите стрикционный механизм нелинейности в плазменной радиофизике.
4. Опишите ионизационный механизм нелинейности в плазменной радиофизике.
5. Опишите релятивистский механизм нелинейности в плазменной радиофизике.
6. Сравните механизмы нелинейных явлений в плазменной радиофизике.
7. Все ли механизмы нелинейных явлений в плазменной радиофизике реализуются на практике?

4.3. Уравнение баланса энергии и концентрации частиц

Уравнение баланса для физического параметра w (концентрации, энергии частиц и т. п.) имеет вид:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_w = q_{\text{о}} - q_{\text{п}}, \qquad (4.3.1)$$

где $\vec{j}_w$– плотность потока параметра w; $q_{\text{о}}$, $q_{\text{п}}$ – скорости его образования и потерь.

Сначала рассмотрим уравнение баланса энергии электронов в единице объема. При этом

$$w = \frac{3}{2} k T_e, \quad q_{\text{о}} = \frac{P_{\text{Дж}}}{N}, \quad q_{\text{п}} = \frac{P_{\text{ст}}}{N}, \quad \vec{j}_w = -\widehat{\kappa_{\mathring{a}}} \nabla T_e,$$

где $\widehat{\kappa_{\mathring{a}}}$ – тензор, описывающий температуропроводность электронов. С учетом этого уравнение баланса электронов примет вид (см. также (4.2.2)):

$$N \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2} k T_{\mathring{a}}\right) = \vec{E} \hat{\sigma} \vec{E} - \frac{3}{2} k \delta \nu N (T_e - T_{e0}) + \nabla(\hat{\kappa}_{\mathring{a}} \nabla T_e). \qquad (4.3.2)$$

Для энергий ионов и нейтралов можно записать подобные уравнения, при этом следует учесть, что тяжелые частицы нагреваются при столкновении с электронами.

Уравнения для N, N^+ и N^- также имеют вид (4.3.1). Если $N^- \approx 0$, а $N \approx N^+$, уравнение баланса для N представляется следующим образом:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = q_e + q_i - q_a - q_r - \operatorname{div} \vec{j}_N, \qquad (4.3.3)$$

где q_e – скорость образования электронов внешним источником, $q_i = \nu_i N$ – скорость образования электронов полем волны, q_a, q_r – скорости исчезновения электронов за счет их прилипания и рекомбинации, причем

$$q_a = \beta_a N_n N, \qquad q_r = \alpha_r N N^+ \approx \alpha_r N^2, \qquad (4.3.4)$$

β_a, α_r – коэффициенты прилипания и рекомбинации, $\vec{j}_N = \vec{j}_{ND} + \vec{j}_{NT}$– плотность потока частиц, $\vec{j}_{ND}$, $\vec{j}_{NT}$– плотности потока частиц за счет диффузии и термодиффузии, т. е.

$$\vec{j}_{ND} = -\widehat{D} \nabla N,$$
$$\vec{j}_{NT} = -\widehat{D}_T \nabla N_e.$$

Здесь $\widehat{D}$, $\widehat{D}_T$ – тензоры диффузии и термодиффузии. С учетом этого уравнение (4.3.3) принимает вид:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = q_e + \nu_i N - \beta_a N_n N - \alpha_r N^2 + \nabla \widehat{D} \nabla N + \nabla \widehat{D}_T \nabla T_e. \qquad (4.3.5)$$

К (4.3.2), (4.3.5) следует добавить начальные и граничные условия, а также волновое уравнение (или его приближенные аналоги).

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите уравнение баланса энергии электронов в плазме и опишите физический смысл членов в уравнении.

2. Приведите уравнение баланса концентрации электронов в плазме и опишите физический смысл членов в уравнении.

4.4. Возмущение концентрации электронов

4.4.1. Прилипание и рекомбинация электронов

Нагрев электронов полем волны вызывает изменение $\beta_a(T_e)$ и $\alpha_r(T_e)$. Это приводит к возмущению N. В слабых полях, когда $E_0 \ll E_i$, имеем $\nu_i = 0$. Для однородного поля процессы диффузии и термодиффузии несущественны. Тогда (4.3.5) примет вид:

$$\frac{dN}{dt} = q_e - \beta_a N_n N - \alpha_r N^2,\; N(0) = N_0. \qquad (4.3.6)$$

Уравнение (4.3.6) допускает аналитическое решение. Например, в стационарном случае ($d/dt = 0$) имеем:

$$q_e - \beta_a N_n N - \alpha_r N^2 = 0, \qquad (4.3.7)$$

где $\beta_a = \beta_a(T_{e\infty})$, $\alpha_r = \alpha_r(T_{e\infty})$; $T_{e\infty}$ – стационарное значение T_e (важно, что время становления T_e всегда намного меньше времени становления N). Тогда из (4.3.7) следует

$$N_\infty \approx q_e / \beta_a N_n, \qquad \alpha_r N_\infty \ll \beta_a,$$

$$N_\infty \approx (q_e / \alpha_r)^{1/2}, \qquad \alpha_r N_\infty \gg \beta_a.$$

4.4.2. Ионизация газа электрическим полем

Пусть $q_e \ll q_i$ и процессами переноса можно пренебречь. Тогда из (4.3.5) получаем, что

$$\frac{dN}{dt} = \nu_i N - \beta_a N_n N - \alpha_r N^2, \qquad N(0) = N_0. \qquad (4.3.8)$$

В несамосогласованной постановке задачи поле E_0 задано, а $\nu_i = \nu_i(E_0) = \mathrm{const}$. При $\alpha_r N \ll \nu_i - \beta_a N_n$ имеем:

$$\frac{dN}{dt} \approx (\nu_i - \beta_a N_n) N ,$$

$$N(t) = N_0 \exp\{(\nu_i - \beta_r N_n) t\} .$$

Если $\nu_i > \beta_a N_n$, то $N(t)$ вначале нарастает по экспоненциальному закону, т. е. возникает пробой газа. Это происходит при $E_0 \geq E_i$.

При больших временах $\alpha_r N$ растет быстрее, чем другие члены в уравнении (4.3.8), и наступает стабилизация пробоя. При $d/dt = 0$ имеем:

$$N_\infty = (\nu_i - \beta_r N_n)/\alpha_r .$$

Зависимость $N(t)$ при пробое показана на рис. 4.3.

4.4.3. Нарушение гидростатического равновесия

Нагрев частиц плазмы приводит к ее диффузии и термодиффузии. Оба процесса связаны с изменением давления в плазме:

$$p = p_e + p_i = NkT_e + NkT_i .$$

В невозмущенных условиях

$$p = N_0 kT_{e0} + N_0 kT_{i0} .$$

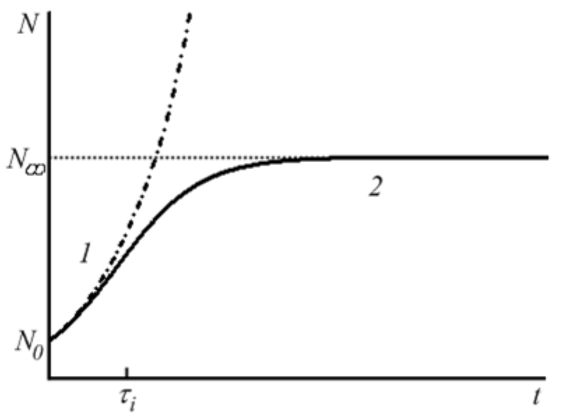


Рис. 4.3. Зависимость N от времени при пробое газа:
участок 1 – $N \sim \exp(t/\tau_i)$, $t \leq \tau_i = (\nu_i - \beta_a N_n)^{-1}$;
участок 2 – $N \approx N_\infty$, $t \gg \tau_i$

В стационарном случае $p = p_0$, т. е.

$$N_\infty k(T_{e\infty} + T_{i\infty}) = N_0 k(T_{e0} + T_{i0}) .$$

Отсюда

$$N_\infty = N_0 \frac{T_{e0} + T_{i0}}{T_{e\infty} + T_{i\infty}} .$$

Нагрев частиц плазмы при этом приводит к уменьшению ее концентрации ($N < N_0$).

Вопросы для самоконтроля

1. Опишите процесс прилипания электронов. Составьте соответствующее уравнение баланса концентрации электронов.

2. Опишите процесс рекомбинации электронов. Составьте соответствующее уравнение баланса концентрации электронов.

3. Опишите процесс ионизации газа электрическим полем. Составьте соответствующее уравнение баланса концентрации электронов.

4. К чему приводит нарушение гидростатического равновесия в плазме?

Задачи

1. Амплитуда поля электромагнитной волны в 10 раз превосходит плазменное поле. Во сколько раз изменилась температура электронов в слабо- и сильноионизированной плазме?

2. Под действием мощной электромагнитной волны температура электронов увеличилась вдвое. Во сколько раз изменился коэффициент прилипания $\beta_a = \beta_{a0} T_e / T_{e0}$ и концентрация электронов N?

3. Амплитуда поля электромагнитной волны в 2 раза превышает стрикционное поле E_s. Во сколько раз изменилась концентрация электронов N?

4. Под действием мощной электромагнитной T_e увеличилась вдвое, а T_i осталась неизменной. Во сколько раз изменилась N в результате процессов переноса (диффузии и термодиффузии)? Дано, что $T_{e0} = T_{i0}$.

5. Пробой плазмы описывается следующим уравнением баланса:

$$\frac{dN}{dt} = q_i - \alpha_r N^2,$$

где $q_i = \nu_i N$, $\nu_i = 10^9$ с$^{-1}$, $\alpha_r = 10^{-13}$ м^{3}с$^{-1}$, $N_0 = 10^8$ м$^{-3}$.

а) Найти стационарное решение уравнения баланса и вычислить N_∞.

б) Найти время становления N.

в) Найти нестационарное решение уравнения баланса. Построить график и проанализировать решение.

г) Изучить процесс релаксации N после выключения поля.

6. Процесс прилипания эффективно идет при тройных столкновениях электрона с двумя молекулами воздуха. Получить дифференциальное уравнение, описывающее изменение концентрации электронов N во времени. Учесть процессы образования электронов и их прилипание. Найти стационарное и нестационарное решения уравнения баланса, а также время становления N.

7. По результатам задачи 6 вычислить относительное изменение N и t_N для земной атмосферы на следующих высотах:

а) $z = 0$ км, $N_n = 3 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$, $\beta = 10^{42}$ м^{6}с$^{-1}$, $q = 10^3$ м$^{-3}$с$^{-1}$,

б) $z = 30$ км, $N_n = 3 \cdot 10^{23}$ м$^{-3}$, $q = 10^3$ м$^{-3}$с$^{-1}$,

в) $z = 60$ км, $N_n = 3 \cdot 10^{21}$ м$^{-3}$, $q = 10^9$ м$^{-3}$с$^{-1}$.

4.5. Самовоздействие электромагнитных волн в плазме

Данный эффект относится к *классическим*. В зависимости от механизма нелинейности различают тепловое, стрикционное самовоздействие и самовоздействие ионизирующих волн. Рассмотрим эти явления подробнее [4].

4.5.1. Тепловое самовоздействие волн

Эффект самовоздействия описывается системой уравнений, состоящей из укороченного уравнения для амплитуды волны E_0 и уравнений баланса для T_e и N. Пусть в стационарном случае они имеют вид (волна распространяется вдоль оси x):

$$\frac{dE_0}{dx} + \frac{\omega}{c}\kappa(E_0)E_0 = 0, \qquad E_0(0) = E_{00},$$

$$\delta\nu\,(T_e - T_{e0}) = \frac{E_0^2}{E_p^2}\frac{\omega^2 + \nu_0^2}{\omega^2 + \nu^2}\delta_0\nu T_{e0},\ N = N_0.$$

Здесь на основании (4.1.22)

$$\kappa = \frac{\omega_p^2\nu}{2\omega(\omega^2 + \nu^2)} \approx \kappa_0\frac{\nu}{\nu_0}\frac{\omega^2 + \nu_0^2}{\omega^2 + \nu^2}.$$

Примем для простоты, что $\delta(T_e) = \delta_0$, $\nu(T_e) = \nu_0\theta$, где $\theta = T_e / T_{e0}$. Тогда

$$\frac{dE_0}{dx} + \frac{\omega}{c}\kappa_0\theta\frac{\omega^2 + \nu_0^2}{\omega^2 + \nu_0^2\theta^2}E_0 = 0,$$

$$\theta - 1 = \frac{E_0^2}{E_p^2}\frac{\omega^2 + \nu_0^2}{\omega^2 + \nu_0^2\theta^2}.$$

Будем считать, что E_p от координаты x не зависит. Рассмотрим далее два предельных случая.

1. *Самовоздействие низкочастотных волн*. Для них $\omega^2 \ll \nu_0^2, \nu^2$,

$$\frac{dE_0}{dx} + \frac{\omega}{c}\frac{\kappa_0}{\theta} E_0 = 0, \tag{4.5.1}$$

$$\theta - 1 = \frac{E_0^2}{\theta^2 E_p^2}. \tag{4.5.2}$$

Перейдем в (4.5.1) к E_0^2:

$$\frac{dE_0^2}{dx} + 2\frac{\omega}{c}\kappa_0 \frac{E_0^2}{\theta} = 0. \tag{4.5.3}$$

Из (4.5.2) следует, что

$$E_0^2 = (\theta - 1)\theta^2 E_p^2. \tag{4.5.4}$$

Подставляя (4.5.4) в (4.5.3), после упрощения получим

$$(3\theta - 2)\frac{d\theta}{dx} = -2\frac{\omega}{c}\kappa_0(\theta - 1).$$

Разделение переменных и интегрирование дает

$$(\theta - 1)e^{3\theta} = (\theta_0 - 1)e^{3\theta_0} e^{-2K_0}, \tag{4.5.5}$$

где $\theta_0 = \theta(0)$, $K_0 = \dfrac{\omega}{c}\displaystyle\int\limits_0^x \kappa_0 dx$.

В глубине плазмы $2K_0 \gg 1$, $\theta \to 1$,

$$\theta - 1 \approx (\theta_0 - 1)e^{3(\theta_0 - 1)} e^{-2K_0}. \tag{4.5.6}$$

После подстановки (4.5.6) в (4.5.2) имеем:

$$E_0 = E_p \theta\sqrt{\theta - 1} \approx E_p\sqrt{\theta - 1} \approx E_p\sqrt{\theta_0 - 1} e^{\frac{3}{2}(\theta_0 - 1)} e^{-K_0}.$$

Отсюда множитель самовоздействия

$$P_A = \frac{E_p}{E_{00}} e^{\frac{3}{2}(\theta_0 - 1)}\sqrt{\theta_0 - 1}.$$

При $\theta_0 \gg 1$

$$P_A \approx \frac{E_p}{E_{00}} \theta_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3}{2}\theta_0},$$

где θ_0 находится из (4.5.2):

$$\theta_0 \approx \left(\frac{E_{00}}{E_p}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Тогда

$$P_A = \left(\frac{E_p}{E_{00}}\right)^{\frac{2}{3}} e^{\frac{3}{2}\left(\frac{E_{00}}{E_p}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

Важно, что при $E_{00} \gg E_p$, $\theta_0 \gg 1$, $P_A \gg 1$, т. е. имеет место сильный *эффект просветления плазмы*.

2. *Самовоздействие высокочастотных волн*. Для них $\omega^2 \gg \nu_0^2, \nu^2$,

$$\frac{dE_0^2}{dx} + 2\frac{\omega}{c}\kappa_0 \theta E_0^2 = 0, \tag{4.5.7}$$

$$\theta - 1 = \frac{E_0^2}{E_p^2}. \tag{4.5.8}$$

Подстановка (4.5.8) в (4.5.7) позволяет исключить θ и разделить переменные в дифференциальном уравнении:

$$\frac{dE_0^2}{E_0^2(1 + E_0^2 / E_p^2)} = -2\frac{\omega}{c} k_0 dx\,.$$

После интегрирования получим

$$E_0(x) = E_p \frac{\mathrm{C}^{\frac{1}{2}} e^{-K_0}}{\sqrt{1 - \mathrm{C} e^{-2K_0}}},$$

где $\mathrm{C} = \dfrac{E_{00}^2}{E_p^2 + E_{00}^2}$. Отсюда

$$P_A = \frac{E_p}{E_{00}} \sqrt{\frac{\mathrm{C}}{1 - \mathrm{C} e^{-2K_0}}}\,.$$

На границе среды $K_0 = 0$, как и должно быть,

$$P_A = \frac{E_p}{E_{00}} \sqrt{\frac{\mathrm{C}}{1 - \mathrm{C}}} = 1\,.$$

В глубине плазмы $2K_0 \gg 1$,

$$P_A \approx \frac{E_p}{E_{00}} \mathrm{C}^{\frac{1}{2}} = \frac{E_p}{\sqrt{E_p^2 + E_{00}^2}} < 1,$$

т. е. должен наблюдаться *эффект помутнения среды*. При $E_{00}^2 \gg E_p^2$ имеем

$$P_A \approx \frac{E_p}{E_{00}} \ll 1, \quad E_0 = E_{00} P_A e^{-K_0} = E_p e^{-K_0},$$

и, следовательно, возникает *эффект насыщения поля*.

4.5.2. Стрикционное самовоздействие волн

Такое самовоздействие возникает при $E_0 \geq E_s$, в том числе и в бесстолкновительной плазме ($\nu = 0$). Система уравнений имеет вид:

$$\frac{dE_0^2}{dx} + 2\frac{\omega}{c}\kappa_0 \frac{N}{N_0} E_0^2 = 0, \qquad E_0(0) = E_{00},$$

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left\{-\frac{E_0^2}{E_s^2}\right\}.$$

Данная система интегрируется в квадратурах. Поскольку $N < N_0$, стрикционное самовоздействие приведет к *эффекту просветления*.

4.5.3. Самовоздействие ионизирующих волн

Уравнение баланса концентрации N имеет вид:

$$\frac{dN}{dt} = q_e + \nu_i N - \beta_a N_n N - \alpha_r N^2. \qquad (4.5.9)$$

До включения волны $\nu_i = 0$,

$$q_e - \beta_{a0} N_n N_0 - \alpha_{r0} N_0^2 = 0,$$

откуда вычисляется N_0. Здесь β_{a0}, α_{r0} – коэффициенты прилипания и рекомбинации в невозмущенной среде.

После включения волны главными членами в уравнении (4.5.9) становятся следующие:

$$\frac{dN}{dt} \approx \nu_i N - \alpha_r N^2.$$

При $t \gg \tau_i$ имеем $d/dt = 0$, $N \approx \nu_i / \alpha_r$. Задаваясь моделью для $\nu_i(E_0)$, уравнение для E_0 с учетом того, что $\kappa = \kappa_0 N / N_0 = \kappa_0 \nu_i(E_0) / \alpha_r N_0$, перепишем в виде:

$$\frac{dE_0^2}{dx} + 2\frac{\omega}{c}\kappa_0 \frac{\nu_i(E_0)}{\alpha_r N_0} E_0^2 = 0. \qquad (4.5.10)$$

Решение (4.5.10) представляется в квадратурах. Поскольку $N > N_0$, самовоздействие ионизирующих волн приводит к *эффекту помутнения* плазмы. Волна при этом практически полностью поглощается в слое толщиной $\Delta x \approx \left(\frac{\omega}{c}\kappa\right)^{-1}$. Отсюда

$$\Delta x \approx l_л \frac{N_0}{N}, \qquad (4.5.11)$$

$l_{ё} = \left(\dfrac{\omega}{c}\kappa_0\right)^{-1}$ – глубина затухания в линейной теории. Из (4.5.11) видно, что

$$\Delta x \sim N^{-1}.$$

Заметим, что одновременно с ионизацией, вообще говоря, должны учитываться нагрев электронов, зависимости $\nu_i(T_e)$, $\beta_a(T_e)$ и $\alpha_r(T_e)$. Если же поле неоднородное, должны приниматься во внимание электрострикция и процессы переноса.

Вопросы для самоконтроля

1. Опишите тепловое самовоздействие электромагнитных волн в плазме.
2. Опишите стрикционное самовоздействие электромагнитных волн в плазме.
3. Опишите самовоздействие ионизирующих электромагнитных волн в плазме.
4. В чем суть эффекта самопросветления и самопомутнения плазмы?

Задачи

1. Для теплового самовоздействия электромагнитного пучка в столкновительной плазме с частотой соударений

$$\nu = \nu_0\left(\frac{T_e}{T_{e0}}\right)^{1/2}$$

оценить величины критического поля $E_{кр}$, критической мощности $P_{кр}$, при которых наступает эффект самоканалирования, а также фокусное расстояние $R_{ф}$.

Принять, что

$\nu_0 = 6\cdot 10^9$ с$^{-1}$, $T_{e0} = 300$ К, $\delta_0 = 2\cdot 10^{-3}$, $T_e = T_{e0}\left(1 + E^2 / E_p^2\right)$, $f_{p0} = 3\cdot 10^9$ Гц,

а) $r_0 = 4$ см, $f = 3\cdot 10^{10}$ Гц,

б) $r_0 = 2$ см, $f = 5\cdot 10^{10}$ Гц.

Здесь r_0 – толщина пучка, T_e – температура электронов, E_p – плазменное поле, f – частота волны.

2. Полагая, что в результате электрострикции концентрация электронов в плазме изменяется по закону

$$N = N_0\left(1 - \frac{E^2}{E_c^2}\right),$$

где $E < E_c$, E_c – стрикционное поле, вычислить зависимость амплитуды волны и множителя самовоздействия от пройденного пути, проанализировать их поведение в глубине среды, а также при $E(0) \to E_c$. Учесть, что коэффициент поглощения волны равен $\alpha = \alpha_0 N / N_0$.

3. Полагая, что в результате нагрева электронов плазмы высокочастотной $(\omega \gg \nu)$ электромагнитной волной коэффициент поглощения изменяется по закону

$$\alpha = \alpha_0 \frac{\nu}{\nu_0},$$

где ν – частота соударений электронов с нейтральными частицами, вычислить зависимость амплитуды волны и множителя амплитудного самовоздействия от пройденного пути. Проанализировать их поведение в глубине плазмы, а также для случая очень сильной волны на границе плазмы. Принять, что в слабоионизированной плазме (в нижней ионосфере) $\nu = \nu_0(T_e / T_{eo})$, а уравнение баланса энергии (температур T_e) электронов имеет вид:

$$\frac{T_e}{T_{e0}} = 1 + \frac{E^2}{E_p^2},$$

где E_p – плазменное поле.

4. Считая, что в результате нагрева электронов высокочастотным $(\omega \gg \nu)$ электромагнитным полем коэффициент поглощения изменяется по закону $\alpha = \alpha_0(2 / (1 + \theta))$, где $\theta = T_e / T_{e0}$ дается уравнением баланса энергии электронов:

$$\theta = 1 + \frac{E^2}{E_p^2},$$

E_p – плазменное поле, получить выражения для амплитуды и множителя самовоздействия волны в зависимости от пройденного расстояния.

Проанализировать их поведение в глубине плазмы, а также для случая очень сильной волны на границе плазмы.

5. Полагая, что в результате нагрева электронов слабоионизированной плазмы ($\nu = \nu_0\theta$, $\theta = T_e / T_{e0}$) высокочастотной ($\omega \gg \nu$) электромагнитной волной коэффициент поглощения изменяется по закону $\alpha = \alpha_0(\nu / \nu_0) = \alpha\theta$, вычислить нелинейную добавку к фазе в зависимости от пройденного расстояния. Проанализировать величину эффекта в глубине среды при слабом и очень сильном поле на границе плазмы. Принять, что уравнение баланса энергии электронов имеет вид:

$$\theta = 1 + \frac{E^2}{E_p^2},$$

где E_p – плазменное поле, а показатель преломления среды равен

$$n = 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}.$$

6. Считая, что в результате электрострикции концентрация электронов в плазме изменяется по закону

$$N = N_0\left(1 - \frac{E^2}{E_c^2}\right),$$

где $E < E_c$, E_c – стрикционное поле, вычислить нелинейную добавку к фазе, обусловленную самовоздействием высокочастотной ($\omega \gg \nu$) волны как функцию пройденного пути. Проанализировать величину эффекта в глубине плазмы при $E(0) \to E_c$. Принять, что коэффициент поглощения и показатель преломления соответственно равны

$$\alpha = \alpha_0\frac{N}{N_0}, \qquad n = 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

где ω_p – плазменная частота.

7. Показать, что стрикционное самовоздействие электромагнитного пучка в плазме приводит к его самофокусировке. Принять, что

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{E^2}{E_c^2}\right).$$

4.6. Другие нелинейные эффекты

Плазма как *система многих тел* описывается нелинейными уравнениями. Нелинейными являются уравнения движения частиц, кинетические уравнения и многие другие. Нас же интересует только нелинейность *электродинамического типа*, связанная с наличием внешнего электромагнитного поля волны в среде.

Естественно, что все нелинейные эффекты, рассмотренные в разделе 2, имеют место и в плазме. Важно, что в ней они проявляются в весьма *слабых* полях. Поэтому плазма является очень хорошим объектом для изучения нелинейных эффектов.

При распространении сильных электромагнитных волн в ионизированном газе, кроме *самовоздействия* волн, имеет место их *взаимодействие*, эффекты *фокусировки* и *дефокусировки*, *укручение* профиля волны, *нелинейные эффекты Доплера и Фарадея*. В плазме могут распространяться *ударные волны* и *солитоны* (см. пункт 2.6.7). Однако *главной особенностью* этой среды является ее *неустойчивость*. В плазме легко возбуждаются неустойчивости различных типов[1]. Рассмотрим подробнее некоторые неустойчивости *электродинамического типа*. К ним относятся *самофокусировочная, резонансная* и *параметрическая*.

4.6.1. Самофокусировочная неустойчивость

Развитию неустойчивости способствует наличие флуктуаций N или *затравочных* неоднородностей. Например, при $\Delta N < 0$ в соответствии с (4.1.17) ε увеличивается и происходит фокусировка поля. Если увеличение поля приводит к дальнейшему уменьшению N (за счет термодиффузии, электрострикции и т. д.), возникает *положительная обратная связь* и возбуждается неустойчивость. Электромагнитный пучок, проходя через плазму, вызывает ее *расслоение*. Сам он в результате самовоздействия распадается на отдельные «*нити*».

Эффект самофокусировки имеет место не только в поперечном по отношению к направлению распространения, но и в продольном направлении. При этом пучок волн также может стать неустойчивым. В таком случае говорят о *модуляционной* неустойчивости.

---

[1] По этой причине ряд авторов предлагают рассматривать плазму не только как ионизированный газ, но и как газ *квазичастиц* (т. е. колебаний и волн).

4.6.2. Резонансная неустойчивость

Эта неустойчивость связана с бесстолкновительным резонансным поглощением электромагнитной волны в области, где $n \approx 0$ или $\omega \approx \omega_p$. Энергия электромагнитной волны переходит в энергию плазменных волн с частотой, примерно равной ω_p.

Эффективность трансформации энергии возрастает, если в области резонанса $(\omega \approx \omega_p)$ имеются затравочные неоднородности N. Последние служат своеобразными резонаторами, возбуждаемыми волной накачки. При этом происходит интенсивная *линейная* трансформация энергии электромагнитной волны в энергию плазменной волны. Часть энергии этих волн идет на нагрев электронов в неоднородностях, в результате термодиффузии последние усиливаются. Это приводит к положительной обратной связи, т. е. к генерации *резонансной* неустойчивости.

Для волны накачки имеет место *аномальное ослабление*. При определенных условиях генерация резонансной неустойчивости носит *взрывной* характер (см. пункт 2.8.5).

4.6.3. Параметрическая неустойчивость

Параметрическая неустойчивость представляет собой распад волны накачки с частотой ω и волновым вектором $\vec{k}$ на две другие волны:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \qquad \vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2.$$

По этой причине неустойчивость также называют *распадной*.

Если причиной распада служит нагрев электронов или электрострикция, неустойчивость называют соответственно *тепловой* или *стрикционной параметрической*.

Распадная неустойчивость эффективно возбуждается в окрестности области, где $\varepsilon \approx 0$ и $\omega \approx \omega_p$. При этом волна накачки распадается на плазменную волну с $\omega_1 = \omega_p$ и ионно-звуковую волну с $\omega_2 = \omega_s = k_s v_s$. Обычно $\omega_s \ll \omega_p$. Здесь v_s – скорость ионного звука.

Если же $\omega, \omega_1 \gg \omega_p$, распад вида

$$\omega = \omega_1 + \omega_s, \qquad \vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_s$$

называют *вынужденным рассеянием Мандельштама–Бриллюэна*. Волна с частотой ω_1 является поперечной электромагнитной и представляет собой результат рассеяния волны накачки на ионном звуке.

При $\omega > 2\omega_p$ возможен распад типа

$$\omega = \omega_1 + \omega_p \,, \qquad \vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_p \,.$$

Этот процесс представляет собой рассеяние волны накачки на плазменных колебаниях (*вынужденное комбинационное рассеяние Рамана*).

Если плазма находится во внешнем магнитном поле, в ней возбуждаются и другие типы неустойчивостей.

Вопросы для самоконтроля

1. Как Вы считаете, в чем состоит главная особенность плазмы?
2. Какие неустойчивости в плазме Вы знаете?
3. Опишите самофокусировочную неустойчивость.
4. Опишите резонансную неустойчивость.
5. Опишите параметрическую неустойчивость.
6. Опишите вынужденное рассеяние Мандельштама–Бриллюэна.
7. Опишите вынужденное рассеяние Рамана.

1.1. Особенности нелинейных явлений в полупроводниках

Интерес к исследованию воздействия сильных электромагнитных полей на электроны в твердых телах возник еще в 1920–1930-х гг. в связи с изучением *пробоя* диэлектриков, для которых поле пробоя $E_{\text{пр}} \geq 3{\cdot}10^6$ В/м.

В 30-х гг. XX в. выполнен ряд теоретических работ, посвященных влиянию сильного электрического поля на функцию распределения электронов по скоростям. Тогда же была предсказана возможность *нагрева* носителей. Эти работы выполнены Л. Д. Ландау, А. С. Компанейцем, Б. И. Давыдовым и др.

Первые эксперименты были поставлены Шокли и Райдером в 1951 г. С тех пор начались систематические исследования нелинейных явлений в полупроводниковой плазме. Они завершились, в частности, открытием *эффекта Ганна*, повсеместным внедрением диодов Ганна в электронику, построением теории «горячих» электронов и т. д.

Большой вклад в исследования внесли Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, В. Денис, Ю. Пожела, Э. Д. Прохоров, В. М. Яковенко и др. (см., например, [4]).

4. 7.1. Основные нелинейные явления

Твердотельная плазма существенно отличается от газоразрядной. Во-первых, она существует, начиная с температур ~ 10 K и выше. Во-вторых, концентрация носителей (электронов и дырок) $N \sim 10^{28}$ м$^{-3}$, что намного больше N для плазмы газового разряда. В-третьих, полупроводниковая плазма очень устойчива и генерация неустойчивостей – скорее исключение, чем правило. В-четвертых, ряд эффектов носит квантовомеханический характер.

Эффекты в полупроводниках в основном связаны с нагревом электронов (тепловой механизм нелинейности). Величина плазменного поля E_p зависит от T_{e0}/T_D, где T_D – температура Дебая. При $T_{e0} \ll T_D$ плазменное поле $E_p \sim 10 – 100$ В/м, если же $T_{e0} \gg T_D$, то $E_p \geq 10^5$ В/м. Нагрев электронов приводит к тому, что проводимость $\sigma = \sigma(E_0)$, вольт-амперная характеристика становится *N*-образной, а значит, появляется участок с отрицательным сопротивлением. При этом генерируются солитоны Ганна (см. пункт 2.6.5).

Нагрев электронов также вызывает их эмиссию из ненагретой области, анизотропию проводимости и другие эффекты.

Следующие явления связаны с изменением N в результате замедления процесса рекомбинации или уменьшения вероятности захвата на примеси.

В достаточно сильных полях ($E \geq E_i$) наступает ударная ионизация и пробой полупроводника. При этом электроны с энергией, превышающей ширину запрещенной зоны ($\sim$ 0,1 – 1 эВ), сталкиваясь с электронами валентной зоны, «выбрасывают» их в зону проводимости. Для полупроводника на основе InSb величина $E_i \geq 2 \cdot 10^4$ В/м. При ударной ионизации примесей $E_{ïð} \sim 10^2 – 10^3$ В/м. Важно, что в отличие от диэлектрика при пробое полупроводника кристалл *не разрушается*.

В полупроводниковой плазме возможны неустойчивости *гидродинамического типа, перегревная* (из-за уменьшения $\delta(T_e)$ при нагреве электронов), а также *распадная* (или, напротив, *слияние* волн). При этом $E_0 \geq 10^5$–10^6 В/м.

4.7.2. Использование нелинейных явлений

Нелинейное взаимодействие сильных электромагнитных полей с газоразрядной плазмой используется для ее создания, нагрева, нелинейной диагностики, а также при разработке генераторов, усилителей и преобразователей электромагнитных колебаний в широком диапазоне частот.

Эффект Ганна в твердотельной плазме лежит в основе целого класса полупроводниковых генераторов СВЧ колебаний.

Нагрев электронов применяется для диагностики плазмы, а также при разработке малоинерционных, чувствительных индикаторов электромагнитного излучения.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключаются особенности нелинейных явлений в полупроводниковой плазме?

2. Перечислите основные нелинейные явления в полупроводниковой плазме.

3. Как используются нелинейные явления в плазме?

4.8. Основные результаты

1. К основным механизмам нелинейности в плазме относятся: нагрев электронов, электрострикция, изменение концентрации носителей и нелинейность силы Лоренца. Важно, что $E_p \ll E_s \ll E_i \ll E_r$. В полупроводниковой плазме при $T_{e0} \gg T_D$ может быть $E_i \ll E_p \ll E_s \ll E_r$.

2. Нелинейные явления, связанные с распространением сильных электромагнитных волн в плазме, такие же, как и в нелинейной электродинамике.

3. Основной особенностью газоразрядной плазмы является возникновение нелинейных явлений в сравнительно слабых полях, а также генерация различных типов неустойчивостей.

В полупроводниковой плазме неустойчивости выражены слабо, и почти все нелинейные эффекты связаны с нагревом электронов и изменением их концентрации.

4. Нелинейное взаимодействие волн с плазмой используется для ее создания, нагрева, диагностики, при разработке генераторов, усилителей и преобразователей электромагнитных полей.

РАЗДЕЛ 5. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В КОСМИЧЕСКОЙ РАДИОФИЗИКЕ

Если... реакция среды меняет свои свойства с изменением амплитуды волны, то говорят о нелинейности среды, а волну достаточно большой интенсивности называют нелинейной. [1]

В данном разделе описаны нелинейные эффекты, обусловленные воздействием мощных радиоволн, излучаемых наземными установками, на околоземную плазму (см. также [5, 18, 43]).

5.1. Краткие сведения об околоземном космосе

Земля окружена газовой оболочкой, называемой *атмосферой*. Ее параметры в основном изменяются с высотой z.

В изотермической атмосфере, когда $T_n(z) = \mathrm{const}$, для давления p и концентрации нейтралов справедлива *барометрическая формула:*

$$p(z) = p(0)\exp(-z\,/\,H), \qquad N_n(z) = N_n(0)\exp(-z\,/\,H), \quad (5.1.1)$$

где $H = kT_n\,/\,m_n g \sim 10$ км – приведенная высота, g – ускорение свободного падения.

Под действием электромагнитного и корпускулярного излучений Солнца атмосфера на высотах $z \geq 50$ км *ионизируется*.

Ионизированная часть атмосферы называется *ионосферой*. Верхняя граница последней находится на высоте $z \approx 1000$ км. При $z \leq 200$ км ионосфера представляет собой слабоионизированную плазму в том смысле,

---

[1] См.: Гурбатов С. Н., Нелинейные случайные волны в средах без дисперсиии / С. Н. Гурбатов, А.Н. Малахов, А. И. Саичев. – М. : Наука,. 1990. – 216 с.

что $\nu_{en} \gg \nu_{ei}$. На высотах $z \geq 200$ км плазму можно считать сильноионизированной ($\nu_{ei} \gg \nu_{en}$).

Высотные профили концентрации электронов приведены на рис. 5.1.

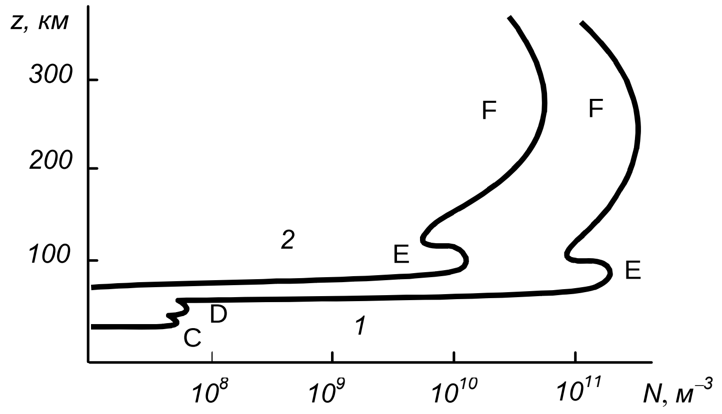


Рис. 5.1. Зависимость электронной концентрации от высоты:
1 – день;
2 – ночь

Ионосфера состоит из *областей,* или слоев: С ($z \approx$ 50–70 км), D (70–90 км), E (90–120 км) и F (120–1000 км). Кроме того, ионосферу условно делят на нижнюю (50–100 км), среднюю (100–300 км) и внешнюю (300–1000 км).

Параметры ионосферы существенно зависят от времени суток, сезона, солнечной активности и магнитной возмущенности. Однако во всех случаях сохраняются области ионосферы и ее главный максимум на высотах $\sim$ 300–400 км для дня и ночи соответственно. Его появление обусловлено действием двух *конкурирующих* процессов: с ростом высоты уменьшается роль химических реакций (потерь электронов) и увеличивается роль диффузии.

При $z \leq$ 100 км в ионосфере *динамические* процессы (ветры, вихри и т. п.) примерно такие же, как и в нейтральной атмосфере. На высотах $z \geq$ 100 км все больше сказываются *электродинамические* процессы (токи, электромагнитные силы и т. д.), а также влияние геомагнитного поля. Роль последнего становится определяющей на высотах $z \geq$ 1000 км в так называемой *магнитосфере*.

Под магнитосферой понимается часть околоземного пространства, заполненного геомагнитным полем и захваченными им частицами. Захваченные геомагнитными ловушками частицы образуют *радиационный пояс* Земли. Частицы движутся по спиральным траекториям вдоль силовых линий $\vec{B}$, а также дрейфуют в поперечном по отношению к $\vec{B}$ направлении (электроны на восток, а протоны на запад).

Условно принимается, что верхняя граница магнитосферы находится на расстояниях $\sim 10R_{Ç}$ ($R_{Ç}$ – радиус Земли). За счет *солнечного ветра* (т. е.

потока плазмы с «вмороженным» магнитным полем солнечного происхождения) магнитосфера является асимметричным образованием (рис. 5.2).

Вопросы для самоконтроля

1. Опишите строение околоземной космической среды.
2. Что называют атмосферой?
3. Что называют ионосферой?
4. Что называют магнитосферой?
5. Что называют геокосмосом?

5.2. Результаты экспериментов

Впервые идею о возможности возмущения ионосферы на высотах ~ 100 км мощной радиоволной на гирочастоте электронов $f_B \sim 1$ МГц высказал В. Бейли в 1925 г.

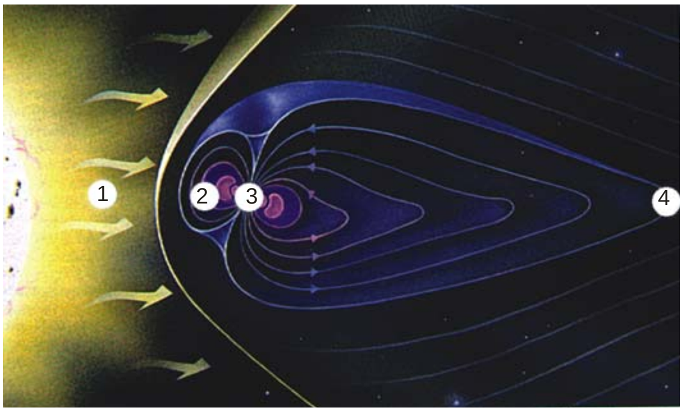


Рис. 5.2. Примерный вид магнитосферы:
1 – солнечный ветер;
2 – радиационный пояс;
3 – Земля;
4 – хвост

Первый нелинейный эффект – *кросс-модуляция* радиоволн – был открыт независимо западноевропейцем Телледженом и горьковчанином Лбовым в середине 1930-х гг. Он получил название *Люксембург-горьковского эффекта*. С тех пор начались систематические исследования воздействия мощного радиоизлучения на околоземную плазму, которые условно можно разбить на четыре этапа.

1-й этап (1930–1950-е гг.). Исследуются *классические эффекты кросс-модуляции* и *самомодуляции* амплитудно-модулированных радиоволн длинноволнового и средневолнового диапазонов в D- и E-областях ионосферы. Установлено, что эффекты начинают проявляться при мощностях радиостанций $P \geq 100$ кВт.

Существенный вклад в эти исследования внесли В. Бэйли, Ф. Хибберд, Л. Хаксли, Р. Смит, Дж. Фейер, М. Кутоло, В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, И. М. Виленский и др.

2-й этап (1960-е гг.). В основном теоретически изучаются нелинейные эффекты, вызванные *тепловым механизмом* нелинейности. Определяющий вклад в эти исследования внесли А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург и др.

Под руководством И. С. Шлюгера в СССР экспериментально исследуются эффекты на гирочастоте электронов, главным образом в нижней ионосфере, при воздействии на нее *сверхмощного* импульсного излучения ($PG \approx 1000$ МВт, $G \approx 100$ – коэффициент усиления антенны). Обнаружены эффекты *просветления* и *помутнения* при самовоздействии и взаимодействии волн. Доказаны трудности пробоя атмосферы.

3-й этап (1970–1980-е гг.). Теоретически и экспериментально изучается *большое разнообразие явлений* во всех областях ионосферы и в магнитосфере, возникающих в результате воздействия на плазму электромагнитного излучения с частотой $f \sim 1$ кГц – 1000 МГц.

Для этих исследований в мире создан ряд уникальных установок гектометрового и декаметрового диапазонов с $PG \sim 10 - 300$ МВт. Восемь из них введены в строй в бывшем СССР (три – в районе г. Н. Новгорода, две – возле г. Москвы, по одной – возле г. Мончегорска, г. Душанбе и г. Харькова) (табл. 5.1). Две установки функционировали в США, одна – в Норвегии. Кроме того, имелись также установки в диапазонах частот ~ 10 кГц и 100–1000 МГц. Первые из них в основном предназначались для воздействия на магнитосферу, где $f_B \sim 10 - 100$ кГц.

Появился целый ряд научных школ: в г. Н. Новгороде, в г. Москве, в г. Харькове, в ФРГ, в США. Основное внимание уделялось исследованию *неустойчивостей* в F-области ионосферы, *эффекта Гетманцева*, возможности *пробоя атмосферы*, использованию искусственного нагрева ионосферы для ее дистанционной диагностики и т. п.

Достигнуты *предельно* большие мощности передатчиков ~ 1 МВт в непрерывном и ~ 10–100 МВт в импульсном режимах. Коэффициенты усиления антенн гектометрового и декаметрового диапазонов превысили значение $G \sim 10^2$–10^3, а в диапазонах метровых – дециметровых волн – $G \sim 10^4$–10^5. Для антенн килогерцового диапазона $G \ll 1$.

В ходе исследований обнаружены следующие явления.

1. *Структуризация ионосферной плазмы*, вызванная образованием вытянутых вдоль геомагнитного поля неоднородностей концентрации электронов.

2. *Аномальное поглощение радиоволн* обыкновенной поляризации, связанное с резонансным эффектом на частоте верхнего гибридного резонанса.

3. *Широкополосное* ($\sim$ 100 кГц) *поглощение* других радиоволн в окрестности частоты мощной радиоволны.

4. *Искусственное радиоизлучение* из возмущенной области на частотах, сдвинутых на 100–300 кГц относительно частоты мощной радиоволны.

5. *Возбуждение* очень сильных *собственных колебаний* в ионосферной плазме.

6. Эффективное *ускорение электронов*.

7. Сильное искусственное *оптическое свечение ионосферы.*

В экспериментах удавалось увеличить температуру электронов в 30–40 раз в D-области, на $\sim$ 100 % в E-области и на 10–100 % в F-области. Изменение N обычно не превышало нескольких десятков процентов.

Но было одно исключение.

В 1988 г. группа исследователей (Л. Данкен и др.) из США при помощи радара некогерентного рассеяния обнаружила, что вблизи местной полночи в зимнее время при нагреве ионосферы мощной радиоволной обыкновенной поляризации ($f = 3{,}175$ МГц, $PG \approx 60\,$МВт) температура электронов увеличивалась в три раза.

Объяснение этому аномальному эффекту через несколько лет дала группа российских ученых (В. В. Васьков и др.). Оказалось, что эффект связан с возмущениями, которые распространялись от области нагрева вдоль магнитной силовой трубки вплоть до магнитосопряженной области. Добавим, что этот эффект наблюдался в низкоширотной ионосфере (магнитосферный параметр L = 1,25, длина магнитной трубки близка к 4 тыс. км).

4-й этап (1980–2010-е гг.). Продолжались исследования традиционных эффектов (искусственного радиоизлучения ионосферы, ракурсного рассеяния). Новым эффектом стал *эффект магнитного зенита*. В направлении магнитного зенита температура электронов увеличивалась в 3–4 раза на высотах 300–600 км, т. е. выше максимума области F_2.

Созданы *новые нагревные стенды*: HAARP и HIPAS (Аляска, США), а также SPEAR (Шпицберген) (см. табл. 5.1).

Значительное внимание уделяется изучению возмущений во внешней ионосфере, т. е. выше области отражения греющей радиоволны, распространению возмущений вдоль магнитосиловой трубки в магнитосопряженную область (В. В. Васьков и др.). Особое внимание уделялось возмущениям,

Таблица 5.1. Основные параметры радиотехнических комплексов для воздействия на ионосферу мощного радиоизлучения (P_1 – мощность одного передатчика)

Место расположения, страна	f, МГц	G	Количество РПУ	P_1, кВт	P, МВт	PG, ГВт	Годы эксплуатации
Москва (СССР)	1,35	100	1	10^4	10	1	1961–1989
Боулдер (США)	4,5–9 2,7–3,3	60–80 30			2 2	0,12–0,16 0,06	1970–1980
Аресибо (Пуэрто-Рико, США)	3–12	200–400			0.75	0,15–0,3	1971–1980
Н. Новгород (СССР)	4,6–5,75	100–150	1	100	0.1	0,015–0.023	1973–1988
Н. Новгород (СССР / Россия)	4,5–9	200–430	3	250	0.75	0,15–0,32	С1981 по настоящее время
Мончегорск (СССР)	3,3	130	1	80	0.08	0,01	1976–1980
Тромсё (Норвегия)	3,85–5,65 5,5–8 5,5–8	250 250 1000	12	100	1.2	0,3 0,3 1,2	С 1980 по настоящее время
Гиссар (Душанбе, СССР)	3,7–6	60–80	1	100	0.1	0,006–0,008	1981–1988
Харьков (СССР / Украина)	5–12	150	1	100	0.1	0,015	1987–1991
HAARP (Фэрбэнкс, Аляска, США)	2,8–10	1000	360	10	360	3,6	1990–2014
HIPAS (Фэрбэнкс, Аляска, США)	2,85 и 4,53	70			1	0,07	В настоящее время
SPEAR (Шпицберген, Норвегия)	4,45					0,03	В настоящее время

которые распространяются на значительные (~1000 км) расстояния в горизонтальном направлении (Л. Ф. Черногор и др.).

Исследуется неизвестное ранее явление возникновения *крупномасштабных* (а возможно, и *глобальных*) *возмущений* в ионосфере, инициируемых мощным радиоизлучением. Основной вклад в исследования внесли специалисты ХНУ имени В. Н. Каразина (К. П. Гармаш, Л. Ф. Черногор и др.).

Вопросы для самоконтроля

1. Опишите историю исследования нелинейных явлений в геокосмосе.
2. Какие этапы в исследовании нелинейных явлений в геокосмосе следует выделить?

5.3. Механизмы нелинейных явлений

Для околоземной плазмы могут иметь место следующие механизмы (см. подраздел 4.2):

– тепловой;
– стрикционный;
– ионизационный;
– релятивистский.

Как было показано в пункте 4.2.5, характерные поля удовлетворяют неравенствам

$$E_p \ll E_s \ll E_i \ll E_r.$$

Тепловая (или нагревная) нелинейность проявляется в весьма слабых полях. Например, для $\omega \sim 10^6$ с$^{-1}$ (или $f \sim 10^5$ Гц) в нижней ионосфере $E_p \sim 10^{-2}$–10^{-1} В/м. Такие поля создаются установкой с $PG \sim 10^5$ Вт.

Заметим, что еще в 1960-е гг. была создана система с $PG \sim 10^9$ Вт на частоте $f \sim 1$ МГц (см. табл. 5.1). При этом $E_p \sim 10^{-1}$–1 В/м, $E \sim 1$–10 В/м.

Тепловая нелинейность существенна во всех областях ионосферы и в магнитосфере.

При стрикционном механизме нелинейности $E_s \approx (10-100)E_p$. Эта нелинейность осуществляется при $\omega \gg \nu$, а также $L \ll l_e$ (L – характерный масштаб неоднородности поля, l_e – длина свободного пробега электронов). Она имеет практическое значение в F-области и магнитосфере.

Ионизационный механизм нелинейности практически еще не использовался.

Релятивистский механизм для околоземной плазмы малосущественен.

Вопросы для самоконтроля

1. Опишите механизмы нелинейных явлений в геокосмосе.
2. Сравните механизмы нелинейных явлений в геокосмосе.

5.4. Кросс-модуляция радиоволн

Мощная модулированная по амплитуде радиоволна E_1, распространяясь в ионосфере, модулирует ее параметры и, прежде всего, T_e и эффективную частоту соударений электронов ν. Эти возмущения сказываются на амплитуде другой радиоволны E_2, которая после прохождения возмущенной области также становится модулированной по амплитуде (и фазе). Этот эффект называется *кросс-модуляцией,* или *перекрестной модуляцией*. Он относится к классическим нелинейным эффектам в ионосфере.

5.4.1. Расчет величины возмущений

Будем считать, что достаточно слабая ($E_1^2 < E_p^2$) волна нормально падает на однородную изотропную плазму. Уравнение баланса для T_e принимает вид (см. формулу (4.2.2)):

$$\frac{dT_e}{dt} + \delta_0\nu_0(T_e - T_{e0}) = \frac{E_1^2}{E_{\rho 1}^2}\delta_0\nu_0 T_{e0}\,, \tag{5.4.1}$$

где индекс «0» относится к невозмущенным условиям,

$$E_1^2 = E_{10}^2(1+\mu\cos\Omega t),$$

μ – глубина модуляции, Ω – частота модуляции. Здесь и далее индексы 1, 2 относятся к параметрам волн $E_{1,2}$ соответственно.

Для безразмерных величин уравнение (5.4.1) перепишется следующим образом:

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} + \vartheta = \gamma(1+\cos\Omega_1\tau), \tag{5.4.2}$$

где $\vartheta = (T_e - T_{e0})/T_{e0}$, $\gamma = E_{10}^2/E_{\rho 1}^2$, $\tau = \delta_0\nu_0 t$, $\Omega_1 = \Omega/\delta_0\nu_0$. Периодическое решение (5.4.2) имеет вид:

$$\vartheta_\Omega = \frac{\gamma\mu}{1+\Omega_1^2}(\cos\Omega_1\tau + \Omega_1\sin\Omega_1\tau) = \frac{\gamma\mu}{\sqrt{1+\Omega_1^2}}\cos(\Omega_1\tau - \varphi_\Omega),$$

$$\varphi_\Omega = \mathrm{arctg}\Omega_1.$$

5.4.2. Расчет величины кросс-модуляции

Из укороченного уравнения для E_2 при нормальном падении волны имеем:

$$E_2 = E_2(0)\exp\left\{-\frac{\omega_2}{c}\int_0^z \kappa_2(E_1)dz\right\}, \qquad (5.4.3)$$

где ω_2 – частота волны E_2, κ_2 – ее показатель поглощения, причем

$$\kappa_2 = \kappa_{20} + \left(\frac{\partial\kappa_2}{\partial\nu}\frac{d\nu}{dT_e}\right)_0 \Delta T_e = \kappa_{20} + \left(\frac{\partial\kappa_2}{\partial\nu}\frac{d\nu}{dT_e}\right)_0 \nu_0\vartheta_\Omega. \qquad (5.4.4)$$

С учетом (5.4.4) выражение (5.4.3) принимает вид:

$$E_2 = E_{20}\exp\left\{-\frac{\omega_2}{c}\int_0^z \left(\frac{\partial\kappa_2}{\partial\nu}\frac{d\nu}{dT_e}\right)_0 T_{e0}\vartheta_\Omega dz\right\},$$

где E_{20} – поле в линейной теории, т. е. при $\vartheta_\Omega = 0$. В нижней ионосфере

$$\nu = \nu_0\frac{T_e}{T_{e0}}, \qquad \left(\frac{d\nu}{dT_e}\right)_0 = \frac{\nu_0}{T_{e0}}.$$

Тогда

$$E_2 = E_{20}\exp\left\{-\frac{\omega_2}{c}\int_0^z \left(\frac{\partial\kappa_2}{\partial\nu}\right)_0 \nu_0\vartheta_\Omega dz\right\} = E_{20}\left(1 - \mu_\Omega\cos(\Omega_1\tau - \varphi_\Omega)\right),$$

где

$$\mu_\Omega = \frac{\omega_2}{c}\left(\frac{\partial\kappa_2}{\partial\nu}\right)_0 \nu_0\frac{\mu}{\sqrt{1+\Omega_1^2}}\int_0^z \gamma(z)dz$$

есть глубина кросс-модуляции, φ_Ω – фаза кросс-модуляции. Здесь полагалось, что $|\mu_\Omega| \ll 1$.

Так как

$$\gamma(z) = \gamma(0)e^{-2K_{10}}, \qquad K_{10} = \frac{\omega_1}{c}\int_0^z \kappa_{10}dz,$$

то

$$\int_0^z \gamma(z)dz = \frac{\gamma(0)}{2\dfrac{\omega_1}{c}\kappa_{10}}\left(1 - e^{-2K_{10}}\right), \qquad \kappa_{10} = \frac{\omega_{p0}^2\nu_0}{2\omega_1(\omega_1^2+\nu_0^2)}.$$

Учтем также, что при $n_2 \approx 1$

$$\kappa_2 = \frac{\omega_{p0}^2 \nu}{2\omega_2(\omega_2^2 + \nu^2)}, \qquad \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial \nu}\right)_0 \nu_0 = \frac{\omega_{p0}^2 \nu_0}{2\omega_2} \frac{\omega_2^2 - \nu_0^2}{(\omega_2^2 + \nu_0^2)^2}.$$

Тогда выражение для глубины кросс-модуляции принимает вид:

$$\mu_\Omega = \frac{1}{2} \frac{\gamma(0)\mu}{\sqrt{1+\Omega_1^2}} \frac{\omega_2^2 - \nu_0^2}{\omega_2^2 + \nu_0^2} \frac{\omega_1^2 + \nu_0^2}{\omega_2^2 + \nu_0^2} \left(1 - e^{-2K_{10}}\right). \qquad (5.4.5)$$

5.4.3. Анализ величины кросс-модуляции

В глубине плазмы $(K_{10} \gg 1)$ наблюдается максимальная кросс-модуляция:

$$\mu_{\Omega\max} = \frac{1}{2} \frac{\gamma(0)\mu}{\sqrt{1+\Omega_1^2}} \frac{\omega_2^2 - \nu_0^2}{\omega_2^2 + \nu_0^2} \frac{\omega_1^2 + \nu_0^2}{\omega_2^2 + \nu_0^2}.$$

Так как

$$\gamma(0) = \frac{e^2 E_{10}^2(0)}{3kT_{e0} m \delta_0 (\omega_1^2 + \nu_2^2)},$$

то $\mu_{\Omega\max}$ не зависит от частоты ω_1. При $\omega_2^2 \gg \nu_0^2$ имеем: $\mu_{\Omega\max} \sim \omega_2^{-2}$, если же $\omega_2^2 \ll \nu_0^2$,то $\mu_{\Omega\max}$ отрицательна и не зависит от ω_2 (рис. 5.3). При $\omega_2 = \nu_0$ величина $\mu_{\Omega\max} = 0$. При $\omega_2 = \sqrt{3}\nu_0$ глубина кроссмодуляции $\mu_{\Omega\max}$ принимает максимальное значение.

Зависимость $\mu_{\Omega\max}(\Omega)$ показана на рис. 5.4.

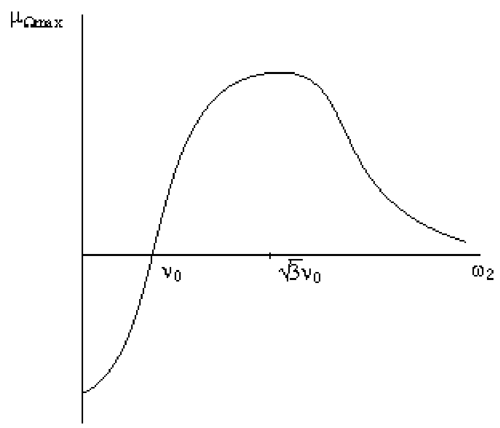


Рис. 5.3. Зависимость глубины кросс-модуляции от частоты ω_2

В рассмотренном приближении $\mu_\Omega \sim \mu,\ P_1 G_1$. Например, при $\mu \approx 1$, $\Omega < \delta_0 \nu_0$, $\gamma(0) \approx 1$ имеем:$|\mu_{\Omega\max}| \le 0{,}5$. Как видно из этой оценки, величина эффекта значительна.

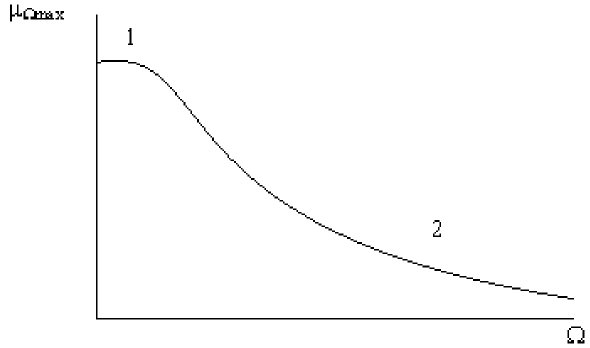


Рис. 5.4. Зависимость глубины кросс-модуляции от частоты модуляции:

участок 1 – $\Omega \ll \delta_0 \nu_0$, $\mu_{\Omega\,\max} \approx \mathrm{const}$;

участок 2 – $\Omega \gg \delta_0 \nu_0$, $\mu_{\Omega\,\max} \sim \Omega^{-2}$

Задачи

1. В 1925 г. Бейли предложил осуществить пробой в ионосфере на высоте около 100 км при помощи мощной вещательной радиостанции, работающей на гирочастоте электронов. Мог ли быть реализован этот замысел, если мощность радиостанции не превышала 100 кВт? Принять, что на высоте в 100 км частота соударений равна 10^5 с$^{-1}$, интегральный коэффициент поглощения $K = 0{,}1$ и 1,15 для ночного и дневного времени суток соответственно.

2. Оценив возмущение температуры электронов, проверить, может ли наблюдаться эффект кросс-модуляции, если мощность радиовещательной станции составляет 150 кВт, частота радиоволны – 100 кГц. Влиянием магнитного поля пренебречь. Принять частоту соударений электронов, равной 10^5 с$^{-1}$, невозмущенную температуру электронов – 300 К, относительную долю энергии, теряемой электроном при столкновении с тяжелой частицей – $3{\cdot}10^{-3}$, интегральный коэффициент поглощения волны – 0,5 и 2,3 для ночного и дневного времени суток соответственно.

3. Исходя из выражения для глубины кросс-модуляции в ионосфере:

а) построить зависимости глубины кросс-модуляции от частот возмущающей и слабой радиоволн;

б) оценить глубину кросс-модуляции при напряженности поля возмущающей радиоволны, равной плазменному полю. Считать, что глубина модуляции равна 1, частота модуляции – $\Omega \ll \delta_0 \nu_0$. Рассмотреть случаи, когда $\omega_2^2 \ll \nu_0^2$ и $\omega_2^2 \gg \nu_0^2$.

5.5. Самомодуляция радиоволн

Возмущения оказывают обратное влияние на волну E_1. При этом она приобретает дополнительную модуляцию:

$$E_1^2 = E_{10}^2 (1 + \mu \cos \Omega t)(1 - \mu_\Omega \cos(\Omega t - \varphi_\Omega)),$$

где μ_Ω приближенно дается выражением (5.4.5), в котором необходимо положить $\omega_1 = \omega_2$:

$$\mu_\Omega = \frac{1}{2} \frac{\gamma(0)\mu}{\sqrt{1+\Omega_1^2}} \frac{\omega_1^2 - \nu_0^2}{\omega_1^2 + \nu_0^2} \left(1 - e^{-2K_{10}}\right).$$

Важно, что $|\mu_\Omega| \le \mu$. При этом в спектре модуляции волны E_1 появляются гармоники с частотой 2Ω.

Процесс искажения формы модуляции сильной радиоволны иллюстрируется на рис. 5.5.

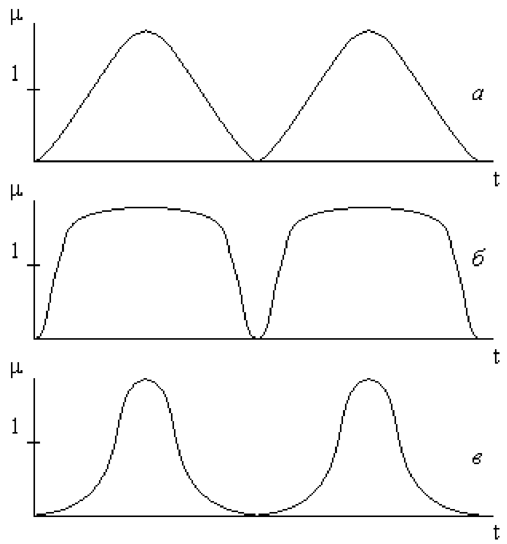


Рис. 5.5. Зависимость формы модуляции:

а – в линейной теории;

б – в случае эффекта помутнения плазмы;

в – в случае эффекта просветления плазмы

Самомодуляция радиоволны также является классическим эффектом, который, как и кросс-модуляция, *нежелателен* при ионосферной радиосвязи и радиовещании. Эти нелинейные эффекты ограничивают мощность радиостанций километрового и гектометрового диапазонов величиной $PG_{\max} \sim$ 100–500 кВт.

Вопросы для самоконтроля

1. Опишите эффект кроссмодуляции радиоволн в ионосфере.
2. Опишите эффект самомодуляции радиоволн в ионосфере.

Задачи

1. Оценить роль эффекта самомодуляции для вещательной радиостанции мощностью 1,5 МВт. Частота излучения – 500 кГц. Принять частоту соударений равной 10^5 с$^{-1}$.

2. Мощность вещательного радиоцентра составляет 0,5 МВт, частота радиопередающего устройства – 1 МГц. Оценить возможность проявления теплового механизма нелинейности и эффектов кросс-модуляции и самомодуляции. Параметры ионосферного слоя на высоте 80 км следующие: температура электронов – 250 К, частота соударений электронов с нейтралами – 10^6 с$^{-1}$.

5.6. Неустойчивости в ионосфере

Главное свойство плазмы, как уже отмечалось, состоит в том, что в ней легко возбуждаются многочисленные неустойчивости.

Нелинейные эффекты в околоземной плазме в основном те же, что обсуждались в разделах 2 и 4. Особое место занимают плазменные неустойчивости. В нижней ионосфере их генерация затруднена из-за высокой частоты соударений частиц. Зато в F-области ионосферы ($z \sim$ 200–400 км) неустойчивости легко возбуждаются. Здесь имеют место *самофокусировочная*, *резонансная*, *параметрическая* и другие типы неустойчивостей (см. подраздел 4.5).

5.6.1. Самофокусировочная неустойчивость

В ионосфере обычно реализуется *тепловая* самофокусировочная неустойчивость. Она возбуждается, если эффективная мощность установки $PG \geq$ 100 МВт при $f \sim$ 3–10 МГц. Неустойчивость приводит к расслоению плазмы. Вдоль линий геомагнитного поля образуются нити с пониженной концентрацией электронов. Их масштабы: $l_\perp \sim$ 50–1000 м, $l_\| \sim$ 10–100 км. Важно, что $l_\| \gg l_\perp$, $|\Delta N / N_0| \approx$ 1–5%.

В окрестности области, где $\omega \approx \omega_p$ или $\varepsilon \approx 0$, эффективность генерации неустойчивостей увеличивается; она может наблюдаться уже при $PG \sim$10 МВт.

5.6.2. Резонансная неустойчивость

В ионосферной F-области резонансная *ленгмюровская неустойчивость* развивается в поле *обыкновенной* волны в окрестности точки ее *отражения*, где $\omega \approx \omega_p$. Для возникновения неустойчивости требуются достижение порогового значения $(\Delta N / N_0)_{Ï} \sim 10^{-3}$, а также мощности установки $PG \geq$ 1–10 МВт при $f \sim$ 3–10 МГц. В этом случае $l_\perp \geq 1$ м, $l_\parallel \sim 1$ км, т. е., как и в случае самофокусировочной неустойчивости, $l_\parallel \gg l_\perp$.

Более важной, как оказалось, является резонансная неустойчивость на частоте *верхнего гибридного резонанса*. Различают тепловую и стрикционную неустойчивости.

Тепловая неустойчивость развивается в гиротропной ионосфере вблизи уровня верхнего гибридного резонанса (ВГР), где

$$f^2 = f_p^2 + f_B^2, \qquad f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}.$$

ВГР имеет место на 3–5 км ниже области отражения волны накачки обыкновенной поляризации. Пороговое значение $PG \sim$ 1–5 МВт, необходимая длительность импульса $\tau \sim$ 1–10 с. Величина $l_\perp \sim$ 0,1–20 м, $l_\parallel \gg l_\perp$.

Стрикционная неустойчивость требует $PG \geq 100$ МВт, $\tau \geq$ 1–10 мс при $f \sim$ 5–6 МГц. При этом также генерируются неоднородности N различных масштабов.

5.6.3. Распадные неустойчивости

Причиной распада служит *нагрев* электронов, *электрострикция* или *комбинационное рассеяние* на собственных частотах плазмы (ω_p, ω_B и т. п.). Им соответствуют ленгмюровская неустойчивость, вынужденное рассеяние Мандельштама–Бриллюэна (ВРМБ) и вынужденное рассеяние Рамана (ВКР).

Для ленгмюровской неустойчивости имеет место распад волны накачки на плазменную волну и ионный звук:

$$\omega = \omega_p + \omega_s.$$

Важно, что $\omega_s \ll \omega_p$, поэтому $\omega \approx \omega_p$.

ВРМБ идет по схеме:

$$\omega = \omega_1 + \omega_s,$$

где частотам ω и ω_1 соответствуют волна накачки и генерируемая поперечная электромагнитная волна.

В случае ВКР распад идет по схеме:

$$\omega = \omega_1 + \omega_p\,.$$

Что касается ВРМБ и ВКР, то они наблюдались экспериментально в F-области ионосферы при $\tau \sim 1$ мс, $f \sim 50$–500 МГц, $P \sim 2$–4 МВт и $G \sim 10^4$–10^5.

Добавим, что в последнее время определенное внимание уделяется поиску эффектов на *гармониках гирочастоты* электронов $f_B \approx 1{,}5$ МГц. Особое место в таких исследованиях занимает изучение *двойного резонанса*. В этом случае частота верхнего гибридного резонанса равна целому числу n значений f_B. В зависимости от условий в ионосфере $n = 3$–6.

Заметим, что неоднородность плазмы по высоте затрудняет развитие неустойчивостей из-за *выноса колебаний* из области синхронизма (см. пункт 4.5.3).

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите основные неустойчивости ионосферной плазмы.
2. Опишите самофокусировочную неустойчивость.
3. Опишите резонансную неустойчивость.
4. Опишите распадную неустойчивость.

5.7. Искусственные ионосферные неоднородности. Ракурсное рассеяние радиоволн

Как уже отмечалось в подразделе 5.6, развитие неустойчивостей приводит к генерации или усилению *неоднородностей* N с различными масштабами [18]. Важно, что при этом неоднородности сильно вытянуты вдоль геомагнитного поля, т. е. $l_\parallel \gg l_\perp$. Величина $\Delta N / N_0 \sim 10^{-3}$–$10^{-1}$. Такая система неоднородностей способна эффективно рассеивать радиоволны в широком диапазоне частот. Зависимость *эффективной площади рассеяния* σ от частоты рассеиваемой радиоволны f_2 показана на рис. 5.6.

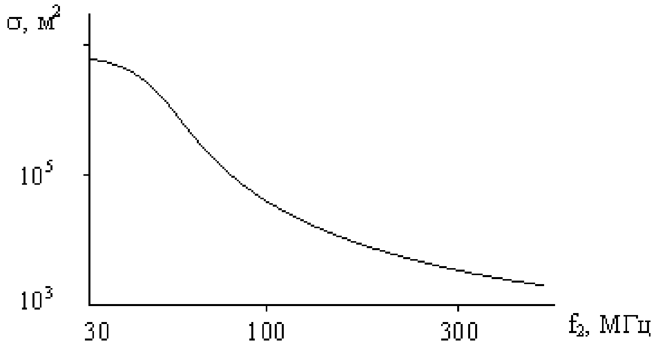


Рис. 5.6. Экспериментальная зависимость σ от f_2

При $f_2 \leq$ 10–30 МГц радиоволна отражается от ионосферы в ночных и дневных условиях соответственно. При больших f_2 в обычных условиях радиоволна свободно проникает через ионосферу, при наличии неоднородностей часть ее энергии рассеивается и возвращается в направлении к Земле. Это свойство искусственных неоднородностей N целесообразно использовать для создания новых *каналов связи*. Схема связи показана на рис. 5.7.

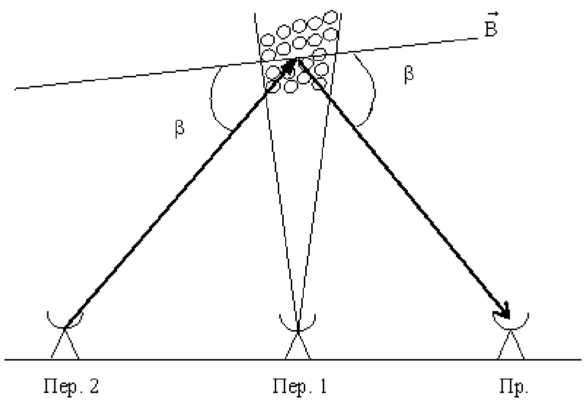


Рис. 5.7. Схема канала связи, основанного на ракурсном рассеянии:

Пер. 1 – мощная радиосистема, создающая рассеивающие неоднородности;

Пер. 2 – связной передатчик;

Пр. – связной приемник

Важно, что условие $l_{\|} \gg l_{\perp}$ приводит к *ракурсному* т. е. направленному рассеянию радиоволн. Величину σ грубо можно оценить по формуле:

$$\sigma = 4\pi R^2 \rho^2,$$

$$\rho^2 = \frac{\overline{\Delta\varepsilon^2}}{16} = \frac{\overline{\Delta n^2}}{4} = \frac{1}{16}\left(\frac{f_p}{f_2}\right)^4 \overline{\left(\frac{\Delta N}{N_0}\right)^2} n_H,$$

где R – расстояние от точки наблюдения до этой области, $n_H = L/\lambda$ – число неоднородностей, L – размер рассеивающей области. Например, при $f_2 = 300$ МГц, $f_p = 10$ МГц, $\Delta N / N_0 \approx 3{\cdot}10^{-2}$ имеем $\sigma \sim 10^3$ м^2 для $R = 3\,000$ км, $L = 100$ км, $\lambda = 1$ м.

Дальность распространения рассеянных сигналов может достигать $\sim$ 4000 км. Полоса пропускания канала связи определяется временем жизни неоднородностей и составляет величину ~ 1 кГц, что существенно ограничивает пропускную способность канала связи. Тем не менее, в США в 1970-х гг. были попытки использования такого канала связи. Мощная установка работала в непрерывном режиме с $PG \approx 100$ МВт и $f \sim 5$–10 МГц.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое структуризация ионосферной плазмы? К чему она приводит?

2. Что представляет собой ракурсное рассеяние радиоволн.

3. Опишите возможные применения ракурсного рассеяния радиоволн искусственными ионосферными неоднородностями.

Задачи

1. При ракурсном рассеянии радиоволн высота рассеивающей области равна 300 км. Вычислить максимальную дальность радиосвязи.

2. Оценить эффективную площадь рассеяния при ракурсном рассеянии радиоволн частотой 30–300 МГц.

5.8. Искусственное плазменное зеркало в атмосфере

Как уже отмечалось, в естественных условиях от ионосферы отражаются радиоволны с $f \leq 10$–30 МГц. Для увеличения f до ~ 1 ГГц требуется увеличить $f_p \sim \sqrt{N}$, т. е. N до 10^{16} м$^{-3}$. Такие N можно создать за счет *ударной ионизации* газа или *пробоя* атмосферы [5, 43].

В 1970-е гг. А. В. Гуревич предложил осуществлять пробой на высотах $z \sim 30$–60 км в поле двух скрещивающихся пучков радиоволн частотой $f_1 \sim 1$–6 ГГц [5]. Пробой возникает в области их пересечения при длительности импульса $\tau_{\text{пр}} \sim 10$–500 нс, для поддержания ионизации достаточно более коротких импульсов длительностью $\tau_{\text{п}} \sim 0{,}5$–10 нс с частотой повторения $\sim 10^2$–10^4 Гц. Мощность импульсов пробоя и поддержания $\sim 10^3$–10^4 МВт и $\sim 10^{-2}$–1 МВт соответственно. Диаметр зеркала антенны должен быть $d \sim 50$–100 м, при этом $G \sim 10^7$.

Ионизированная область (*плазменное зеркало*) имеет размер $\sim z\lambda / d \sim$ $10–10^2$ м. Схема связи показана на рис. 5.8.

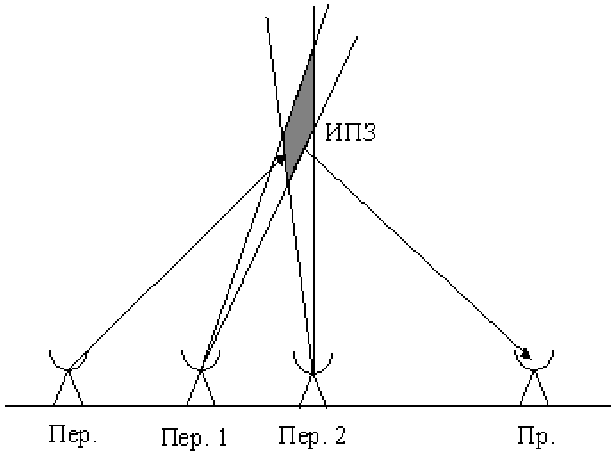


Рис. 5.8. Схема связи через искусственное плазменное зеркало (ИПЗ):

Пер. 1, Пер. 2 – мощные передающие системы для пробоя атмосферы;

Пер. – связной передатчик;

Пр. – связной приемник

Плазменное зеркало может использоваться для *ретрансляции* телевидения, радиотелефонной связи и радиовещания. Дальность связи – не менее 1000 км. Создание и эксплуатация таких ретрансляторов требует меньших энергетических и экономических затрат, чем действующие. К достоинствам канала связи следует отнести возможность *управления* размерами зон связи путем изменения формы и высоты зеркала, возможность осуществлять *направленную связь* с помощью маломощных средств, возможность организации связи с *труднодоступными регионами*. Недостатки такого канала связи еще предстоит изучить.

Добавим, что для обеспечения Украины таким каналом связи достаточно создать один комплекс для пробоя атмосферы.

Вопросы для самоконтроля

1. Что представляет собой искусственное плазменное зеркало в атмосфере? Как его можно использовать?

2. Опишите достоинства и недостатки использования искусственного плазменного зеркала.

Задачи

1. Оценить частотную емкость радиодиапазонов от ОНЧ (3–30 кГц) до ГВЧ (300–3000 ГГц) и количество каналов связи (радиотелеграф, радиовещание с AM и FM, телевидение, INTERNET) и максимальную дальность распространения радиосигналов.

2. При пробое атмосферы на высоте 30 км образовалась концентрация электронов 10^{22} м$^{-3}$. Оценить частоту радиоволны, которая еще сможет отражаться от искусственной ионизированной области.

3. Для создания искусственного плазменного зеркала требуются два радиопередающих устройства с импульсной мощностью 1 ГВт, длительностью импульса 10 нс, частотой повторения импульсов 1 кГц. Оценить среднюю и потребляемую мощности, если КПД системы составляет 20 %. Реализуема ли такая система?

5.9. Эффект Г. Г. Гетманцева

Данный эффект заключается в генерации разностной частоты Ω при воздействии на ионосферу мощной радиоволны, модулированной по амплитуде колебанием с частотой Ω [18]. Ионосфера при этом производит детектирующее действие. Эффект предсказан теоретически еще в 1950-е гг. В. Л. Гинзбургом и А. В. Гуревичем.

Первые эксперименты были поставлены в 1973 г. в г. Н. Новгороде под руководством Г. Г. Гетманцева. Величина эффекта оказалась неожиданно большой.

В. Ю. Трахтенгерц с сотрудниками показали, что эффект обусловлен не генерацией достаточно слабого нелинейного тока, а *модуляцией естественных ионосферных токов*, плотность которых значительно больше ($j_0 \approx 10^{-7}$–10^{-6} А/м^2). Промодулированный ток плотностью

$$j_\Omega = \frac{\Delta\sigma_\Omega}{\sigma_0} j_0,$$

где $\Delta\sigma_\Omega$ и σ_0 – соответственно возмущение проводимости и проводимость ионосферы на высотах ~ 100 км в невозмущенных условиях, эквивалентен *искусственной антенне* в ионосфере с горизонтальным размером $z\lambda / d \sim 10$ км. Эффект Гетманцева уверенно наблюдается в диапазонах частот $\sim$ 1–10 Гц и $\sim$ 1–10 кГц.

Данный эффект может использоваться для генерации электромагнитного излучения в указанных выше диапазонах, для диагностики параметров ионосферы и магнитосферы, ионосферных токов, для электромагнитного зондирования земной коры, поиска полезных ископаемых и других приложений.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем суть эффекта Гетманцева?
2. Опишите возможные применения эффекта Гетманцева.

5.10. Солнечные энергетические станции

С 1970-х гг. и по настоящее время обсуждаются проекты создания на геостационарной орбите ($z \approx$ 36 000 км) солнечных энергетических станций (СЭС). Предполагается преобразованную при помощи фотоэлементов солнечную энергию передавать на Землю в виде СВЧ пучков с $\lambda \sim$ 1–10 см.

Мощность СЭС может составлять $P \sim 10$ ГВт, коэффициент усиления передающей антенны – $G \sim 10^8$–10^9. Толщина пучка радиоволн $\Delta\alpha \approx \lambda / d_1 \sim 10^{-4}$–$10^{-3}$. Тогда размер приемной антенны $d_2 \approx z\Delta\alpha \approx$ 4–40 км. К.п.д. системы $\eta = \eta_1\eta_2 =$ 5–20 % ($\eta_1 \approx$ 10–30 % – к.п.д. производства энергии, $\eta_2 \approx$ 50–70 % – к.п.д. ее передачи).

Величина $PG \sim 10^{18}$–10^{19} Вт обеспечит увеличение T_e в F-области на 10–100% и такое же уменьшение N.

Одним из существенных препятствий на пути создания СЭС является распад СВЧ пучка на отдельные нити в результате *самофокусировочной неустойчивости* (см. пункты 4.5.1 и 5.6.1). В результате этого фронт волны перестает быть плоским, подвергается случайным флуктуациям, а средняя мощность пучка на входе приемной антенны начинает *падать* с увеличением фазовых флуктуаций во фронте волны:

$$\overline{P} = P e^{-\sigma_\varphi^2},$$

где P – мощность в отсутствие флуктуаций, σ_φ^2 – дисперсия фазовых флуктуаций.

Есть проекты, предполагающие передачу энергии с орбиты на Землю в виде мощного *лазерного луча*. При этом следует ожидать аналогичных эффектов, но уже в *нейтральной* атмосфере.

Механизм нелинейного взаимодействия может быть следующим. Если в какой-то точке влажность воздуха несколько меньше, чем в окрестности, то здесь уменьшается затухание лазерного пучка и амплитуда излучения несколько возрастает. Это приводит к дальнейшему испарению воды, увеличению амплитуды волны и развитию самофокусировочной неустойчивости в атмосфере. В результате возникают фазовые флуктуации во фронте волны и «развал» лазерного пучка.

Вопросы для самоконтроля

1. Опишите проект солнечной энергетической станции.
2. Проявятся ли нелинейные эффекты в ионосферной плазме при функционировании солнечной энергетической станции?

Задачи

1. Параметры солнечной энергетической станции таковы: мощность – 10 ГВт, коэффициент усиления антенны – 10^9, частота радиоволны – 3 ГГц. Может ли СВЧ пучок произвести заметные возмущения в максимуме ионизации (F-области ионосферы)? К чему это приведет?

2. Для условия предыдущей задачи рассчитайте основные параметры передающей и приемной антенн.

5.11. Крупномасштабные и глобальные возмущения в ионосфере. Воздействие на магнитосферу

До настоящего времени рассматривались процессы в ионосфере, возникающие *непосредственно* в облучаемой области. Такие возмущения имеют характерный горизонтальный масштаб ($L_{\Gamma} \sim$ 10–100 км), т. е. являются *локализованными*.

Могут ли распространяться возмущения далеко за пределы диаграммы направленности антенны? Ответ на этот вопрос далеко не очевиден.

В начале 1990-х гг. В. В. Васьков и др. при помощи численного моделирования показали, что значительные возмущения T_e и N могут переноситься вдоль магнитной силовой линии вплоть до магнитно-сопряженной области (расстояния 5–10 тыс. км). При этом волна с частотой $f \sim$ 3–5 МГц и $PG \approx$ 30–100 МВт отражается на высоте 250–300 км. Значительные вариации T_e и N, достигающие $\sim$ 10–100 %, имеют место лишь в ночное время. Результаты расчетов объяснили наблюдаемый ранее в США эффект возникновения сильных возмущений в F-области [18].

При помощи ИСЗ экспериментально изучены возмущения во внешней и магнитосопряженной ионосферах.

Показано, что во внешней ионосфере увеличение температуры электронов T_e достигало 500 К (20 %), а уменьшение их концентрации N равнялась 5–10 %. Горизонтальный размер возникающей области составлял около 200 км вдоль параллели и около 1–2 тыс. км вдоль меридиана.

В магнитосопряженной области T_e увеличивалась на 200 К (5 %), а N уменьшалась на единицы процентов.

Важно, что во внешней ионосфере возникали также неоднородности концентрации электронов ($l \approx$ 1–100 км, $\Delta N / N = 1 - 2\%$) и двухполярные вариации ионосферного электрического поля (характерный размер – $L_e \approx 200 - 1000$ км, $\Delta E_0 \approx 20 - 30$ мВ/м), а также увеличивалась интенсивность электромагнитного излучения в диапазонах 20 Гц – 20 кГц.

Существует, однако, другой класс возмущений, способных распространяться в горизонтальном направлении, причем для них $L_Г \sim$ 100–1000 км.

В начале 1970-х гг. Л. Ф. Черногором обнаружено, а затем и теоретически объяснено (вместе с К. П. Гармашом) *неизвестное ранее явление генерации крупномасштабных* (100–1000 км) *возмущений (неоднородностей)* в D-, E- и F- областях ионосферы, инициируемых мощным нестационарным радиоизлучением[1]. Появление возмущений подтверждено в 1990-х гг. в измерениях на российском спутнике (его высота $z \sim$ 1000 км), а также в ряде непрямых опытов.

Возникают две группы возмущений: первые – *апериодические* – имеют время запаздывания $\Delta t_1 \sim$ 5–10 мин, длительность $\Delta T_1 \sim$ 1–10 мин и четче проявляются в нижней ионосфере; вторые – *квазипериодические* – имеют время запаздывания $\Delta t_2 \approx$ 20–30 мин, причем $\Delta t_2 \approx R/v$, где R – расстояние между пунктами воздействия мощного радиоизлучения и наблюдения, $v \approx$ 0,3–0,6 км/с, $\Delta T_2 \approx$ 60–150 мин, период $T \approx$ 5–60 мин. Диагностика возмущений обычно осуществлялась на вертикальных радиотрассах над г. Харьковом, а возмущение – над г. Н. Новгородом ($R \approx$ 1000 км). Величина $PG \approx$ 100–300 МВт, $f \approx$ 5–7 МГц.

Теоретические исследования Л. Ф. Черногора показали, что второй тип возмущений связан с генерацией и распространением так называемых перемещающихся ионосферных возмущений (акустико-гравитационных волн)

---

[1] См.: Гармаш К. П. Эффекты в околоземной космической плазме, стимулированные воздействием мощного радиоизлучения / К. П. Гармаш, Л. Ф. Черногор. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. – 1998. – № 6. – С. 17–40.

в D-, E- и F - областях ионосферы (рис. 5.9). Они являются низкочастотным аналогом акустических волн. В этом случае возвращающей силой служит сила тяжести.

Что касается возмущений первого типа, то здесь дело обстоит сложнее. Величина энергии возмущений может быть больше энергии возмущающей волны. При одинаковых воздействиях реакция среды может различаться.

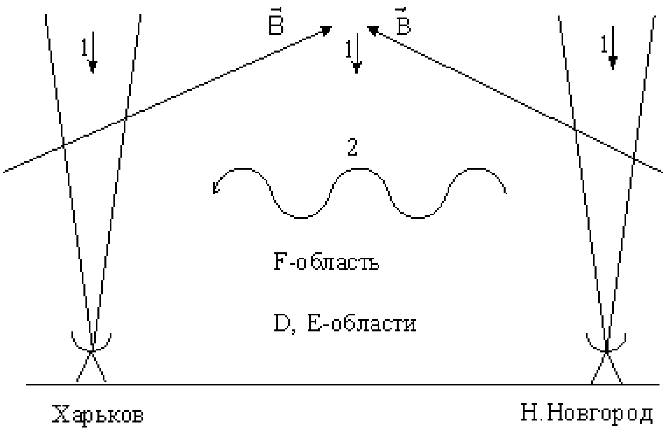


Рис. 5.9. Схема эксперимента по обнаружению крупномасштабных возмущений:

1 – возмущения первого типа, связанные с высыпанием частиц;

2 – распространение волн плотности (возмущения второго типа)

Все это говорит в пользу того, что изучаемая система является *открытой* и в нее поступает энергия извне (об открытых системах см. раздел 7). Для ионосферы такая энергия может привноситься из магнитосферы, а точнее, из *радиационного пояса* в виде *высыпающихся электронов* и *протонов*. Последствия высыпания частиц лучше всего обнаруживать в D-области ионосферы. Именно это и наблюдалось в экспериментах.

Таким образом, установлено, что мощное радиоизлучение с $PG \sim$ 100 МВт, энергией $W = P\Delta t \sim 10^8$ Дж и $f \sim$ 5–7 МГц, оказывая воздействие на ионосферу, вызывает крупномасштабные изменения в магнитосфере, а также в ионосфере.

Возмущения, по-видимому, могут носить даже *глобальный* характер, причем создаются они *непреднамеренно*. Так, на ИСЗ систематически наблюдалось усиление радиоизлучения плазмы над промышленно развитыми регионами Земного шара (над Европой и Северной Америкой). Именно здесь расположено большинство вещательных радиостанций, телецентров, радаров и т. д.

Кроме того, глобальные возмущения в околоземном космосе могут быть связаны с *непреднамеренным излучением линий электропередач*. Так, в 1970-х гг. в США удалось обнаружить уменьшение уровня *естественного радиоизлучения* в диапазоне частот $f \sim$ 1–10 кГц и рост *геомагнитной* *активности* в выходные дни (так называемый *уикэнд-эффект*). Определенный вклад в эти исследования внес А. С. Фразер-Смит.

Вопросы для самоконтроля

1. Возможны ли крупномасштабные и глобальные возмущения в ионосферной плазме, вызываемые мощным радиоизлучением?

2. Можно ли воздействовать мощным радиоизлучением наземных радиосредств на магнитосферу?

3. Чем угрожает геоэкологии и человечеству американская программа HAARP?

5.12. Солитоны в околоземном пространстве

Солитоны как нелинейные структуры неизменного профиля в условиях околоземной среды обязаны своим существованием *подпитке* энергией извне. Дело в том, что околоземное пространство – *открытая система*. В нее поступает энергия от Солнца в виде потока электромагнитного и корпускулярного излучений, от Земли в виде тепла, акустических и электромагнитных волн и т. д. Существует взаимодействие на уровне подсистем: тектоносфера (океан) – атмосфера – ионосфера – магнитосфера.

Механизмы подпитки могут быть связаны с ветрами, конденсацией водяных паров над океанами, выделением тепла, химическими реакциями и т. д. Подпитка энергией может возникать во время землетрясений, извержений вулканов, стартов и полетов крупных космических аппаратов, при воздействии на ионосферу мощных пучков радиоволн и т. д.

Солитоны могут генерироваться и распространяться в атмосфере (ионосфере) в виде волн плотности, акустических и электромагнитных волн, а также вариаций геомагнитного и, возможно, геоэлектрического полей (см. пункт 2.6.7).

Теоретические исследования солитонов в околоземной среде значительно опережают экспериментальные.

Вопросы для самоконтроля

1. Возникают ли солитоны в геокосмосе?

2. Могут ли распространяться одномерные солитоны в геокосмосе? А двухмерные?

5.13. Основные результаты

1. Основными механизмами нелинейности в околоземной плазме являются нагрев электронов и электрострикция. Ионизационный механизм пока что представлял лишь теоретический интерес. Важно, что в околоземной плазме $E_p : E_s : E_i : E_r = 4 \cdot 10^{-6} : 4 \cdot 10^{-4} : 10^{-2} : 1$.

2. Кросс-модуляция и самомодуляция радиоволн – классические нелинейные эффекты в ионосфере. Эти эффекты наиболее ярко проявляются диапазоне частот $f \sim$ 10–1000 кГц при мощностях $P \geq$ 100 кВт.

3. В ионосфере в достаточно слабых полях $E_0 \sim$ 0,1–10 В/м (т. е. $PG \sim$ 10–100 МВт при $f \sim$ 3–10 МГц) эффективно возбуждаются неустойчивости различных типов. Наибольшее значение имеют резонансные неустойчивости для волны накачки обыкновенной поляризации, а также параметрические неустойчивости. На частотах $f \sim$ 100–1000 МГц следует ожидать ВМРБ и ВКР Рамана.

Развитие неустойчивостей и связанных с ними процессов – основное направление в исследованиях взаимодействия мощного радиоизлучения с ионосферной плазмой.

4. Возбуждение неустойчивостей сопровождается расслоением плазмы и генерацией сильно анизотропных неоднородностей электронной концентрации. Последние ракурсно рассеивают падающие на них радиоволны, что может использоваться при создании новых каналов связи.

5. Практическая реализация искусственного плазменного зеркала позволит организовать новые каналы связи в диапазоне $f \sim$ 30–1000 МГц. Протяженность линий связи – до 2 тыс. км.

6. Эффект Гетманцева целесообразно использовать для повышения эффективности излучения достаточно длинных радиоволн, для диагностики среды, для разведки полезных ископаемых и т. д.

7. Развитие самофокусировочной неустойчивости – одно из серьезных препятствий для создания солнечных энергетических станций на геостационарной орбите.

8. Возможности воздействия на магнитосферу достаточно коротковолновым излучением ($\lambda \leq$ 100 м), возникновение крупномасштабных ($\sim$ 1000 км) и глобальных возмущений в околоземной среде, вопросы *геокосмической экологии* – основные проблемы при распространении мощных радиоволн в околоземной плазме.

РАЗДЕЛ 6. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ РАДИОФИЗИКЕ

Характер распространения и взаимодействия волн конечной амплитуды зависит от свойств среды – степени ее нелинейности, дисперсии скорости звука, диссипативных процессов.[1]

По своей физической сути нелинейные явления в статистической радиофизике ничем не отличаются от явлений, рассмотренных в нелинейной электродинамике. Различие состоит лишь в появлении или отсутствии *стохастичности*. Поэтому в данном разделе рассмотрим лишь математические методы решения нелинейных стохастических задач.

6.1. Постановка задачи

Необходимость применения статистики для решения задач нелинейной радиофизики возникает в следующих случаях:

– сильная электромагнитная волна модулирована по случайному закону;

– нелинейная среда статистически неоднородна;

– нелинейная среда содержит распределенные источники шума.

Во многих радиофизических задачах указанные эффекты проявляются одновременно.

Статистические задачи теории нелинейных волн и колебаний в математическом плане являются наиболее сложными задачами радиофизики.

При этом присутствуют *две «неприятности»* – нелинейность и стохастичность процессов. Для решения таких задач требовалась разработка методов решения *нелинейных стохастических уравнений*.

---

[1] См.: Наугольных К. А. Нелинейные волновые процессы в акустике / К. А. Наугольных, Л. А. Островский – М. : Наука, 1990. – 237 с.

6.2. Методы решения нелинейных стохастических задач

Анализ задач статистической радиофизики сводится к решению нелинейных дифференциальных уравнений со случайными начальными (краевыми) условиями, случайными коэффициентами и внешними силами. Такие уравнения называют *стохастическими дифференциальными уравнениями* (СДУ).

Методы решения СДУ можно условно разбить на две группы. В первом случае сначала находится *точное решение* уравнения, а затем вычисляются необходимые статистические характеристики.

Особенно просто обстоит дело при решении *линейных* СДУ. Пусть дано уравнение

$$\widehat{L}x(t) = \xi(t), \tag{6.2.1}$$

где $\widehat{L}$ – линейный оператор, $\xi(t)$ – случайная функция. Решение (6.2.1) имеет вид:

$$x(t) = \widehat{L}^{-1}\xi(t) \equiv \widehat{L}_1\xi(t), \tag{6.2.2}$$

где $\widehat{L}_1$ – также линейный оператор. Тогда, используя (6.2.2) и производя статистическое усреднение (здесь и далее обозначаемое чертой над функцией), получим

$$\overline{x}(t) = \overline{\widehat{L}_1\xi(t)} = \widehat{L}_1\overline{\xi}(t), \tag{6.2.3}$$

$$R_x(t_1,t_2) = \overline{x(t_1)x(t_2)} = \overline{\widehat{L}_1(t_1)\xi(t_1)\widehat{L}_1(t_1)\xi(t_2)} = \overline{\widehat{L}_1(t_1)\widehat{L}_1(t_2)\xi(t_1)\xi(t_2)} =$$

$$= \widehat{L}_1(t_1)\widehat{L}_1(t_2)\overline{\xi(t_1)\xi(t_2)} = \widehat{L}_1(t_1)\widehat{L}_1(t_2)R_\xi(t_1,t_2). \tag{6.2.4}$$

Аналогично можно вычислить и другие моменты случайного процесса $x(t)$.

Во втором случае точное решение аналитически найти не удается. Разработан ряд *специальных методов*, которые позволяют вычислить статистические характеристики в отсутствие точного решения. В этом состоит *преимущество* стохастических методов решения СДУ. Рассмотрим эти методы подробнее.

6.2.1. Усреднение точного решения

Рассмотрим в качестве примера генерацию неустойчивости при случайном изменении ее инкремента. Пусть решение дифференциального уравнения (см. 2.8.16) имеет вид:

$$A(t) = C_1 e^{\gamma A_0 t}, \qquad (6.2.5)$$

где $\gamma = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}$ – случайный параметр, распределенный по нормальному закону

$$w(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\gamma} e^{-\frac{(\gamma-\overline{\gamma})^2}{2\sigma_\gamma^2}}.$$

Тогда

$$\overline{A} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\gamma) w(\gamma) d\gamma = \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\gamma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma A_0 t} e^{-\frac{(\gamma-\overline{\gamma})^2}{2\sigma_\gamma^2}} d\gamma = C_1 e^{\overline{\gamma} A_0 t} e^{\frac{(\sigma_\gamma A_0 t)^2}{2}}.$$

Если $\sigma_\gamma \to 0$, то получаем известное детерминированное решение (6.2.5).

6.2.2. Методы линеаризации

Используя методы линеаризации, удается получить приближенные решения нелинейных СДУ.

Пусть СДУ имеет вид:

$$\widehat{L}x(t) = f(x) + \xi(t), \qquad (6.2.6)$$

где $f(x)$ – нелинейная функция. Если предварительный анализ решения показывает, что x сосредоточено в окрестности x_0, то $f(x)$ целесообразно представить следующим образом:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \equiv \alpha + \beta x, \qquad (6.2.7)$$

где α, β – известные коэффициенты. С учетом (6.2.7), СДУ (6.2.6) сведется к такому:

$$\widehat{L}x(t) = \alpha + \beta x(t) + \xi(t),$$

или

$$\left(\widehat{L} - \beta\right) x(t) = \alpha + \xi(t). \qquad (6.2.8)$$

Решение (6.2.8) представляется следующим образом:

$$x(t) = \widehat{L}_1(\alpha + \xi(t)), \qquad (6.2.9)$$

где $\widehat{L}_1$ – оператор, обратный $\left(\widehat{L} - \beta\right)$. Имея (6.2.9), можно вычислить любые моменты $x(t)$, аналогично (6.2.3), (6.2.4).

Метод линеаризации также эффективен, если флуктуации $\tilde{x}(t) = x - \overline{x}(t)$ малы по сравнению со средним значением $\overline{x}(t)$, т. е. $|\tilde{x}| \ll |\overline{x}|$. Для решения (6.2.6) $f(x)$ представим в виде:

$$f(x) = f(\overline{x} + \tilde{x}) \approx f(\overline{x}) + f'(\overline{x})\tilde{x} \equiv \alpha + \beta\tilde{x}\,.$$

Тогда

$$\widehat{L}x(t) \approx \alpha + \beta\tilde{x} + \xi(t). \tag{6.2.10}$$

Усредняя (6.2.10), получим

$$\overline{\widehat{L}x(t)} = \overline{\alpha + \beta\tilde{x} + \xi(t)}$$

или

$$\widehat{L}\overline{x}(t) = \alpha + \overline{\xi}(t)\,, \qquad \alpha = f(\overline{x})\,. \tag{6.2.11}$$

Как видно из (6.2.11), для $\overline{x}\,(t)$ имеем *нелинейное детерминированное уравнение*. Вычитая из (6.2.10) соотношение (6.2.11), получим уравнение для $\tilde{x}$:

$$\widehat{L}x(t) - \widehat{L}\overline{x}(t) \approx \beta\tilde{x} + \xi(t) - \overline{\xi}(t)$$

или

$$\widehat{L}\tilde{x}(t) = \beta\tilde{x}(t) + \tilde{\xi}(t), \quad \tilde{\xi}(t) = \xi(t) - \overline{\xi}(t). \tag{6.2.12}$$

Решение (6.2.12) имеет вид:

$$\tilde{x}(t) = \widehat{L}_1\tilde{\xi}(t), \qquad \widehat{L}_1 = \left(\widehat{L} - \beta\right)^{-1}.$$

Тогда решение исходного уравнения (6.2.6) представляется таким образом:

$$x(t) = \overline{x}(t) + \tilde{x}(t)\,.$$

6.2.3. Метод статистической линеаризации

Обратимся снова к уравнению (6.2.6). Идея метода статистической линеаризации основана на следующем. Если функция $f(x)$ – четная, она заменяется простейшей четной функцией – константой, которую обозначим α; если $f(x)$ – нечетная, то ее заменяем простейшей нечетной функцией βx (где $\beta = \mathrm{const}$). Константы α и β получают из дополнительных условий. Часто удобно поступать так. Составим функционалы

$$I(\alpha) = \overline{\left(\alpha - f(x)\right)^2}\,, \tag{6.2.13}$$

$$I(\beta) = \overline{\left(\beta x - f(x)\right)^2} \tag{6.2.14}$$

и потребуем их минимума. Для этого продифференцируем (6.2.13), (6.2.14) соответственно по α и β и получим:

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = \overline{2\left(\alpha - f(x)\right)} = 2\left(\alpha - \overline{f}(x)\right),$$

$$\frac{\partial I(\beta)}{\partial \beta} = \overline{2\left(\beta x - f(x)\right)x} = 2\left(\beta\overline{x^2} - \overline{f(x)x}\right).$$

Из равенства нулю производных имеем:

$$\alpha = \overline{f(x)}, \quad \beta = \frac{\overline{xf(x)}}{\overline{x^2}}. \tag{6.2.15}$$

Разработаны и другие способы задания α и β.

Добавим, что для статистического усреднения в (6.2.15) необходимо знать закон распределения случайной величины $x(t)$.

Рассмотрим применение метода статистической линеаризации. Для четной функции $f(x)$ уравнение (6.2.6) примет вид:

$$\widehat{L}x(t) = \alpha + \xi(t), \qquad \alpha = \overline{f}(x).$$

После усреднения получим

$$\widehat{L}\overline{x}(t) = \alpha, \tag{6.2.16}$$

а для $\tilde{x}(t) = x(t) - \overline{x}(t)$:

$$\widehat{L}\tilde{x}(t) = \xi(t). \tag{6.2.17}$$

Из (6.2.16), (6.2.17) имеем: $\tilde{x}(t)$ и $\overline{x}(t)$, а значит, и $x(t)$.

Для нечетной функции $f(x)$ уравнение (6.2.6) сводится к следующему:

$$\widehat{L}x(t) \approx \beta x(t) + \xi(t).$$

Тогда

$$\widehat{L}\overline{x}(t) \approx \beta\overline{x}(t),$$

$$\widehat{L}\tilde{x}(t) \approx \beta\tilde{x}(t) + \xi(t).$$

Из этих соотношений определяют $\overline{x}(t)$, $\tilde{x}(t)$, а значит $x(t)$.

6.2.4. Уравнение Дайсона для средних

В этом методе идея линеаризации используется *частично*. Пусть требуется решить уравнение вида

$$\widehat{L}x(t) = \widehat{N}(x,\xi) + f(t), \tag{6.2.18}$$

где $\xi(t)$, $f(t)$ – случайные функции, $\widehat{N}$ – нелинейный функционал.

Усредняя (6.2.18), получим

$$\widehat{L}\overline{x}(t) = \overline{\widehat{N}} + \overline{f}, \tag{6.2.19}$$

где $\overline{\widehat{N}}$ – заранее неизвестный оператор, так как он зависит от $x(t)$. Вычитая из (6.2.18) выражение (6.2.19), приходим к уравнению для $\tilde{x}(t)$:

$$\widehat{L}\tilde{x}(t) = \widehat{N} - \overline{\widehat{N}} + f - \overline{f}. \tag{6.2.20}$$

Линеаризуя $\widehat{N}(x,\xi)$ по $\tilde{x} = x - \overline{x}$ и $\tilde{\xi} = \xi - \overline{\xi}$, получим

$$\widehat{N}(x,\xi) \approx \widehat{N}(\overline{x},\overline{\xi}) + \left(\frac{\partial \widehat{N}}{\partial x}\right)_{\overline{x}} \tilde{x} + \left(\frac{\partial \widehat{N}}{\partial \xi}\right)_{\overline{\xi}} \tilde{\xi} \equiv \widehat{N}(\overline{x},\overline{\xi}) + \gamma\, \tilde{x} + \delta\tilde{\xi}\,, \quad (6.2.21)$$

где $\gamma,\ \delta$ – известные коэффициенты. Усредняя (6.2.21) с учетом того, что $\overline{\tilde{\xi}} = \overline{\tilde{x}} = 0$, имеем:

$$\overline{\widehat{N}}(x,\xi) \approx \widehat{N}(\overline{x},\overline{\xi})\,. \quad (6.2.22)$$

Подстановка (6.2.21), (6.2.22) в выражение (6.2.20) дает:

$$\widehat{L}\tilde{x}(t) \approx \gamma\tilde{x} + \delta\tilde{\xi} + \tilde{f}\,, \qquad \tilde{f} = f - \overline{f}\,. \quad (6.2.23)$$

Отсюда находится $\tilde{x}(t)$ в первом приближении:

$$\tilde{x}(t) \approx \tilde{x}^{(1)}(t) = \widehat{L}_1\left(\delta\tilde{\xi} + \tilde{f}\right),$$

$$\widehat{L}_1 = \left(\widehat{L} - \gamma\right)^{-1}.$$

Подставляя $x(t) \approx \tilde{x}^{(1)}(t)$ в $\widehat{N}(x,\xi)$ и выполняя статистическое усреднение, получим, что

$$\overline{\widehat{N}}(x,\xi) = F(\overline{x})\,,$$

т. е. $\overline{\widehat{N}}$ зависит только от $\overline{x}$. После этого (6.2.19) перепишется в виде

$$\widehat{L}\overline{x}(t) \approx F(\overline{x}) + \overline{f}\,. \quad (6.2.24)$$

Уравнение (6.2.24) – в общем случае нелинейное – носит название *уравнения Дайсона* для средних в приближении Бурре.

6.2.5. Понятие об уравнении Фокера–Планка

Пусть решение нелинейного уравнения вида

$$\widehat{N}x(t) = \xi(t)$$

неизвестно. Случайность $x(t)$ обусловлена тем, что коэффициенты СДУ или $\xi(t)$ заданы случайными функциями времени. Если эти функции являются δ-коррелированными, можно получить дифференциальное уравнение, решением которого будет *распределение плотности вероятности* $w(x,t)$. В физике уравнение для $w(x,t)$ называется *уравнением Фокера–Планка*. Математики называют его обычно *уравнением Колмогорова* – по имени ученого, давшего ему строгое обоснование. Зная $w(x,t)$, можно вычислить любые статистические характеристики процесса $x(t)$. Например, для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = a(x) + b(x)\xi(t),$$

где $\overline{\xi}(t) = 0$, $R_\xi(\tau) = 2\sigma_\xi^2\delta(\tau)$, σ_ξ^2 – дисперсия процесса $\xi(t)$, $\delta(\tau)$ – дельта-функция, уравнение Фокера–Планка имеет вид:

$$\frac{\partial\, w}{\partial\, t} = -\frac{\partial}{\partial\, x}K_1 w + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\, x^2}K_2 w,$$

где $K_1 = a + b\sigma_\xi^2$, $K_2 = 2\sigma_\xi^2 b^2$.

6.3. Основные результаты

1. При решении нелинейных задач статистической радиофизики одновременно возникают две «неприятности» – случайность и нелинейность.

2. К основным математическим методам решения нелинейных СДУ относятся: усреднение точного решения, линеаризация, статистическая линеаризация и их модификации. В ряде случаев полезными оказываются решения уравнений Дайсона для средних и Фокера–Планка.

3. Нелинейные явления в статистической радиофизике принципиально ничем не отличаются от явлений в нелинейной электродинамике. Различие заключается в появлении стохастичности.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается особенность нелинейных явлений в статистической радиофизике?
2. Перечислите методы решения нелинейных стохастических задач.
3. Опишите метод усреднения точного решения.
4. Опишите методы линеаризации нелинейных стохастических уравнений.
5. Опишите метод статистической линеаризации.
6. Получите уравнение Дайсона для средних.
7. Что дает уравнение Фокера–Планка?

Задачи

1. Путем усреднения точного решения нелинейной задачи вычислить $\overline{A(t)}$, $\overline{A^2(t)}$, $\sigma_A^2(t)$ для процесса, описываемого выражением

а) $A(t) = A_0 e^{\lambda t}$,

б) $A(t) = A_0 \mathrm{ch}^{-1}\xi,\ \xi = x - ut.$

Заданы следующие моменты случайного процесса $A_0(t)$: $\overline{A_0}$ и дисперсия σ_0^2.

2. Считая, что $|x| \ll 1$, и используя метод линеаризации, решить стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t), \quad x(0)=0.$$

где $\xi(t)$– заданный случайный процесс, для случаев:

а) $f(x) = e^{-x}$,

б) $f(x) = \sin x$.

Вычислить $\overline{x(t)}$, полагая $\overline{\xi(t)} = 0$.

3. Используя метод статистической линеаризации, решить стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t), \qquad x(0) = 0,$$

где $\xi(t)$– заданный случайный процесс. Принять, что

а) $f(x) = \sin x$,

б) $f(x) = x^3$.

Закон распределения x – нормальный с $\overline{x} = 0$ и дисперсией σ_x^2.

4. Получить уравнение Дайсона для стохастического дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t), \qquad x(0) = 0,$$

где $\xi(t)$– заданный случайный процесс. Принять, что

а) $f(x) = \cos x$,

б) $f(x) = \sin x$.

РАЗДЕЛ 7. АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ РАДИОФИЗИКИ

Проблема детерминированности и случайности, предопределенности и непредсказуемости, зародившись много веков назад, продолжает оставаться одной из фундаментальных и острых проблем естествознания.[1]

В настоящем разделе рассматриваются две проблемы: появление *хаоса* в простых детерминированных системах и возникновение *самоорганизации* в хаосе. Приводятся примеры этих явлений из радиофизики и электроники, а также других наук. Оказывается, что подобные явления имеют место в природе в целом, и ими занимаются различные науки, к которым относятся физика, химия, биология, социология, экономика, медицина и др. [1, 9, 15, 16, 19, 33, 35, 39, 41].

7.1. Детерминированный хаос в радиофизике

Рассмотрим особенности детерминированного хаоса.

7.1.1. Понятие хаоса. Математический аппарат хаоса

При рассмотрении нелинейных явлений в статистической радиофизике (глава 6) отмечалось, что стохастичность возникает вследствие случайной

[1] См.: Дмитриев А. С. Стохастические колебания в радиофизике и электронике / А. С. Дмитриев, В. Я. Кислов. – М. : Наука, 1989. – 280 с.

модуляции волны, статической неоднородности среды или же из-за наличия распределенных источников шума. В этой главе будем считать отсутствующими указанные причины.

Оказывается, что хаос может возникнуть в очень простых детерминированных системах, но непременно нелинейных и динамических. Поэтому такой хаос называется *детерминированным,* или *динамическим*. Термин «хаос» отражает *факт непредсказуемости* поведения системы. Хаос приводит к *деградации* эволюционирующей системы.

Детерминированный хаос следует отличать от просто случайного процесса, так как первый обусловлен внутренними взаимосвязями, являющимися результатом нелинейности системы. Хаос описывается при помощи понятия *структуры*. При детерминированном хаосе они образуются одинаково часто. Структуры детерминированного хаоса поражают исследователя *разнообразием* и *симметрией*. В динамическом хаосе есть *гармония*, он значительно красивее обычного случайного процесса. И хотя невозможно предугадать, какая структура возникнет из хаоса, удается предсказать тип возможной структуры.

Геометрическим образом хаоса являются *странные аттракторы* – подмножества, на которых траектории в фазовом пространстве не обладают свойством устойчивости[1]. Сечение таких аттракторов представляет собой хаотические фигуры, которые относятся к так называемым *фракталам*.

Термин «фрактал» происходит от английского fractional – *дробный*. Его ввел в обращение математик из США Б. Мандельброт. *Фракталом* называется объект, обладающий двумя основными свойствами – *самоподобием* (достаточно локального самоподобия) и *дробной размерностью*. Последнее требует дополнительного пояснения [26].

7.1.2. Понятие о геометрии фракталов. Фракталы в математике и природе

Геометрия фракталов изучает математические свойства геометрических объектов с дробной размерностью.

Целочисленную размерность в математике называют *топологической*. Топологическая размерность d_{T} точки, кривой и поверхности равна

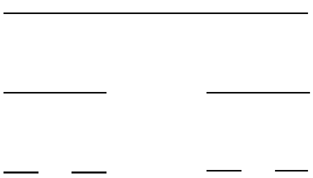
---

[1] Аттрактором называется подмножество фазового пространства, к которому стягиваются фазовые траектории. На плоскости оно представляет собой точку или предельный цикл.

соответственно 0, 1 и 2. Однако не все геометрические объекты имеют целочисленную размерность.

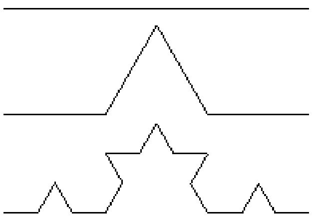
Дробная размерность d_{H} введена в 1918 г. Ф. Хаусдорфом и носит его имя. Иногда ее называют *размерностью Хаусдорфа–Базековича*.

Впервые фракталы появились в математике на рубеже XIX и XX в. Их примерами являются *канторово множество* (рис. 7.1), *кривая Кох* (рис. 7.2), *ковер Серпинского* (рис. 7.3) и др. [10]. Алгоритм образования множеств понятен из рисунков. В качестве исходного берется отрезок единичной длины.



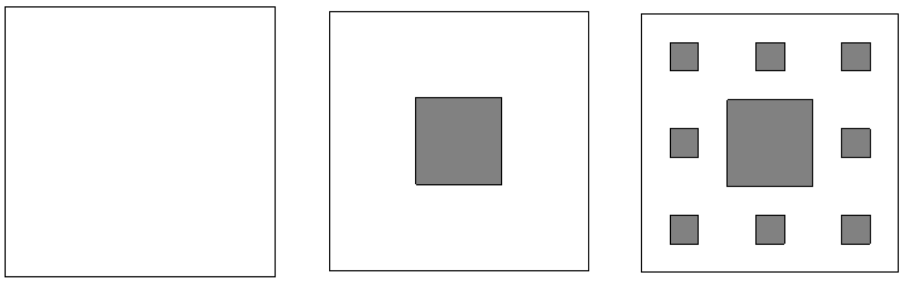
и т. д.

Рис. 7.1. Образование канторового множества. Выбрасывается средняя часть отрезка, равная 1/3 его длины



и т. д.

Рис. 7.2. Образование кривой Кох. Средний отрезок длиной 1/3 заменяется двумя такой же длины



и т. д.

Рис. 7.3. Образование ковра Серпинского. Заштрихованные квадраты выбрасываются

Хаусдорфову размерность множества вычисляют так. Пусть исследуемое множество погружено в пространство размерности d_{T}. Покроем это множество d_{T}-мерными «кубиками» со стороной r. Пусть «объем» кубика – $r^{d_{\text{H}}}$. Тогда число кубиков в единичном объеме ($V = 1$) равно:

$$N(r) = \frac{V}{r^{d_{\text{H}}}} = \frac{1}{r^{d_{\text{H}}}}.$$

Отсюда

$$d_{\text{H}} = \frac{\ln N(r)}{\ln \dfrac{1}{r}}.$$

При $r \to 0$ (или числе повторений процедуры алгоритма $n \to \infty$) нужно вычислить предел

$$d_{\text{H}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln N(r_n)}{\ln \dfrac{1}{r_n}}.$$

Приведем примеры вычислений d_{H}.

Рассмотрим подробнее канторово множество. До деления отрезка его длина $r_0 = 1$, число отрезков $N = 1$, после первого деления число оставшихся отрезков $N = 2$, длина $r_1 = 1/3$. Далее алгоритм повторяется. Для удобства результаты запишем следующим образом.

Номер шага	Количество оставшихся отрезков	Длина отрезка
$n = 0$	$N = 1$	$r_0 = 1$,
$n = 1$	$N = 2$	$r_1 = 1/3$,
$n = 2$	$N = 2^2$	$r_2 = (1/3)^2$,
...	...	...
$n = n$	$N = 2^n$	$r_n = (1/3)^n$.

Тогда

$$d_{\text{H}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln N(r_n)}{\ln \dfrac{1}{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}63.$$

Очевидно, что $0 < d_{\text{H}} < 1$. Таким образом, канторово множество – это уже не линия ($d_{\text{H}} = 1$), но и не совокупность точек ($d_{\text{H}} = 0$). Можно сказать, что это *«густое» множество точек*.

Вычислим длину выброшенных отрезков:

$$l = \frac{1}{3} + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + 2^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n + ...$$

Рассматривая эту сумму как сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $a_1 = 1/3$ и знаменателем $q = 2/3$, получим

$$l = \frac{a_1}{1-q} = 1.$$

Таким образом, длина оставшейся части $l_{\text{îñ}} = 1 - l = 0$. Следовательно, $d_{\text{T}} = 0$, $d_{\text{H}} > d_{\text{T}}$.

Для кривой Кох имеем:

$$\begin{array}{lll}
n = 0 & N = 1 & r_0 = 1, \\
n = 1 & N = 4 & r_1 = 1/3, \\
n = 2 & N = 4^2 & r_2 = (1/3)^2, \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
n = n & N = 4^n & r_n = (1/3)^n.
\end{array}$$

Отсюда

$$d_{\text{H}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln N(r_n)}{\ln \dfrac{1}{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}26.$$

Очевидно, что $1 < d_{\text{H}} < 2$, в то время как $d_{\text{T}} = 1$. Кривая Кох – это уже не линия ($d_{\text{H}} = 1$), но еще и не поверхность ($d_{\text{H}} = 2$). Можно сказать, что это *«толстая» линия*. Интересно, что ее длина $l = \infty$. Покажем это:

$$l = \lim_{n\to\infty} N(r_n) r_n = \lim_{n\to\infty} 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty.$$

В случае ковра Серпинского имеем:

$$\begin{array}{llll}
n = 0 & N = 1 & r_0 = 1 & S_0 = 1, \\
n = 1 & N = 8 & r_1 = 1/3 & S_1 = (1/3)^2, \\
n = 2 & N = 8^2 & r_2 = (1/3)^2 & S_2 = (1/3)^4, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
n = n & N = 8^n & r_n = (1/3)^n & S_n = (1/3)^{2n}.
\end{array}$$

Здесь S_1, S_2 ... – площади соответствующих выбрасываемых квадратов N – число оставшихся квадратов. Тогда

$$d_{\text{H}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln N(r_n)}{\ln \dfrac{1}{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1{,}89.$$

Видно, что $1 < d_{\text{H}} < 2$, $d_{\text{H}} < d_{\text{T}} = 2$. Таким образом, ковер Серпинского – это уже не поверхность ($d_{\text{H}} = 2$), но и не линия ($d_{\text{H}} = 1$). Можно сказать, что это *«дырявая» поверхность*.

Вычислим площадь выброшенных квадратов:

$$S = S_1 + 8S_2 + 8^2 S_3 + ... + 8^{n-1} S_n + ... = \frac{a_1}{1-q},$$

где $a_1 = S_1 = (1/3)^2$, $q = 8S_2 / S_1 = 8S_3 / S_2 = ... = 8/9$. Видно, что $S = 1$, площадь оставшейся поверхности $S_{\hat{\imath}\,\tilde{n}} = 1 - S = 0$.

Рассмотренные примеры показывают, что фракталы задают *математическими алгоритмами*.

Описанные выше фракталы принадлежат к *регулярным* фракталам.

Фракталы могут быть *стохастическими*. К ним относится, в частности, траектория броуновской частицы, для которой $d_{\text{T}} = 1$, $d_{\text{H}} = 2$ или 3 соответственно при движениях на плоскости или в пространстве.

На практике с фракталами впервые столкнулись, пожалуй, в середине XX в. при измерении длины береговой линии Великобритании. Оказалось, что ее длина l зависит от длины измерителя. Такая зависимость исчезла, когда предположили, что $N(r_n) = \left(\dfrac{l}{r_n}\right)^{d_{\text{н}}}$, где d_{H} – дробное число.

После этого события число открытых в природе фракталов стало быстро увеличиваться. Оказалось, что при помощи фракталов можно описать облака, неровности ландшафта, деревья, молниевый разряд, трещины после землетрясений, поверхность хромосферы Солнца, звездные объекты и т. д.

Наличие фракталов можно обнаружить в музыке как классической, так и современной. (Примером являются песни ансамбля «Битлз»).

Абстрактное искусство часто бывает фрактальным.

Таким образом, окружающий нас мир *адекватно* описывается лишь фрактальной геометрией. Евклидова, а также сферическая геометрии являются лишь *грубыми идеализациями* или *«карикатурами»* на фрактальную геометрию.

Так что же такое фрактал? *Фрактал – это густое множество точек, толстая линия, «вспененная» поверхность и даже «вспененное» пространство – время.*

Фрактал – это язык новой геометрии.

Фрактал – это новое описание действительности.

Фрактал – это новое («дробно-размерное») мировоззрение.

7.1.3. Формирование идеи динамического хаоса

Математические основы описания хаоса в нелинейных динамических системах берут свое начало от работ А. Пуанкаре, выполненных на рубеже XIX–XX вв.

По-видимому, стохастичность в нелинейной радиотехнике наблюдали еще в 1920–1930-е гг., однако связывали ее с *шумами*. Даже в 1960-е гг. С. Рейс, Дж. Зеленс, обнаружив сплошной спектр колебаний в системе электронный пучок – бегущая волна, объяснили его усилением внутренних шумов.

Между тем, в конце 1950-х гг. Б. В. Чириков обратил внимание на то, что колебания нелинейного осциллятора, находящегося под действием внешних многочастотных сил, а также системы нелинейных осцилляторов могут быть не периодическими, а значительно более сложными, обладать *сплошным спектром*. Последнее обстоятельство является *признаком хаоса*.

Первая математическая модель, описывающая динамический хаос, была численно исследована американским метеорологом Э. Лоренцом в 1963 г.

Модель Лоренца имела вид:

$$\dot{x} = -a(x + y),\ \ a > 0,$$
$$\dot{y} = -y + bx - xz,\ \ b > 0,$$
$$\dot{z} = -cz + xy,\ \ c > 0.$$

Э. Лоренц впервые обнаружил необычный вид фазовых траекторий, названных в 1971 г. Д. Рюэлем и Ф. Такенсом *странными аттракторами* (аттракторами Лоренца).

Лоренц показал, что *небольшие изменения в начальных условиях* системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка приводили к переходу от порядка (т. е. устойчивости фазовых траекторий) к хаосу (к их неустойчивости). Это явление затем было названо *«баттерфляй»-эффектом* (*эффектом «бабочки»*). Имелось в виду то, что взмах крыльев бабочки может привести к непредсказуемым метеоэффектам.

Настоящий всплеск интереса к детерминированному хаосу наблюдается с начала 1970-х гг., когда было обнаружено, что в простейших генераторах могут возникать хаотические колебания.

Такие колебания в ряде случаев также описываются моделью Э. Лоренца. Она позволяет изучать временной детерминированный хаос.

Учет пространственной протяженности динамической системы может привести к появлению хаоса даже тогда, когда это невозможно в случае неограниченной системы. Динамика такой системы описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Хаос в этом случае именуется *пространственно-временным*. Его стали изучать в конце минувшего века.

Большой вклад в развитие работ по детерминированному хаосу в радиофизике и электронике внесли Б. С. Анищенко, А. В. Гапонов-Грехов, А. С. Дмитриев, В. Я. Кислов, П. С. Ланда, Ю. И. Неймарк, М. Н. Рабинович, Д. И. Трубецков и др. [1, 9, 15, 19, 39, 41].

Появилась соответствующая школа и в ХНУ имени В. Н. Каразина (О. А. Третьяков, Д. М. Ваврив и их ученики).

Математические основы детерминированного хаоса и методов его описания заложены в работах А. М. Ляпунова, А. Н. Колмогорова, Б. Мандельброта, В. И. Арнольда, Я. Г. Синая, М. Фейгенбаума и др. [26].

Развитие детерминированного хаоса в различных физических системах описали Г. М. Заславский и Р. З. Сагдеев в своей знаменитой книге «Нелинейная физика. От маятника до турбулентности и хаоса» [10].

7.1.4. Причины возникновения хаоса

Рассмотрим нелинейный осциллятор в пульсирующей потенциальной яме. Его движение описывается уравнением [31]

$$\ddot{x} + x - x^3 = \mu \sin t,$$

где $\mu = \mathrm{const}$, t – безразмерное время. При $\mu = 0$ фазовый портрет системы показан на рис. 7.4.

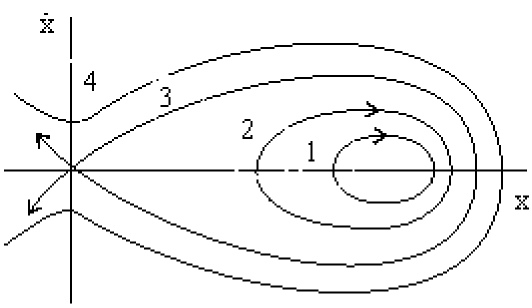


Рис. 7.4. Фазовый портрет нелинейного осциллятора:

1 – гармонические колебания;

2 – квазигармонические колебания;

3 – сепаратриса;

4 – инфинитное движение

Движение осциллятора качественно не изменится и при $\mu \neq 0$, если только в разные моменты времени точки фазовой траектории попадают в одну и ту же сторону от сепаратрисы, разделяющей финитное и инфинитное движение.

Если же в течение периода колебаний точки фазовой траектории попадают в *разные* области пространства, разделенные сепаратрисой, то движение становится хаотическим. Математически его связывают с существованием *гомоклинической структуры*.

Известно, что фазовые траектории пересекаться не могут. Как же они оказываются по разные стороны от сепаратрисы? Для этого нужно выйти в трехмерное фазовое пространство, т.е. рассмотреть систему с *полутора степенями свободы*. Пример возвращающейся неустойчивости траектории показан на рис. 7.5.

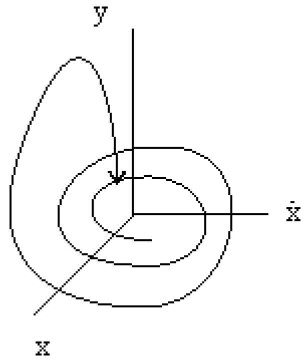


Рис. 7.5. Фазовая траектория в системе с полутора степенями свободы, т. е. в трехмерном фазовом пространстве

Таким образом, причиной возникновения хаоса служит *неустойчивость фазовых траекторий*. При этом расстояние между ними

$$d \sim e^{\lambda t},$$

где λ – показатель неустойчивости.

7.1.5. Условия и сценарии возникновения хаоса

Для того чтобы в системе возник хаос, она должна удовлетворять следующим условиям [1, 9, 16, 19, 31, 33, 39]:

– быть нелинейной;

– быть неравновесной или открытой системой, т. е. должен быть приток энергии, вещества или информации извне;

– обладать $n \geq 1{,}5$ степенями свободы;

– допускать возникновение коллективных (кооперативных) процессов.

Наиболее универсальным путем возникновения хаоса есть *бифуркация*[1] *удвоения периода*. Он детально изучен М. Фейгенбаумом. Переход к хаосу может осуществиться постепенно (мягкий режим) и скачком (жесткий режим). Последний реализуется, в частности, в модели Лоренца. Периодические колебания могут *перемежаться* с хаотическими (рис. 7.6).

---

[1] Бифуркация – качественное изменение решений и траекторий в фазовом пространстве при изменении параметров системы.

1.1.1. Примеры хаотических радиофизических систем

Для появления хаотических режимов в радиофизических системах в классический колебательный контур необходимо добавить *внешнее воздействие* либо изменить *вид нелинейности*, либо же *увеличить размерность* фазового пространства (число степеней свободы) [1, 9].

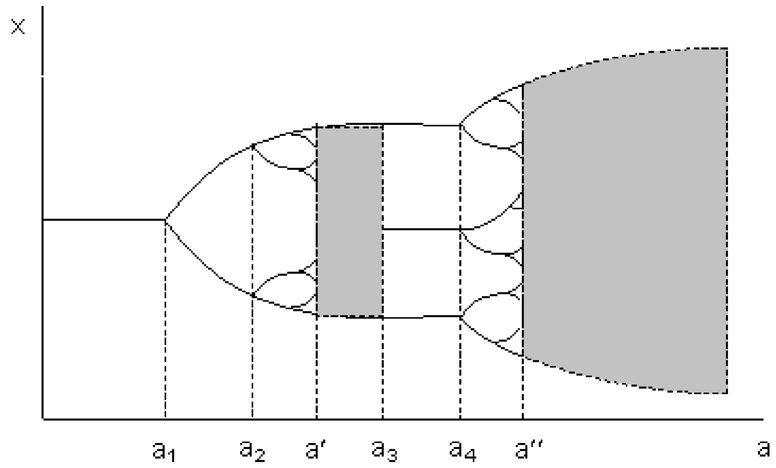


Рис. 7.6. Бифуркационная диаграмма: $0 < a < a_1$ *– одно установившееся колебание с периодом* T_1*;* $a_1 < a < a_2$ *– две ветви устойчивых периодических колебаний с* $T_2 = 2T_1$ *(в зависимости от начальных условий устанавливается одно из них;* $a_2 < a < a'$ *– интервалы дальнейших удвоений периода:* $T_4 = 4T_1$*,* $T_8 = 8T_1$*,...,* $T_{2^n} = 2^n T_1$*...;* $a' < a < a_3$ *– хаотические колебания);* $a_3 < a < a_4$ *– устойчивые колебания с* $T_3 = 3T_1$*;* $a_4 < a < a''$ *– интервалы удвоений периода:* $T_6 = 6T_1$*,* $T_{12} = 12T_1$*,...,* $T_{3\cdot 2^n} = 3 \cdot 2^n T_1$*...;* $a'' < a$ *– хаотические колебания*

Простейший генератор хаотических колебаний представляет собой устройство из безынерционного нелинейного элемента, линейного фильтра и элемента временной задержки. Модель такого устройства описывается уравнением

$$\dot{x} + x = F\left(x(t-\tau)\right),$$

где $F(x)$ – характеристика нелинейного элемента, τ – время задержки.

Другим примером может быть генератор Ван-дер-Поля с нелинейным реактивным элементом. Он описывается соотношением

$$\ddot{x} + \varepsilon\left(\dot{x} - \dot{F}(x)\right) + R(x) = \beta\cos\omega t,$$

где $R(x)$ – характеристика реактивного элемента.

В качестве примеров принципиальных схем приведем схемы генераторов шума на основе туннельного диода (нелинейного элемента) (рис. 7.7) и нелинейного резистора (рис. 7.8).

В настоящее время разработаны генераторы шума в широком диапазоне частот ($\sim$ 1 кГц – 10 ГГц), использующие идеи детерминированного хаоса.

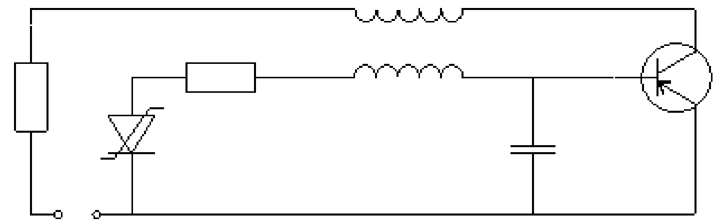


Рис. 7.7. Схема генератора хаотических колебаний на основе нелинейного диода

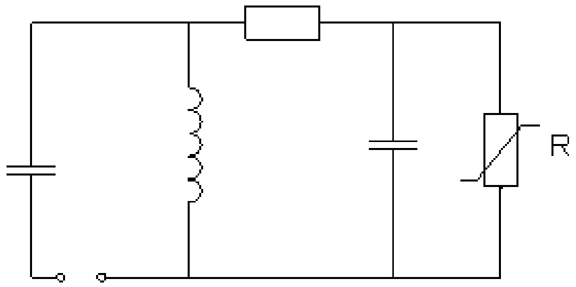


Рис. 7.8. Схема генератора хаотических колебаний на основе нелинейного резистора R

Пожалуй, самым простым устройством, в котором возможны хаотические колебания, есть цепь, схема которой показана на рис. 7.9.

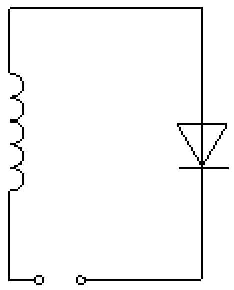


Рис. 7.9. Схема простейшего устройства с хаотическими колебаниями. Нелинейным элементом служит диод

В целом же проблема детерминированного хаоса выходит далеко за пределы радиофизики и электроники и является *междисциплинарной*. Например, идеи детерминированного хаоса оказались плодотворными для описания сценария перехода от ламинарного течения к *турбулентному*.

Интересно и поучительно, что ламинарное течение, в котором неизменно присутствует тепловое движение молекул вещества, является более хаотичным, чем турбулентное. Конечно же, последнее является более сложным, чем ламинарное. *Не следует поэтому отождествлять более сложное и более хаотическое.*

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое хаос?

2. Что такое динамический (детерминированный) хаос? Чем он отличается от хаоса?

3. Что такое странный аттрактор? Чем он отличается от аттрактора?

4. Что такое фрактал?

5. Приведите примеры фракталов в математике.

6. Приведите примеры фракталов в природе.

7. Что такое топологическая размерность?

8. Что такое хаусдорфова размерность?

9. Вычислите фрактальную размерность канторова множества. Сравните ее с топологической размерностью исходного объекта.

10. Вычислите фрактальную размерность кривой Кох. Сравните ее с топологической размерностью исходного объекта.

11. Вычислите фрактальную размерность ковра Серпинского. Сравните ее с топологической размерностью исходного объекта.

12. Опишите особенности фрактальной геометрии.

13. Какой геометрией точнее описывается физический мир? Почему?

14. Опишите формирование идеи детерминированного хаоса.

15. В чем главная заслуга Э. Лоренца?

16. В чем суть «батерфляй-эффекта»?

17. В чем причина возникновения детерминированного хаоса?

18. Что такое бифуркация?

19. Опишите условия и сценарии возникновения детерминированного хаоса.

20. Приведите примеры радиофизических устройств и систем, в которых возникает детерминированный хаос.

21. Можно ли отождествлять сложное и хаотическое? Почему?

7.2. Явление самоорганизации в радиофизике

В этом подразделе рассматривается явление возникновения *порядка из хаоса*, приводятся примеры из различных наук [15, 35].

7.2.1. Понятие самоорганизации. Синергетика

Согласно классической физике система стремится к росту энтропии, а значит, и росту беспорядка. Почему же в природе (вспомним, например, теорию Дарвина) может возникнуть порядок из беспорядка. Это относится к зарождению и эволюции флоры и фауны. Почему в конце концов появилось мыслящее существо – homo sapiens?

Современная физика и естествознание допускает возможность возникновения порядка из хаоса. Для этого система должна быть *нелинейной, открытой, со многими степенями свободы*, а также она должна допускать возникновение *кооперативных* процессов. В таком случае возможна *самоорганизация*.

Этими проблемами занимается междисциплинарная наука *синергетика* [15, 35]. Ее название введено в 1972 г. Г. Хакеном. Объектом исследования синергетики являются структуры *(автоструктуры)*, т. е. упорядоченные образования.

Явление *самоорганизации* связано с *притоком* энергии (вещества и т. д.) и *«забыванием»* начальных условий. Так, например, уравнение диффузии для концентрации частиц N вида

$$\frac{\partial N}{\partial t} = F(N) + D\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}, \qquad (7.2.1)$$

где $F(N)$ – функция баланса рождающихся и погибающих частиц, D – коэффициент диффузии, традиционно описывает диссипативный процесс, т. е. уничтожение упорядоченности.

Однако, как показали в 1937 г. А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский и Н. С. Пискунов, оно допускает решение в виде стационарных волн в виде $N(t,x) = N(x - ut)$, где u – скорость движения фронта волны. При $t \to \infty$

$$u = 2\sqrt{D(N_0)F'(N_0)},$$

где N_0 – невозмущенное значение концентрации частиц. Важно, что вид $N = N(\xi)$ определяется не начальными и граничными условиями, а свойствами среды, т. е. видом нелинейной функции $F(N)$.

Заметим, что переход от двухмерного уравнения (7.2.1) к одномерному для $N(\xi)$, где $\xi = x - ut$, также является примером самоорганизации.

Процессы самоорганизации могут носить *колебательный* характер и сопровождаться распространением волн, которые получили название *автоволн*. Ниже опишем их подробнее, но сначала проследим этапы формирования идеи самоорганизации (синергетической идеи).

7.2.2. Формирование синергетической идеи

До середины XX в. шло накопление данных наблюдений. Сюда можно отнести ячейки Бенара – упорядоченные структуры, возникающие на сковороде при нагреве в ней масла, описанные Г. Бенаром еще в 1900 г., а также их атмосферных «родственников» – облаков почти правильной формы (прямоугольной или шестиугольной). И те, и другие возникают за счет притока тепла и последующей конвекции жидкости или газа.

Естественно, давно были открыты кольца Сатурна и 11-летний цикл солнечной активности и описаны многие другие факты самоорганизации. Никому, однако, не приходило в голову связать эти результаты воедино.

Все началось с опытов химика Б. П. Белоусова. В 1950 г. он обнаружил, что при протекании химической реакции цвет раствора *периодически* менялся (красный – синий – красный). Редакция одного из химических журналов отказалась опубликовать результаты наблюдений по причине того, что химические реакции не обратимы. Это, конечно, верно, но только для замкнутых систем и вблизи положения равновесия. Вдали от него процессы могут быть не только обратимыми, но и периодическими.

Однако такая нетривиальная идея утвердилась лишь в 1960-е гг., когда опыты Б. П. Белоусова были продолжены А. М. Жаботинским и повторены за рубежом.

Реакция Белоусова–Жаботинского давно стала классической.

Оказалось, что в открытых нелинейных системах могут генерироваться волны с необычными свойствами. Р. В. Хохлов в начале 1960-х гг., по аналогии с автоколебаниями, назвал их *автоволнами* (как известно, автоколебанием называется незатухающее колебание в нелинейной открытой системе, вид которого не зависит от начальных условий, а определяется свойствами системы).

Автоволнами называются волны, распространяющиеся в *активных средах* (т. е. открытых системах) без затухания и сохраняющие свои характеристики постоянными за счет непрерывного *подвода* энергии (вещества и т. д.) извне. Пример таких автоволн – движение фронта горения, протекание катализируемых химических реакций и т.д.

В начале 1970-х гг. были обнаружены автоволны спиральной формы (кратко – *спиральные волны*).

Позже автоволны были изучены в биофизике, в физике твердого тела и твердотельной электронике.

Определенный вклад в исследование автоволн в твердотельной электронике внесли Ю. В. Гуляев, Ю. И. Балкарей, М. И. Елинсон и др.

Настоящее место автоволн в науке, как и других проявлений самоорганизации, не было бы осознано, если бы в 1960–1970-е гг. не была создана *неравновесная (нелинейная) термодинамика*. Основная заслуга в ее создании принадлежит бельгийской школе, возглавляемой И. Пригожиным.

В 1970-е гг. проблема самоорганизации становится междисциплинарной, а междисциплинарную науку стали называть *синергетикой* (греч. συνεργοζ – «совместимый»).

В 1980-х гг. введено понятие *автосолитона*, который представляет собой уединенную автоволну. Параметры автосолитона полностью определяются свойствами системы. Ряд устойчивых образований в природе (полярные сияния, шаровая молния, некоторые аномальные атмосферные явления и даже так называемые НЛО), по-видимому, являются автосолитонами.

7.2.3. Свойства автоволн

Автоволны обладают необычными свойствами. Для их понимания можно представлять такую модель автоволны, как горение сухой травы с последующим вырастанием новой, молодой. Этот пример позволяет наглядно проследить все основные свойства автоволны (табл. 7.1).

Таблица 7.1. Свойства автоволн

Свойство	Волны	Автоволны	Солитоны
Сохранение энергии	+	–	–
Сохранение амплитуды и формы	–	+	+
Интерференция	+	–	–
Аннигиляция	–	+	–
Отражение	+	–	–
Дифракция	+	+	?
Зависимость от начальных условий	+	–	+

(Плюс означает наличие свойства, минус – его отсутствие).

Из таблицы видно, что почти все свойства автоволн *противоположны* свойствам обычных волн. Исключение составляет лишь дифракция. Существенно различаются свойства волн и солитонов.

Добавим, что автоволны описываются уравнением типа (7.2.1) или системой подобных уравнений. Важно, что эти уравнения *нелинейные* и *с источниками*.

7.2.5. Применение автоволн в радиоэлектронике

Как только в физике (или других науках) открывают новые типы волн, всегда предпринимаются попытки их применения для передачи информации, построения логических схем, устройств записи информации и т. п. Примерами являются волоконно-оптические солитоны (пункт 2.6.11), домены Ганна (пункт 2.6.5) и др.

В указанных направлениях ведутся работы по применению автоволн. Уже сегодня достигнута частота автоколебаний $\sim 10^{10}$ Гц. Пределом, видимо, является $f \sim 10^{12}$–10^{13} Гц. Большие преимущества автоволновых систем заключаются в их *пластичности* и *многофункциональности*.

Под пластичностью понимается множественность стационарных, колебательных и волновых состояний, а также многообразие переходных процессов при переключении состояний. Пластичность и широкие возможности реализации твердотельных сред определяют пути практического использования автоволновых процессов в радиоэлектронике.

7.2.5. Другие примеры самоорганизации

Самоорганизация – одно из фундаментальных свойств природы, оно – вездесущее. Еще Платон, предугадав это свойство, писал, что время превращает *хаос в космос* (т. е. в буквальном переводе *беспорядок в порядок*).

Классическими примерами самоорганизации есть ячейки Бенара, а также реакция Белоусова–Жаботинского.

В биологии такими примерами могут быть автоволновые режимы движения сердечной мышцы, а также законы Менделя. И даже то, что шкура ягуара пятнистая, а хвост полосатый, как оказалось, отражает свойства нелинейных открытых систем.

Богата примерами самоорганизации астрономия: кольца Сатурна, 11-летний цикл солнечной активности, белые карлики, нейтронные звезды, галактические структуры, крупномасштабная структура метагалактики и т. п.

Можно привести множество примеров возникновения порядка из хаоса в физике: формирование солитона и автосолитона, ударной волны, явление Ферми–Пасты–Улама и т. д.

К самоорганизующимся системам в радиофизике относятся: лазер на основе самопросветляющейся среды, устройство для обращения волнового фронта и др.

Явление самоорганизации часто наблюдается в природе: упорядоченные облака, волновой рельеф песка или снега, явление квазипериодического профиля ступенек в горных реках или искусственных потоках и др.

Переход от восприятия к мысли представляет собой самоорганизацию, а мысль – это когерентная структура, порождаемая мозгом.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое самоорганизация?
2. Что такое синергетика?
3. Сравните понятия «детерминированный хаос» и «самоорганизация».
4. Опишите формирование синергетической идеи.
5. Что такое автоволна?
6. Что такое автосолитон?
7. Дайте сравнительный анализ волн и автоволн.
8. Опишите применение автоволн в радиофизике и радиоэлектронике.
9. Приведите примеры самоорганизации.

7.3. Основные результаты

1. Детерминированный (динамический) хаос может возникать в простых нелинейных системах с числом степеней свободы более полутора. Хаос приводит к деградации системы.

2. Детерминированный хаос отличается от случайного поведения системы, в первом есть гармония.

3. Деградация и самоорганизация – фундаментальные понятия физики открытых систем.

Деградация и самоорганизация – две реализации одного и того же процесса, два возможных пути эволюции.

Хаос и порядок эквивалентны неустойчивости и устойчивости системы.

Не бывает абсолютного хаоса и абсолютного порядка. Реальная система всегда находится в некотором промежуточном состоянии.

4. Процессы самоорганизации вездесущи. Они имеют место в микромире, макромире и мегамире.

Процессами самоорганизации занимается междисциплинарная наука – синергетика.

5. Автоволны – яркий пример самоорганизации. Их свойства (за исключением дифракции) прямо противоположны свойствам обычных волн.

Автоволны возникают в нелинейных открытых системах. Они играют значительную роль в функционировании живой материи.

В последние десятилетия автоволны находят применение в радиоэлектронике.

6. Многие процессы в природе имеют свойства автосолитона.

Задачи

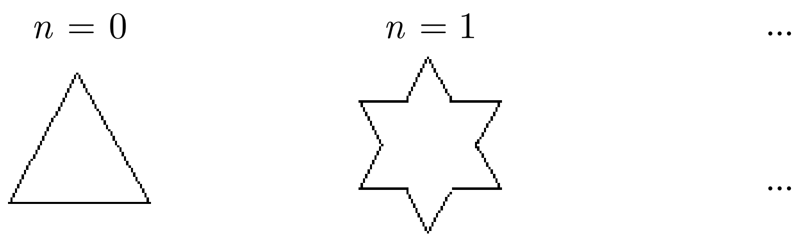
1. Вычислить хаусдорфову размерность множества, образованного последовательным делением единичного отрезка на m равных частей и выбрасыванием двух частей:

а) второй и третьей, $m = 4$,

б) второй и четвертой, $m = 4$.

2. Вычислить хаусдорфову размерность

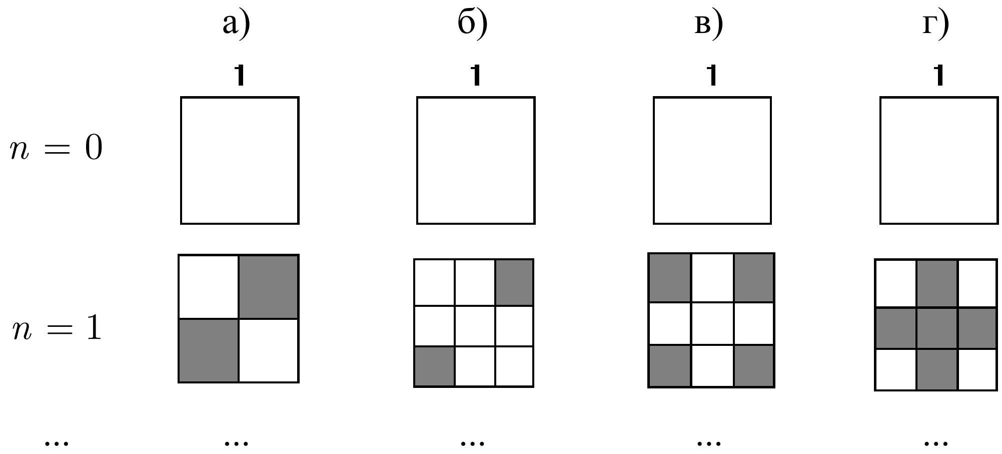
а) треугольника Кох:



б) квадрата Кох (множества, построенного аналогично треугольнику Кох, но на основе единичного квадрата).

3. Вычислить хаусдорфову размерность множества, образованного последовательным делением единичного отрезка на m равных частей и выбрасыванием k частей.

4. Вычислить хаусдорфову и топологическую размерности следующих множеств:



5. Вычислить хаусдорфову и топологическую размерности «дырявого» куба, образованного выбрасыванием среднего кубика после деления сторон куба на три равные части.

6. Обобщить результат задачи 5 на случай m-мерного куба с делением сторон на k равных частей.

7. Для отображения $x_{n+1} = \lambda\left(1 - x_n\right)x_n$ найти неподвижные точки и выяснить устойчивость траекторий при

а) $\lambda = 0{,}5$, б) $\lambda = 1$.

8. Для нелинейного уравнения теплопроводности вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = F\left(T\right) + \chi\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \chi = \text{const}.$$

найти амплитуду стационарного решения и скорость движения фронта волны. Принять

а) $F\left(T\right) = \alpha T - \beta T^2$, б) $F\left(T\right) = \alpha T^2 - \beta T$.

В чем здесь заключена самоорганизация?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С каждым годом все более возрастает интерес к весьма неожиданной и «красочной» картине явлений нелинейной физики[4].

Основные итоги курса сводятся к следующему

1. *Нелинейные явления* в современной науке не исключение, а *закономерность*. Окружающий нас мир нелинеен, он описывается нелинейными уравнениями. Нелинейная физика гораздо богаче линейной физики явлениями, так как последняя представляет собой предел нелинейной физики.

Нелинейность – отрицание категории линейности. Нелинейность отвергает фундаментальный принцип суперпозиции, ничего не предлагая взамен. В этом смысле она не обладает конструктивизмом.

Сегодня мы еще очень мало знаем о многих удивительных явлениях нелинейного мира, еще меньше умеем их использовать.

2. В классической науке нелинейность представляла собой особую частную характеристику объектов.

В современной науке нелинейность – универсальное фундаментальное и главное свойство мира.

Представления о нелинейности мира созревали постепенно.

В *античный* и *средневековый* периоды элементы нелинейности появились в математике и отсутствовали в естествознании.

В течение *натурфилософского* периода (XVII–XVIII вв.) естествоиспытатели впервые столкнулись с нелинейностью. Для них это была частная сложность в решении задач.

В XIX в. (*классический* период) были осознаны отдельные необычные свойства нелинейных явлений, были проведены первые наблюдения, получены первые точные решения, разработаны приближенные методы анализа некоторых нелинейных задач в физике.

---

[4] Б. С. Кернер Автосолитоны. / Б. С. Кернер, В. В. Осипов. – М. : Наука. 1991, С. 9.

В первой половине XX в. (*новый* период) происходит накопление данных о нелинейных явлениях в различных науках. Разрабатываются приближенные методы их описания. Формируется нелинейный язык.

Нелинейность представляется *частной характеристикой* объектов.

Во второй половине XX – начале XXI вв. (*современный* период) интенсивно исследуются нелинейные явления в различных естественных науках, происходят революционные изменения в представлениях о нелинейности мира. Формируется *нелинейное мышление* и *нелинейное мировоззрение*. Обоснована *нелинейная парадигма*.

Становится понятным, что *нелинейность – универсальное фундаментальное* и *главное свойство мира*. Нелинейность управляет эволюцией мира.

3. Все многообразие причин возникновения нелинейности можно попытаться свести к двум случаям. В первом из них нелинейность является «*врожденной»*, т. е. является следствием внутренних причин, которые отображаются нелинейными уравнениями, описывающими состояния системы.

Во втором случае нелинейность является «*привнесенной»*. Сюда относятся неравновесные или открытые системы, системы со значительным энергосодержанием или энерговыделением, колебания со значительной амплитудой, сильные волны и т. п.

4. В радиофизике наибольший интерес представляет нелинейность *электродинамического типа*, связанная с распространением сильных электромагнитных волн в средах или же с описанием колебательных процессов с большой амплитудой.

5. *Солитон* – фундаментальное понятие в нелинейной физике, он играет такую же всеобъемлющую роль, как осциллятор в линейной физике.

6. Одним из важнейших достижений нелинейной физики является изучение *возможности возникновения хаоса* в простых нелинейных динамических системах.

Не менее удивительным фактом является *возможность самоорганизации*, возникновения порядка из хаоса.

Хаос и порядок – два предельных состояния нелинейной динамической системы. При изменении ее параметров они могут непрерывно трансформироваться друг в друга. *Не бывает ни абсолютного хаоса, ни абсолютного порядка*. Всякая реальная система пребывает в некотором промежуточном состоянии.

Деградация и самоорганизация – два возможных пути эволюции открытой системы.

7. Ряд нелинейных явлений широко используется на практике. В радиофизике и электронике их применяют для генерации и усиления колебаний и волн, для обработки и хранения информации, а также при разработке новых каналов связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах / В. С. Анищенко. – М. : Наука, 1990. – 312 с.

2. Антипов О. И. Детерминированный хаос и фракталы в дискретно-нелинейных системах / О. И. Антипов, В. А. Неганов, А. А. Потапов ; под ред. и с предисловием акад. Ю. В. Гуляева и чл.-корр. РАН С. А. Никитова. – М. : Радиотехника, 2009. – 235 с.

3. Ахмедиев Н. Н. Солитоны / Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.

4. Басс Ф. Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда / Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич. – М. : Наука, 1975. – 400 с.

5. Борисов Н. Д. Искусственная ионизированная область в атмосфере / Н. Д. Борисов, А. В. Гуревич, Г. М. Милих. – М. : ИЗМИРАН, 1986. – 184 с.

6. Виноградова М. Б. Теория волн / М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков. – М. : Наука, 1979. – 384 с.; 1990. – 432 с.

7. Гурбатов С. Н. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии / Г. С. Нурбатов, А. Н. Малахов, А. И. Саичев. – М. : Наука, 1990. – 216 с.

8. Гурбатов С. Н. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике / С. Н. Гурбатов, О. В. Руденко, А. И. Самичев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 496 с.

9. Дмитриев А. С. Стохастические колебания в радиофизике и электронике / А. С. Дмитриев, В. Я. Кислов. – М.: Наука, 1989. – 280 с.

10. Заславский Г. М. Введение в нелинейную физику / Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев. – М. : Наука, 1988. – 368 с.

11. Коротеев Н. И. Физика мощного лазерного излучения / Н. И. Коротеев, И. Л. Шульга. – М. : Наука, 1991. – 312 с.

12. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах / Р. М. Кроновер. – М. : Постмаркет. 2000. – 352 с.; М. : Техносфера, 2006. – 488 с.

13. Лазоренко О. В. Нелинейные явления в радиофизике: Сборник задач / О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор. – Х. : ХГУ, 1998. – 101 с.

14. Лазоренко О. В. Сверхширокополосные сигналы и процессы / О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2009. – 576 с.

15. Лоскутов А. Ю. Введение в синергетику / А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов. – М. : Наука, 1990. – 272 с.

16. Малинецкий Г. Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов. – М. : Эфекториал УРСС, 2000. – 336 с.

17. Милославский В. К. Нелинейная оптика : учеб. пособ. / В. К. Милославский. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина. 2008. – 312 с.

18. Митяков Н. А. Возмущение ионосферы мощными радиоволнами. / Н. А. Митяков, С. М. Грач, С. Н. Митяков // Итоги науки и техники. Серия «Геомагнетизм и высокие слои атмосферы». – М. : ВИНИТИ, 1989. – Т. 9. –С. 1–140.

19. Мун Ф. Хаотические колебания / Ф. Мун. – М. : Мир, 1990. – 312 с.

20. Наугольных К. А. Нелинейные волновые процессы в акустике / К. А. Наугольных, Л. А. Островский. – М. : Наука, 1990. – 237 с.

21. Нелинейные волны / под ред. С. Лейбовича, А. Сибасса ; перевод с англ. – М. : Мир, 1977. – 320 с.

22. Островский Л. А. Введение в теорию модулированных волн / Л. А. Островский, А. И. Потапов. – М. : ФИЗМАТЛИТ. 2003. – 400 с.

23. Полянин А. Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 432 с.

24. Полянин А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. – М. : ФИЗМАТЛИТ. 2005. – 256 с.

25. Потапов А. А. О фрактальных радиосистемах, дробных операторах, скейлинге, и не только: Глава в кн.: Фракталы и дробные операторы (Коллективная монография) / предисл. акад. Ю. В. Гуляева и чл.-корр. РАН С. А. Никитова. – Казань : Изд-во « Фэн» Академии наук РТ, 2010. – С. 417 – 472.

26. Потапов А. А. Фракталы в радиофизике и радиолокации / А. А. Потапов. – М. : Логос, 2002. – 664 с.

27. Потапов А. А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки / А. А. Потапов. – 2-е изд., доп. и перераб. – М. : Университетская книга, 2005. – 848 с.

28. Потапов А. А. Фракталы и хаос как основа новых прорывных технологий в современных радиосистемах. – Дополнение к кн.: Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах / Пер. с англ.; Под ред. Т.Э. Кренкеля. – М.: Техносфера, 2006. – С. 374 – 479.

29. Потапов А. А. Фрактальные элементы и радиосистемы: Физические аспекты / А. А. Потапов, А. Х. Гильмутдинов, П. А. Ушаков. Под ред. А. А. Потапова (Библиотека журнала «Нелинейный мир»: Научная серия «Фракталы. Хаос. Вероятность»). – М. : Радиотехника, 2009. – 200 с.

30. Потапов А. А. Новейшие методы обработки изображений / А. А. Потапов, Ю. В. Гуляев, С. А. Никитов, А. А. Пахомов, В. А. Герман. Под ред. А. А. Потапова. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 496 с. (грант РФФИ № 07 - 07 - 07005).

31. Рабинович М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М. : Наука, 1984. – 432 с.

32. Солитоны / под ред. Р. Буллефа, Ф. Кодри ; пер. с англ. – М. : Мир, 1983. – 408 с.

33. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор; пер. с англ. – М. : Эдиториал УРСС. – 2001. – 320 с.

34. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем ; пер. с англ. – М. : Мир, 1977. – 622 с.

35. Хакен Г. Синергетика / Г. Хакен. – М. : Мир, 1980. – 404 с.

36. Черногор Л. Ф. О нелинейности в природе и науке / Л. Ф. Черногор. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2008. – 528 с.

37. Черногор Л. Ф. Радиофизические и геомагнитные эффекты стартов ракет / Л. Ф. Черногор. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2009. – 386 с.

38. Шен И. Р. Принципы нелинейной оптики / И. Р. Шен. – М. : Наука, 1989.– 560 с.

39. Шустер Г. Детерминированный хаос / Г. Шустер. – М. : Мир, 1988. – 240 с.

40. Яновский В. В. Лекции о нелинейных явлениях / В. В. Яновский. – Х. : Институт монокристаллов. – 2006. – Т. 1. – 456 с.; 2007. – Т. 2. – 448 с.

41. Baker G. L. Chaotic Dynamics / G. L. Baker, J. P. Gollub – Cambridge: University Press, 1996.– 258 p.

42. Enciclopedia of Nonlinear Sciences. – N. Y. – London, 2005. – 1125 p.

43. Gurevich A. V. Nonlinear Phenomena in the Ionosphere / A. V. Gurevich. – N. Y. : Springer-Verlag, 1978. – 372 p.

44. Visions of nonlinear science in the 21st century / ed. by J. X. Huettas, W.-K. Chen, R. N. Madan. – Singapore: Word Scientific, 1999. – 872 p.

Навчальне видання

Чорногор Леонід Феоктистович

НЕЛІНІЙНА РАДІОФІЗИКА

Підручник

Видання третє, доповнене та перероблене

Коректор *О. В. Токар*
Комп'ютерне верстання *С. В. Кацко*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 9,7, вкл. Тираж 300 пр. Зам. № 96/15.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32