

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н Каразіна

О. Ф. Тирнов

В. П. Тишковець

СТАТИСТИЧНА РАДІОФІЗИКА

ПРИКЛАДИ ТА ЗАДАЧІ

Навчальний посібник
для студентів напрямку «Радіофізика»
класичних університетів

Харків – 2015

УДК 537.86(075.8)
ББК 32.841я73
Т 93

Рецензенти:

В. М. Мельник – доктор фіз.-мат. наук, завідувач відділу Радіоастрономічного інституту НАН України.

Ю. М. Олександров – кандидат фіз.-мат. наук, професор кафедри біомедичної інженерії Харківського національного університету радіоелектроніки.

*Затверджено до друку рішенням Вченої ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол №9 від 29.09.14)*

Т 93 **Тирнов О. Ф.** Статистична радіофізика. Приклади та задачі: Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / О. Ф.Тирнов, П. Тишковець. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2015. – 128 с.
ISBN

Посібник призначений для формування навичок творчого підходу у студентів при розв'язанні задач з курсу «Статистична радіофізика». У посібнику поряд з висвітленням основних положень курсу наведені рекомендації та підходи до рішення типових задач по відповідних розділах, а для подальшого закріплення навичок запропоновані задачі для самостійного розв'язання (з відповідями).

Призначається для студентів старших курсів, аспірантів і наукових співробітників радіофізичних і радіотехнічних спеціальностей університетів.

Т 93 **Tyrnov O. F.** Statistical Radio Physics. Examples and problems: Textbook for university students. / O. F. Tyrnov, V. P. Tyshkovets. – Kh., V. N. Karazin National University, 2015. – 128 p.
ISBN

The textbook aims at developing creativity in students' problem-solving skills in the Statistical Radio Physics course. In addition to highlighting the fundamentals of the course, the textbook provides worked examples, tutorials for chapter-specific problem-solving strategy, and test your understanding problems from each chapter with answers.

The textbook is intended for graduate, postgraduate and PhD students, and scientists in the field.

УДК 537.86(075.8)
ББК 32.841я73

ISBN

© Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2015
© Тирнов О. Ф., Тишковець В. П., 2015
© Дончик І. М., макет обкладинки, 2015

З М І С Т

ВСТУП.....	4
Розділ 1. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ПРОЦЕСИ.....	5
1.1. Основні поняття та співвідношення	5
1.2. Приклади	11
1.3. Задачі для самостійного розв'язання	30
Розділ 2. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ У ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ	34
2.1. Основні поняття та співвідношення	34
2.2. Приклади	40
2.3. Задачі для самостійного розв'язання	51
Розділ 3. БРОУНІВСЬКИЙ РУХ. ФЛУКТУАЦІЇ В РАДІОТЕХНІЧНИХ КОЛАХ	57
3.1. Основні поняття та співвідношення	57
3.2. Приклади	59
3.3. Задачі для самостійного розв'язання	66
Розділ 4. ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ.....	71
4.1. Основні поняття та співвідношення	71
4.2. Приклади	72
4.3. Задачі для самостійного розв'язання	78
Розділ 5. МЕТОД ФАЗОВОГО ЕКРАНА.....	83
5.1. Основні поняття та співвідношення	83
5.2. Приклади	85
5.3. Задачі для самостійного розв'язання	97
Розділ 6. РОЗСІЮВАННЯ ХВИЛЬ НА СТАТИСТИЧНО НЕРІВНІЙ ПОВЕРХНІ	99
6.1. Розсіювання хвиль на слабкошорсткій поверхні.....	99
6.2. Метод Кірхгофа для великих, але плавних нерівностей.....	100
6.3. Приклади	100
6.4. Задачі для самостійного розв'язання	116
ДОДАТОК	119
ЛІТЕРАТУРА	128

ВСТУП

З розвитком радіофізики, удосконаленням методів та техніки генерації, прийому, обробки та перетворення радіосигналів все більш актуальним є врахування випадкових факторів, тобто перехід від суто динамічних задач до задач статистичних. Флуктуаційні явища обумовлені фундаментальними фізичними процесами, тому елемент випадковості або невизначеності присутній у всіх без винятку явищах фізики взагалі і радіофізики зокрема. Питання лише в тому, з якого рівня слід брати до уваги цю невизначеність у конкретній задачі. Вивченню випадкових факторів при генерації, випромінюванні, поширенні і прийомі радіохвиль й відведено розділ радіофізики – статистична радіофізика. Більш широко – статистична радіофізика вивчає статистичні закономірності в коливальних і хвильових процесах. Результати цих досліджень мають практичне значення в радіолокації, радіонавігації, радіозв'язку, передачі і прийомі радіосигналів. Як приклади можна назвати такі. Електричні флуктуації є причиною виникнення флуктуацій напруги і струму в радіоприймальних пристроях. В радіопередавальних пристроях і генераторах коливань флуктуації визначають гранично досягну монохроматичність і стабільність частоти генераторів. Випадкові зміни показника заломлення атмосфери призводять до флуктуаційних явищ при поширенні радіохвиль в атмосфері. Всі ці явища потребують статистичного підходу для їх коректного опису. Ознайомити студентів-радіофізиків з методами рішення задач, які пов'язані з цими явищами, і є метою курсу «Статистична радіофізика». Програмою курсу передбачено закріплення лекційного матеріалу та формування навичок творчого підходу на практичних заняттях. Досвід проведення таких занять виявив, що більшість студентів стикається з певними труднощами, пов'язаними зі специфікою задач цієї дисципліни. Тому ми вважаємо доцільним забезпечити студентів навчальним посібником, в якому поряд з висвітленням основних положень курсу були б наведені рекомендації та підходи до розв'язання типових задач по відповідних розділах, а для подальшого закріплення навичок запропоновані задачі для самостійного розв'язання (з відповідями). Саме це за мету ставили укладачі цього видання.

Розділ 1. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ПРОЦЕСИ

1.1. Основні поняття та співвідношення

Правило додавання ймовірностей $P\{A_k\}$ несумісних випадкових подій A_k , які утворюють повну групу:

$$\sum_{k=1}^N P\{A_k\} = 1. \quad (1.1)$$

Правило добутку ймовірностей двох сумісних незалежних подій A і B :

$$P\{AB\} = P\{A\} \cdot P\{B\}. \quad (1.2)$$

Правило добутку ймовірностей N сумісних незалежних подій:

$$P\{A_1 A_2 \dots A_N\} = \prod_{k=1}^N P\{A_k\}. \quad (1.3)$$

Теорема про ймовірність суми S двох сумісних подій A і B :

$$P\{S\} = P\{A + B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}. \quad (1.4)$$

Інтегральна функція розподілу ймовірності $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ :

$$\begin{cases} F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}; \\ F_\xi(-\infty) = P\{\xi \rightarrow -\infty\} = 0; \\ F_\xi(\infty) = P\{\xi \rightarrow \infty\} = 1. \end{cases} \quad (1.5)$$

Густина розподілу ймовірності (диференціальна функція розподілу ймовірності)

$$W_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx}. \quad (1.6)$$

Ймовірність потрапляння випадкової величини ξ у кінцевий інтервал $x_1 < \xi \leq x_2$

$$P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} W_\xi(x) dx. \quad (1.7)$$

Деякі співвідношення, які пов'язують інтегральну функцію розподілу та густину розподілу ймовірності випадкової величини ξ :

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x W_{\xi}(y) dy, \quad (1.8)$$

$$F_{\xi}(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(y) dy = 1. \quad (1.9)$$

Для дискретної випадкової величини ξ

$$F_{\xi}(x) = \sum_{i=1}^N p_i h(x - x_i), \quad (1.10)$$

$$W_{\xi}(x) = \sum_{i=1}^N p_i \delta(x - x_i), \quad (1.11)$$

де $h(x)$ – функція Хевісайда, $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака (див. п. 9, 10 додатка).

Початковий момент k -го порядку для дискретної випадкової величини ξ

$$m_k(\xi) \equiv \overline{\xi^k} \equiv \langle \xi^k \rangle = \sum_{i=1}^N x_i^k p_i. \quad (1.12)$$

Початковий момент k -го порядку для неперервної випадкової величини ξ

$$m_k(\xi) \equiv \overline{\xi^k} \equiv \langle \xi^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_{\xi}(x) dx. \quad (1.13)$$

Центральний момент k -го порядку для неперервної випадкової величини ξ

$$M_k(\xi) \equiv \overline{\delta \xi^k} \equiv \langle \delta \xi^k \rangle \equiv \langle (\xi - \bar{\xi})^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{\xi})^k W_{\xi}(x) dx. \quad (1.14)$$

Середнє значення (математичне очікування) випадкової величини – початковий момент 1-го порядку

$$\bar{\xi} \equiv m_1(\xi) = \sum_{i=1}^N x_i p_i \quad \text{або} \quad \bar{\xi} \equiv m_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x W_{\xi}(x) dx. \quad (1.15)$$

Дисперсія флуктуацій випадкової величини σ_{ξ}^2 – центральний момент 2-го порядку

$$\sigma_{\xi}^2 \equiv M_2(\xi) \equiv \langle (\xi - \bar{\xi})^2 \rangle = \overline{\xi^2} - \bar{\xi}^2 = m_2(\xi) - m_1^2(\xi). \quad (1.16)$$

Середньоквадратичне відхилення (стандартне відхилення) ξ

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{\sigma_{\xi}^2} . \quad (1.17)$$

Середнє значення функції $\eta = \varphi(\xi)$ випадкової величини ξ

$$\langle \varphi(\xi) \rangle = \sum_{i=1}^N \varphi(x_i) p_i \quad \text{або} \quad \langle \varphi(\xi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) W_{\xi}(x) dx . \quad (1.18)$$

Характеристична функція $f(\nu)$ випадкової величини (ν – довільний дійсний параметр) – перетворення Фур'є від густини розподілу ймовірності $W_{\xi}(x)$

$$f(\nu) = \langle e^{i\nu\xi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu x} W_{\xi}(x) dx . \quad (1.19)$$

Заміна усереднення за ансамблем реалізацій усередненням за часом:

$$\overline{\xi^k} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_{\xi}(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi^k(t) dt . \quad (1.20)$$

Автокореляційна функція (АКФ)

$$B_{\xi}(t_1, t_2) = \langle [\xi(t_1) - \bar{\xi}(t_1)][\xi(t_2) - \bar{\xi}(t_2)] \rangle . \quad (1.21)$$

Визначення АКФ для ергодичних процесів шляхом усереднення за нескінченним часовим інтервалом:

$$B_{\xi}(\tau = t_2 - t_1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - \bar{\xi}][\xi(t + \tau) - \bar{\xi}] dt , \quad (1.22)$$

$$\text{де } \bar{\xi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt .$$

Коефіцієнт кореляції

$$K_{\xi}(\tau) = \frac{B_{\xi}(\tau)}{B_{\xi}(0)} = \frac{B_{\xi}(\tau)}{\sigma_{\xi}^2} . \quad (1.23)$$

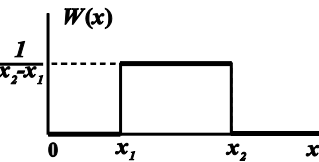
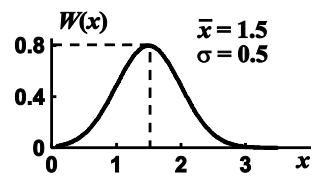
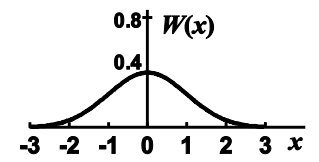
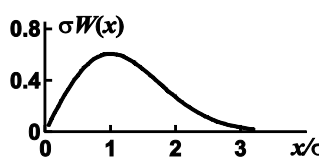
Взаємна кореляційна функція двох випадкових процесів $\xi(t)$ і $\zeta(t)$

$$B_{\xi\zeta}(t_1, t_2) = \langle [\xi(t_1) - \bar{\xi}(t_1)][\zeta(t_2) - \bar{\zeta}(t_2)] \rangle . \quad (1.24)$$

Деякі закони розподілу випадкових величин

Закон розподілу	Область змін значень випадкової величини	Аналітичний вираз закону розподілу	Параметри	Графік закону розподілу	№ формули
Рівномірний (дискретний)	$n = 1, 2, \dots, N$	$P(n) = \frac{1}{N}$	N		(1.25)
Біномний (Бернуллі)	$n = 0, 1, 2, \dots, N$	$P_N(n) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n}$	N, p		(1.26)
Пуассона	$n = 0, 1, 2, \dots$	$P_N(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} \exp(-\bar{n})$	\bar{n}		(1.27)

Таблиця 1.1 (продовження)

Рівномірний (неперервний)	$x_1 < x < x_2$	$W(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}$	x_1, x_2		(1.28)
Гауса (нормальний)	$-\infty < x < \infty$	$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right]$	\bar{x}, σ		(1.29)
Гауса (стандартний)	$-\infty < x < \infty$	$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$	$\bar{x} = 0$ $\sigma = 1$		(1.30)
Релея	$0 < x < \infty$	$W(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$	σ		(1.31)

Структурна функція

$$D_{\xi}(t_1, t_2) = \langle [\xi(t_2) - \xi(t_1)]^2 \rangle = m_2(t_2) + m_2(t_1) - 2R_{\xi}(t_1, t_2), \quad (1.32)$$

де $R_{\xi}(t_1, t_2) = \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle$ – коваріаційна функція.

Зв'язок енергетичного спектру потужності з АКФ для стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$ (формули Вінера–Хінчина):

$$B_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_0^{\infty} S_{\xi}^{(+)}(\omega) \cos \omega\tau d\omega; \quad (1.33)$$

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_{\xi}(\tau) \cos \omega\tau d\tau.$$

Енергетичний спектр за додатними частотами визначається як

$$S_{\xi}^{(+)}(\omega) = \begin{cases} 2S_{\xi}(\omega), & \omega \geq 0; \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

Фур'є – спектр випадкового процесу $\xi(t)$

$$C_{\xi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.35)$$

Зв'язок Фур'є – спектру з енергетичним спектром для стаціонарного випадкового процесу:

$$|C_{\xi}(\omega) C_{\xi}^*(\omega')| = S(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (1.36)$$

Зв'язок дисперсії з енергетичним спектром:

$$\sigma_{\xi}^2 = B_{\xi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega. \quad (1.37)$$

Зв'язок характерної ширини $\Delta\omega$ енергетичного спектра $S_{\xi}(\omega)$ з характерним часом $\Delta\tau$ зміни автокореляційної функції $B_{\xi}(\tau)$ (співвідношення невизначеностей):

$$\Delta\omega \Delta\tau = const \geq 1. \quad (1.38)$$

1.2. Приклади

1.1. Напряга в мережі U флюктує від $U_1=180\text{В}$ до $U_2=240\text{В}$. В межах цього інтервалу значення U мають рівну ймовірність. Визначити середнє значення \bar{U} , дисперсію флюктуацій напруги σ_U^2 та стандартне відхилення.

Розв'язання. Розподіл значень U – рівномірний. Згідно з (1.28) густина розподілу ймовірності дорівнює

$$W(U) = \frac{1}{U_2 - U_1} = \frac{1}{240 - 180} = \frac{1}{60} (B^{-1}). \quad \text{Скориставшись (1.15),}$$

знаходимо $\bar{U} = \int_{-\infty}^{\infty} U W(U) dU$. У нашому випадку необхідно інтегрувати в скінченних границях, оскільки поза інтервалом $[U_1, U_2]$ $W(U) = 0$:

$$\bar{U} = \int_{U_1}^{U_2} U W(U) dU = \frac{1}{60} \int_{U_1}^{U_2} U dU = \frac{1}{60} \frac{U^2}{2} \Big|_{180}^{240} = 210(B).$$

Для обчислення дисперсії σ_U^2 (див. (1.16)) треба спочатку знайти момент другого порядку (див. (1.13)):

$$\overline{U^2} = \int_{U_1}^{U_2} U^2 W(U) dU = \frac{1}{60} \frac{U^3}{3} \Big|_{180}^{240} = 44400(B^2).$$

Тепер

$$\sigma_U^2 = \overline{U^2} - \bar{U}^2 = 44400 - 44100 = 300(B^2).$$

Таким чином, стандартне відхилення, яке ми шукаємо, дорівнює

$$\sigma_U = \sqrt{\sigma_U^2} \approx 17,3(B).$$

1.2. Рівень сигналу U рівномірно розподіляється в інтервалі $[0, U_m]$. Для функції $y = U^2$ обчислити середнє значення \bar{y} та дисперсію σ_y^2 .

Розв'язання. Скористаємося співвідношенням (1.28) та знайдемо густину розподілу ймовірності

$$W(U) = \frac{1}{U_m - 0} = \frac{1}{U_m} .$$

Використаємо (1.18) для знаходження середнього значення функції випадкової величини:

$$\bar{y} = \overline{U^2} = \int_0^{U_m} U^2 W(U) dU = \frac{U_m^2}{3} .$$

Знаходимо момент другого порядку для y (див. (1.13)):

$$\overline{y^2} = \overline{U^4} = \int_0^{U_m} U^4 W(U) dU = \frac{U_m^4}{5} .$$

Тепер

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = \frac{4U_m^4}{45} .$$

1.3. Проводиться прийом кодових комбінацій, що складаються з п'яток цифр від 1 до 5, причому кожна з цифр у окремій комбінації з'являється один єдиний раз, наприклад: 1, 2, 3, 4, 5 або 5, 4, 3, 2, 1 та ін. Яка ймовірність $P\{A\}$ того, що у прийнятій комбінації цифри утворюють послідовність 1, 2, 3, 4, 5?

Розв'язання. Із п'яток елементів (цифр 1, 2, 3, 4, 5) шляхом перестановок можна скласти $N = 5!$ різних комбінацій з рівною ймовірністю. Нас цікавить тільки один результат $n = 1$: комбінація 1, 2, 3, 4, 5. Його ймовірність дорівнює

$$P\{A\} = \frac{n}{N} = \frac{1}{120} .$$

1.4. Випадкова величина ξ може набувати тільки два значення x : $x_1 = A$ з ймовірністю $p_1 = 3/4$ і $x_2 = -A$ з ймовірністю $p_2 = 1/4$. Знайти $W_\xi(x)$, $\bar{\xi}$ і σ_ξ^2 .

Розв'язання. Випадкова величина ξ дискретна, тому густина розподілу ймовірності для неї визначається за формулою (1.11):

$$\begin{aligned}
 W_{\xi}(x) &= \sum_{i=1}^2 p_i \delta(x - x_i) = p_1 \delta(x - x_1) + p_2 \delta(x - x_2) = \\
 &= p_1 \delta(x - A) + p_2 \delta(x + A).
 \end{aligned}$$

Скориставшись цим поданням згідно з формулами (1.15) і (1.16), знаходимо математичне очікування $\bar{\xi}$ і дисперсію σ_{ξ}^2 випадкової величини ξ :

$$\begin{aligned}
 \bar{\xi} &= \sum_{i=1}^N x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 = \frac{3}{4}A - \frac{1}{4}A = \frac{A}{2}. \\
 \sigma_{\xi}^2 &= \overline{(\xi - \bar{\xi})^2} = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{\xi})^2 p_i = (x_1 - \bar{\xi})^2 p_1 + (x_2 - \bar{\xi})^2 p_2 = \\
 &= \left(A - \frac{A}{2}\right)^2 p_1 + \left(-A - \frac{A}{2}\right)^2 p_2 = \frac{A^2}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{4}A^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}A^2.
 \end{aligned}$$

1.5. Випадкова величина φ розподіляється за нормальним законом із середнім значенням $\bar{\varphi} = 0$ і дисперсією σ_{φ}^2 . Знайти середнє значення іншої випадкової величини $\xi = e^{-i\varphi}$.

Розв'язання. При нульовому середньому нормальний закон (1.29) має вигляд:

$$W(\varphi) = \frac{1}{\sigma_{\varphi} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{2\sigma_{\varphi}^2}\right).$$

Для визначення $\bar{\xi}$ скористаємося формулою (1.18):

$$\begin{aligned}
 \bar{\xi} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi} W(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\varphi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{2\sigma_{\varphi}^2}\right) d\varphi = \\
 &= \frac{\sqrt{2\sigma_{\varphi}^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\varphi}} \exp\left(-\frac{\sigma_{\varphi}^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy = \exp\left(-\frac{\sigma_{\varphi}^2}{2}\right).
 \end{aligned}$$

При обчисленні інтеграла ми скористалися співвідношеннями

$$i\varphi + \frac{\varphi^2}{2\sigma_\varphi^2} = \frac{\varphi^2 + 2i\varphi\sigma_\varphi^2}{2\sigma_\varphi^2} = \frac{\varphi^2 + 2i\varphi\sigma_\varphi^2 + (i\sigma_\varphi^2)^2 - (i\sigma_\varphi^2)^2}{2\sigma_\varphi^2} =$$

$$= \frac{(\varphi + i\sigma_\varphi^2)^2 - (i\sigma_\varphi^2)^2}{2\sigma_\varphi^2} = \frac{(\varphi + i\sigma_\varphi^2)^2}{2\sigma_\varphi^2} + \frac{\sigma_\varphi^2}{2}.$$

1.6. Лінією зв'язку у випадковому порядку з рівною ймовірністю передаються 33 знаки української абетки. Знайти ймовірність $P\{A\}$ того, що з'явиться послідовність букв, яка утворить слово «радіо».

Розв'язання. Кількість всіх випадків N (кількість вибірок із 33 літер абетки по 5) дорівнює кількості розміщень із 33 по 5, тобто

$$N = C_{33}^5 = 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29.$$

Із цих випадків сприятливим для події A є тільки один результат, тобто $n = 1$. Отже

$$P\{A\} = \frac{n}{N} = \frac{1}{C_{33}^5} \approx 3,5 \cdot 10^{-8}.$$

1.7. Виявлення повітряної цілі виконується незалежно двома радіолокаційними станціями. Імовірність виявлення цілі першою станцією дорівнює 0,7. Імовірність виявлення цілі другою станцією дорівнює 0,8. Визначити ймовірність $P\{S\}$ того, що ціль буде виявлена хоча б однією станцією.

Розв'язання. Подія S , що полягає у виявленні цілі, відбудеться, якщо ціль буде виявлена першим локатором (подія A), або другим (подія B), або одночасно двома локаторами (подія AB). Видно, що S є сумою сумісних подій $S = A + B$ і ймовірність її появи визначається формулою (1.4):

$$P\{S\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}.$$

Оскільки події A і B незалежні, $P\{AB\} = P\{A\} \cdot P\{B\}$. Отже

$$P\{S\} = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 0,94.$$

1.8. Розглядаючи сталу величину A як реалізацію випадкового процесу $\xi(t) = A = const$, знайти $W_\xi(x)$, $\bar{\xi}$ та $B_\xi(\tau)$.

Розв'язання. Оскільки $\xi = A = const$, маємо $\bar{\xi} = A$,

$\xi(t + \tau) = \xi(t) = A$. Згідно з (1.9) $\int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) dx = 1$. Таким чином,

$W_{\xi}(x) = \delta(x - A)$. Тепер, використовуючи (1.15), знайдемо $\bar{\xi}$:

$$\bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x W_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x - A) dx = A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - A) dx = A.$$

«Процес» у випадку, що розглядається, – стаціонарний. Тому з використанням (1.21) можна записати вираз для АКФ:

$$B_{\xi}(\tau) = \langle [\xi(t) - \bar{\xi}][\xi(t + \tau) - \bar{\xi}] \rangle = \langle [A - A][A - A] \rangle = 0.$$

1.9. Визначити енергетичний спектр потужності $S_{\xi}(\omega)$ для стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$ з АКФ

$$B_{\xi}(\tau) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right).$$

Розв'язання. Згідно з (1.33)

$$\begin{aligned} S_{\xi}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right) \exp(-i\omega\tau) d\tau = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} + i\omega\tau\right)\right] d\tau. \end{aligned}$$

Розглянемо показник експоненти (див. задачу 1.5):

$$\begin{aligned} \frac{\tau^2}{\tau_0^2} + i\omega\tau &= \frac{\tau^2}{\tau_0^2} + \frac{2i\omega\tau\tau_0}{2\tau_0} + \left(\frac{i\omega\tau_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{i\omega\tau_0}{2}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{\tau}{\tau_0} + \frac{i\omega\tau_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{i\omega\tau_0}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Тепер

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\tau}{\tau_0} + \frac{i\omega\tau_0}{2}\right)^2\right] \exp\left(\frac{i\omega\tau_0}{2}\right)^2 d\tau =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \exp\left(-\frac{\omega^2\tau_0^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\tau}{\tau_0} + \frac{i\omega\tau_0}{2}\right)^2\right] d\tau .$$

Після заміни $\frac{\tau}{\tau_0} + \frac{i\omega\tau_0}{2} = x$ маємо

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{\tau_0\sigma^2}{2\pi} \exp\left(-\frac{\omega^2\tau_0^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\tau_0\sigma^2}{2\pi} \exp\left(-\frac{\omega^2\tau_0^2}{4}\right) \sqrt{\pi} .$$

Остаточно

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{\tau_0\sigma^2}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\omega^2\tau_0^2}{4}\right) .$$

1.10. Енергетичний спектр процесу $\xi(t)$ заданий функцією

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{4\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} .$$

Визначити співвідношення між енергетичною

полосою $\Delta\omega_0 = \frac{1}{S_{\xi}(0)} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega$ та шириною його енергетичного спектра $\Delta\omega$ за рівнем $0,5 S_{\xi}(0)$.

Розв'язання. Надамо графічне зображення $S_{\xi}(\omega)$ (рис. 1.1).

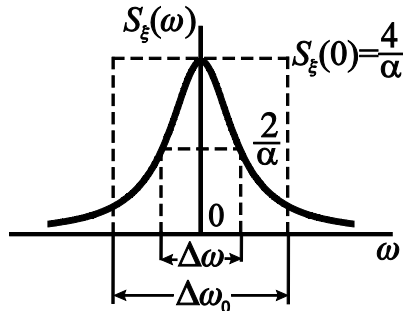


Рис. 1.1

Після підстановки $S_{\xi}(\omega)$ отримуємо

$$\Delta\omega_0 = \frac{\alpha}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \pi\alpha.$$

Ширина енергетичного спектру $\Delta\omega$ за рівнем 0.5 визначається зі співвідношення

$$S_{\xi}(\Delta\omega) = \frac{4\alpha}{\alpha^2 + (\Delta\omega/2)^2} = 0.5 \cdot S_{\xi}(0) = 0.5 \frac{4}{\alpha}.$$

Звідси $\Delta\omega = 2\alpha$. Таким чином,

$$\frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\pi}{2}.$$

1.11. Густина розподілу ймовірності випадкових амплітуд U сигналу відповідає закону Релея. Визначити \bar{U} , σ_U^2 , σ_U .

Розв'язання. Згідно з (1.15) $\bar{U} = \int_{-\infty}^{\infty} UW(U)dU$. Оскільки

$W(U)$ відповідає закону Релея (1.31), в якому $W(U) = 0$ при $U < 0$, то

$$\bar{U} = \int_0^{\infty} U \frac{U}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{U^2}{2\sigma^2}\right) dU = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma.$$

Далі обчислюємо $\overline{U^2}$:

$$\overline{U^2} = \int_0^{\infty} U^2 W(U) dU = 2\sigma^2.$$

Тепер згідно з (1.16)

$$\sigma_U^2 = \overline{U^2} - \bar{U}^2 = \sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right); \quad \sigma_U = \sigma \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}} = 0,66\sigma.$$

1.12. Функція розподілу випадкової величини ξ має вигляд

$$F_{\xi}(x) = c + b \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Необхідно:

а) визначити коефіцієнти b і c ;

б) знайти вираз для $W_{\xi}(x)$;

в) визначити ймовірність $P\{\alpha < \xi \leq \beta\}$ потрапляння величини ξ в інтервал $(\alpha, \beta]$.

Розв'язання. а) Скористаємося властивостями функції $F_{\xi}(x)$ (1.5):

$$F_{\xi}(-\infty) = 0, \quad c + b\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$F_{\xi}(\infty) = 1, \quad c + b\frac{\pi}{2} = 1.$$

Звідси знаходимо коефіцієнти b і c : $b = \frac{1}{\pi}$, $c = \frac{1}{2}$.

б) Зі зв'язку між $W_{\xi}(x)$ і $F_{\xi}(x)$ отримаємо наступне співвідношення:

$$\begin{aligned} W_{\xi}(x) &= \frac{dF_{\xi}}{dx} = \frac{d}{dx}\left(c + b \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right) = \\ &= b \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{ab}{a^2 + x^2} = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} \end{aligned}$$

в) За відомою густиною розподілу ймовірності $W_{\xi}(x)$ знайдемо ймовірність потрапляння випадкової величини в заданий інтервал

$$\begin{aligned} P\{\alpha < \xi \leq \beta\} &= F_{\xi}(\beta) - F_{\xi}(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} W_{\xi}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d(x/a)}{1 + (x/a)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{\beta}{a}} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} y \Big|_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{\beta}{a}} = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\beta}{a} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{a} \right). \end{aligned}$$

1.13. Випадкова величина ξ розподіляється за законом, поданим на рис. 1.2. Необхідно записати вираз для $F_{\xi}(x)$ і

визначити ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал $(a/2, a]$. Обчислити значення $\bar{\xi}$ і σ_{ξ}^2 .

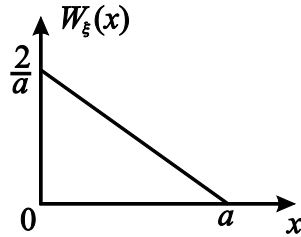


Рис. 1.2

Розв'язання. Із рис. 1.2 видно, що $W_{\xi}(x)$ – це пряма лінія, рівняння якої має вигляд:

$$W_{\xi}(x) = -k(x - a) = k(a - x).$$

Значення коефіцієнта k знаходимо з умови, що при $x = 0$ $W_{\xi}(x) = 2/a = ka$. Отже $k = 2/a^2$. Таким чином, маємо

$$W_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right), & 0 < x \leq a; \\ 0, & x \leq 0; \quad x > a. \end{cases}$$

На інтервалі $0 < x \leq a$ вираз для $F_{\xi}(x)$ має вигляд (див. (1.7)):

$$F_{\xi}(x) = \int_0^x W_{\xi}(x') dx' = \int_0^x \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x'}{a}\right) dx' = \frac{2}{a} x - \frac{x^2}{a^2} = \frac{x}{a} \left(2 - \frac{x}{a}\right).$$

Отже

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x}{a} \left(2 - \frac{x}{a}\right), & 0 < x \leq a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Ймовірність потрапляння величини ξ в інтервал $(a/2, a]$ знаходиться як

$$P\left\{\frac{a}{2} < \xi \leq a\right\} = F_{\xi}(a) - F_{\xi}\left(\frac{a}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Середнє значення $\bar{\xi}$ і середній квадрат $\overline{\xi^2}$ випадкової величини ξ дорівнюють відповідно

$$\bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x W_{\xi}(x) dx = \int_0^a x \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \frac{2}{a} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2}{6} = \frac{a}{3}.$$

$$\overline{\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W_{\xi}(x) dx = \frac{2}{a} \left(\int_0^a x^2 dx - \int_0^a \frac{x^3}{a} dx\right) = \frac{2}{a} \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4a}\right) = \frac{2}{a} \cdot \frac{a^3}{12} = \frac{a^2}{6}.$$

За отриманими першим і другим початковими моментами за формулою (1.16) знайдемо дисперсію

$$\sigma_{\xi}^2 = M_2(\xi) = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2 = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{18}.$$

1.14. На радіомаяк-відповідач надходить у середньому 15 запитів за годину. Вважаючи кількість запитів випадковою величиною, що розподіляється за законом Пуассона, визначити ймовірність того, що за $T = 4$ хв :

- а) надійде рівно 3 запити;
- б) не надійде жодного запиту;
- в) надійде хоча б один запит.

Розв'язання. У розподілі Пуассона (1.27), що описує ймовірність появи шуканої події A на інтервалі часу $(0, t]$, входить величина \bar{n} , яка є середньою кількістю появ події A на цьому інтервалі. Якщо n_1 є середня кількість подій за одиницю часу, то $\bar{n} = n_1 t$. У нашому випадку $t = T = 4$ хв, а середня кількість запитів за одиницю часу дорівнює $n_1 = \frac{15}{60 \text{ хв}} = 1/4 \text{ хв}^{-1}$. Звідси знаходимо

$\bar{n} = n_1 T = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$. Знаючи \bar{n} , за допомогою розподілу Пуассона

(1.27) визначимо шукані ймовірності:

а) $P(3) = \frac{1^3}{3!} e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0,06$;

б) $P(0) = \frac{1^0}{0!} e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37$;

в) $P(n \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - 1/e \approx 0,63$.

1.15. Відмова у роботі приладу відбувається в середньому 1 раз за 200 годин. Визначити ймовірність того, що за інтервал $T = 10$ год не відбудеться жодної відмови. Вважати, що ймовірність розподілена за законом Пуассона.

Розв'язання. Спочатку знайдемо середню кількість відмов за одиницю часу $n_1 = \frac{1}{200} \text{ год}^{-1}$. Звідси середня кількість відмов за

$T = 10$ год дорівнює $\bar{n} = n_1 T = \frac{1}{20}$. За відомим значенням \bar{n}

згідно з формулою (1.27) визначимо шукану ймовірність

$$P(0) = \frac{\bar{n}^0}{0!} e^{-\bar{n}} = e^{-1/20} \approx 1 - \frac{1}{20} \approx 0,95.$$

1.16. Знайти густину розподілу ймовірності для часу безвідмовної роботи приладу, згаданому у попередній задачі.

Розв'язання. Розглянемо два інтервали спостереження $(0, t_1]$ і $(0, t_2]$ і обчислимо ймовірності безвідмовної роботи для кожного з них:

$$P(t_{1,2}) = P_{1,2}(0) = \frac{\bar{n}_{1,2}^0}{0!} \exp(-\bar{n}_{1,2}) = \exp(-\bar{n}_{1,2}). \quad (1.39)$$

Середні значення $\bar{n}_{1,2}$, що входять сюди, пропорційні середній кількості появ подій n_1 і відповідним тривалостям інтервалів $t_{1,2}$: $\bar{n}_{1,2} = n_1 t_{1,2}$. Нехай тепер $t_1 = t$, а $t_2 = t + \Delta t$, де Δt – невеликий

приріст часу. Згідно з формулою (1.39) запишемо різницю ймовірностей для двох близьких моментів часу:

$$\begin{aligned} P(t_1) - P(t_2) &= \exp(-n_1 t) - \exp(-n_1(t + \Delta t)) = \\ &= \exp(-n_1 t)(1 - \exp(-n_1 \Delta t)) = \\ &= \exp(-n_1 t)(1 - 1 + n_1 \Delta t - \dots) \approx n_1 \Delta t \exp(-n_1 t). \end{aligned}$$

З іншого боку, різниця ймовірностей між двома близькими моментами часу за визначенням дорівнює $W(t)\Delta t$. Прирівнявши

$$P(t_1) - P(t_2) = n_1 \Delta t \exp(-n_1 t) = W(t)\Delta t,$$

знаходимо

$$W(t) = n_1 \exp(-n_1 t),$$

де $n_1 = \frac{1}{200} \text{год}^{-1}$.

1.17. Випадкова величина η є лінійною функцією випадкової величини ξ : $\eta = \varphi(\xi) = a\xi + b$, де a і b – сталі величини. Знайти густину розподілу ймовірності $W_\eta(y)$ величини η при відомій густині розподілу ймовірності $W_\xi(x)$ випадкової величини ξ .

Розв’язання. Спочатку визначимо обернену функцію $x = f(y) = \frac{y-b}{a}$. Оскільки $x = f(y)$ – однозначна функція, то

$$W_\eta(y) = W_\xi[f(y)] \left| \frac{df(y)}{dy} \right| = \frac{1}{|a|} W_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Якщо величина ξ , наприклад, має рівномірну густину розподілу ймовірності в інтервалі $(x_1, x_2]$, то величина η буде розподілена рівномірно в інтервалі $(ax_1 + b, ax_2 + b]$.

1.18. Випадкова величина ξ з рівномірною густиною розподілу ймовірності

$$W_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -a; \\ \frac{1}{(b+a)}, & -a < x \leq b, \quad a < b; \\ 0, & x > b \end{cases}$$

підлягає квадратичному перетворенню $\eta = \xi^2$.

Визначити:

а) інтегральну функцію розподілу $F_{\xi}(x)$ випадкової величини ξ ;

б) інтегральну функцію розподілу $F_{\eta}(y)$ і густину розподілу ймовірності $W_{\eta}(y)$ випадкової величини η .

Розв'язання.

а) З урахуванням визначення $W_{\xi}(x)$ за формулою (1.7) знаходимо $F_{\xi}(x)$:

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi \leq x\} = \int_{-\infty}^x W_{\xi}(x') dx' = \begin{cases} 0, & x \leq -a; \\ \frac{1}{b+a} x' \Big|_{-a}^x = \frac{x+a}{b+a}, & -a < x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

б) При квадратичному перетворенні функція $y = x^2$ ніколи не набуває від'ємних значень. Тому

$$F_{\eta}(y) = P\{\eta \leq y\} = 0 \quad \text{при} \quad y \leq 0.$$

Для значень $x \in (-a, a]$ (відповідний інтервал значень y : $y \in (0, a^2]$), обернена функція $x = f(y)$ є двозначною: $x_1 = f_1(y) = +\sqrt{y}$, $x_2 = f_2(y) = -\sqrt{y}$. У цьому випадку необхідно користуватися правилом перетворення густини розподілу ймовірності для багатозначних функцій. Отримуємо

$$W_{\eta}(y) = W_{\xi}[x = f_1(y)] \left| \frac{df_1}{dy} \right| + W_{\xi}[x = f_2(y)] \left| \frac{df_2}{dy} \right| = \frac{1}{\sqrt{y}(b+a)}.$$

Звідси

$$F_{\eta}(y) = \int_0^y W_{\eta}(y') dy' = \frac{2\sqrt{y}}{b+a}.$$

На інтервалі $x \in (a, b]$ (відповідний інтервал значень y : $y \in (a^2, b^2]$) обернена функція має тільки одну гілку $x_2 = f_2(y) = \sqrt{y}$, отже вона однозначна. Тому

$$W_{\eta}(y) = W_{\xi}[x_2(y)] \cdot \frac{dx_2}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}(b+a)};$$

$$F_{\eta}(y) = F_{\eta}(a^2) + \int_{a^2}^y W_{\eta}(y') dy' = \frac{1}{2(b+a)} \int_{a^2}^y \frac{dy'}{\sqrt{y'}} + \frac{2a}{b+a} = \frac{\sqrt{y} + a}{b+a}.$$

Таким чином, остаточно отримуємо

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{2\sqrt{y}}{b+a}, & 0 < y \leq a^2; \\ \frac{\sqrt{y} + a}{b+a}, & a^2 < y \leq b^2; \\ 1, & y > b^2. \end{cases}$$

$$W_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{1}{\sqrt{y}(b+a)}, & 0 < y \leq a^2; \\ \frac{1}{2\sqrt{y}(b+a)}, & a^2 < y \leq b^2; \\ 0, & y > b^2. \end{cases}$$

1.19. Сумісна густина розподілу ймовірності двовимірної випадкової величини (ξ, η) має вигляд:

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 4xy e^{-x^2-y^2}, & x > 0, \quad y > 0; \\ 0, & x \leq 0, \quad y \leq 0. \end{cases}$$

Визначити: математичні очікування $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ і дисперсію флуктуацій σ_{ξ}^2 , σ_{η}^2 випадкових величин ξ і η .

Розв'язання. Згідно з умовою узгодженості визначимо спочатку одновимірні густини розподілу ймовірностей величин ξ і η :

$$W_{\xi}(x) = \int_0^{\infty} W_{\xi\eta}(x, y) dy = 4x e^{-x^2} \int_0^{\infty} y e^{-y^2} dy = 2x e^{-x^2}, \quad x > 0;$$

$$W_{\eta}(y) = \int_0^{\infty} W_{\xi\eta}(x, y) dx = 2y e^{-y^2}, \quad y > 0.$$

За знайденими $W_{\xi}(x)$ і $W_{\eta}(y)$ знаходимо середні значення і дисперсії:

$$\bar{\xi} = \int_0^{\infty} x W_{\xi}(x) dx = 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\bar{\eta} = 2 \int_0^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2 &= \int_0^{\infty} (x - \bar{\xi})^2 W_{\xi}(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 W_{\xi}(x) dx - \bar{\xi}^2 = \\ &= 2 \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx - \bar{\xi}^2 = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}{2} - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\sigma_{\eta}^2 = \sigma_{\xi}^2 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

При обчисленні формул, наведених вище, ми використали визначення Гамма-функції Ейлера $\Gamma(x)$ (див. додаток).

1.20. Визначити, чи має функція

$$B_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(ch(\omega_0 \tau) + \frac{\alpha}{\omega_0} sh(\omega_0 |\tau|) \right), \quad \alpha > 0, \quad \omega_0 > 0$$

властивості автокореляційної функції.

Розв'язання. Для відповіді на поставлене питання необхідно перевірити виконання таких умов.

1. Автокореляційна функція при $\tau = 0$ збігається з дисперсією σ_{ξ}^2 , отже має бути додатною величиною: $B_{\xi}(0) > 0$.

2. Автокореляційна функція повинна бути функцією парною: $B_{\xi}(\tau) = B_{\xi}(-\tau)$.

3. Модуль автокореляційної функції $|B_{\xi}(\tau)|$ має досягати абсолютного максимуму при $\tau \rightarrow 0$: $|B_{\xi}(\tau)| \leq B_{\xi}(0)$. З іншого боку, при $\tau \rightarrow \infty$ $B_{\xi}(\tau)$ повинна перетворюватися на 0: $B_{\xi}(\infty) = 0$.

З аналізу виразу для $B_{\xi}(\tau)$ видно, що умови 1 і 2 виконуються. Для перевірки умови 3 зобразимо функцію $B_{\xi}(\tau)$ для додатних значень τ у вигляді

$$B_{\xi}(\tau) = \frac{\sigma_{\xi}^2}{2} \left[e^{-(\alpha - \omega_0)\tau} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} + 1 \right) - e^{-(\alpha + \omega_0)\tau} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} - 1 \right) \right], \quad \tau \geq 0.$$

Оскільки $B_{\xi}(0) = \sigma_{\xi}^2$, то для виконання умови 3 необхідно, щоб вираз у квадратних дужках за модулем не перевищував 2:

$$\left| e^{-(\alpha - \omega_0)\tau} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} + 1 \right) - e^{-(\alpha + \omega_0)\tau} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} - 1 \right) \right| \leq 2. \quad (1.40)$$

Неважко показати, що ця нерівність виконується тільки при $\alpha > \omega_0$. Справді, при $\alpha < \omega_0$ і $\tau \rightarrow \infty$ функція $\exp[-(\alpha - \omega_0)\tau]$ необмежено зростає. З іншого боку, випадок $\alpha = \omega_0$ має бути виключений з розгляду тому, що згідно з (1.40) не виконується умова $B_{\xi}(\infty) = 0$. До такого самого висновку веде й аналіз виразу $B_{\xi}(\tau)$ при $\tau < 0$.

4. Енергетичний спектр, отриманий з автокореляційної функції, не може бути від'ємним. У нашому випадку це відповідає умові $\alpha > \omega_0$.

Підсумовуючи все сказане, дійдемо висновку, що функція $B_{\xi}(\tau)$ задовольняє всім властивостям автокореляційної функції тільки при $\alpha > \omega_0$.

1.21. Випадковий процес $\xi(t) = f(t, \varphi) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ є синусоїдою з випадковою фазою φ , яка рівномірно розподілена в інтервалі $[-\pi, \pi]$. Перевірити цей процес на ергодичність.

Розв'язання. Для перевірки на ергодичність заданого процесу $\xi(t)$ слід обчислити середнє значення $\bar{\xi}$, дисперсію σ_{ξ}^2 і автокореляційну функцію $B_{\xi}(t_1, t_2)$ двома способами – шляхом усереднень за ансамблем реалізацій і за часом, а після цього порівняти отримані результати.

А. Усереднення за ансамблем.

$$\begin{aligned}\bar{\xi}(t, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \varphi) W(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \cos(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi}^2 &= \overline{\xi^2} - \langle \xi \rangle = \overline{\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t, \varphi) W(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t, \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)] d\varphi = \frac{A^2}{2}.\end{aligned}$$

З урахуванням того, що $\bar{\xi} = 0$, обчислимо автокореляційну функцію $B_{\xi}(t_1, t_2) = \langle f(t_1, \varphi) f(t_2, \varphi) \rangle$. Поклавши $t_2 = t + \tau$, $t_1 = t$, отримаємо

$$\begin{aligned}B_{\xi}(t, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \varphi) f(t + \tau, \varphi) W(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \sin(\omega_0 t + \varphi) \cdot A \sin(\omega_0 t + \varphi + \omega_0 \tau) d\varphi = \\ &= \frac{A^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \cos \omega_0 \tau - \cos [2(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0 \tau] \right\} d\varphi = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau = B_{\xi}(\tau).\end{aligned}$$

З наведених формул видно, що процес $\xi(t)$ стаціонарний.

В. Усереднення за часом.

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \varphi) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{T} \int_0^T \sin(\omega_0 t + \varphi) dt = 0. \\ \overline{\sigma_\xi^2} &= \overline{\xi^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t, \varphi) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \cdot \frac{1}{2} \int_0^T [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)] dt = \\ &= \frac{A^2}{2} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} \sin 2(\omega_0 t + \varphi) \Big|_0^T = \frac{A^2}{2}. \\ \overline{B_\xi(\tau)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \varphi) f(t + \tau, \varphi) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_0^T \{ \cos \omega_0 \tau - \cos [2(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0 \tau] \} dt = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau. \end{aligned}$$

Як видно, знайдені значення $\bar{\xi}$, $\overline{\sigma_\xi^2}$ і $\overline{B_\xi(\tau)}$ не залежать від способу усереднення. Отже аналізований процес можна вважати ергодичним.

1.22. Стационарний випадковий процес $\xi(t)$ має рівномірну спектральну густину $S_\xi(\omega) = S_0$ в інтервалі частот $\left[-\frac{\Omega}{2}, \frac{\Omega}{2}\right]$ і $S_\xi(\omega) = 0$ при $|\omega| > \frac{\Omega}{2}$, $\Omega > 0$. Знайти автокореляційну функцію $B_\xi(\tau)$, за допомогою якої перевірити співвідношення невизначеностей.

Розв'язання. Користуючись формулою Вінера-Хінчина (1.33), знаходимо

$$B_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\frac{\Omega}{2}}^{\frac{\Omega}{2}} S_0 e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{S_0}{i\tau} e^{i\omega\tau} \Big|_{-\frac{\Omega}{2}}^{\frac{\Omega}{2}} =$$

$$= \frac{S_0}{i\tau} \left[e^{\frac{i\Omega\tau}{2}} - e^{-\frac{i\Omega\tau}{2}} \right] = S_0 \Omega \frac{\sin(\Omega\tau/2)}{(\Omega\tau/2)}.$$

Згідно з визначенням характерна ширина $\Delta\omega$ енергетичного спектра дорівнює $\Delta\omega = \Omega$. Характерну ж ширину $\Delta\tau$ автокореляційної функції визначимо за першим нулем $\sin(\Omega\tau/2)$: $\Delta\tau = 2\pi/\Omega$. Звідси співвідношення невизначеностей (1.38) записується таким чином:

$$\Delta\tau \Delta\omega = \Omega \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi > 1.$$

1.23. Знайти автокореляційну функцію стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$ з нульовим математичним очікуванням і спектральною густиною

$$S_\xi(\omega) = \begin{cases} N_0/2, & -\omega_2 \leq \omega \leq -\omega_1 \quad (\omega < 0); \\ N_0/2, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad (\omega > 0); \\ 0, & \text{при всіх інших значеннях } \omega. \end{cases}$$

Для окремого випадку $\omega_1 = 0$ визначити величину інтервалу $\Delta t = t_{k+1} - t_k$, при якому значення $\xi_{k+1} = \xi(t_{k+1})$ і $\xi_k = \xi(t_k)$ некорельовані.

Розв'язання. За формулою Вінера–Хінчина (1.33) знаходимо

$$\begin{aligned} B_\xi(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = N_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos \omega\tau d\omega = \frac{N_0}{\tau} (\sin \omega_2\tau - \sin \omega_1\tau) = \\ &= N_0(\omega_2 - \omega_1) \frac{\sin \frac{(\omega_2 - \omega_1)\tau}{2}}{(\omega_2 - \omega_1)\tau} \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tau = \sigma_{\xi_1}^2 \rho_1(\tau) \cos \omega_0\tau. \end{aligned}$$

$$\text{Тут } \sigma_{\xi_1}^2 = N_0 \Delta\omega; \quad \rho_1(\tau) = \frac{\sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{\Delta\omega\tau}{2}}; \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1; \quad \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Для окремого випадку $\omega_1 = 0$ автокореляційна функція $B_\xi(\tau)$ набуває вигляду

$$B_\xi(\tau) = \frac{N_0}{\tau} \sin \omega_2 \tau = N_0 \omega_2 \frac{\sin \omega_2 \tau}{\omega_2 \tau} = \sigma_{\xi_2}^2 \rho_2(\tau),$$

де $\sigma_{\xi_2}^2 = N_0 \omega_2$; $\rho_2(\tau) = \frac{\sin \omega_2 \tau}{\omega_2 \tau}$.

Інтервал $\Delta t = t_{k+1} - t_k$, при якому значення $\xi_k = \xi(t_k)$ і $\xi_{k+1} = \xi(t_{k+1})$ будуть некорельованими, можна визначити, прирівнявши до нуля у наведеній вище формулі для $B_\xi(\tau)$ значення нормованої кореляційної функції $\rho_2(\Delta t)$:

$$\frac{\sin \omega_2 \Delta t}{\omega_2 \Delta t} = 0; \quad \Delta t = \frac{\pi}{\omega_2} = \frac{1}{2f_2}.$$

Тут $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$ – верхня гранична частота спектральної густини $S_\xi(\omega)$. За знайденою величиною Δt кількість некорельованих відліків N на інтервалі тривалістю T визначається як $N = T / \Delta t = 2f_2 T$.

1.3. Задачі для самостійного розв’язання

1.24. Скільки різних комбінацій, які не збігаються, можна отримати при перестановці символів у комбінаціях:

а) abcd;

б) abacdabb.

Відповідь:

а) $N = 24$;

б) $N = 1120$.

1.25. Пристрій приймає сигнал $y(t)$, який складається з корисного сигналу $x(t)$ і шуму $\xi(t)$

$$y(t) = x(t) + \xi(t).$$

Середнє значення шуму $\overline{\xi(t)} = 0$, а дисперсія $\sigma_{\xi}^2 = a^2$. Знайти дисперсію σ_y^2 сигналу $y(t)$.

Відповідь: $\sigma_y^2 = a^2$.

1.26. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена в інтервалі $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$. Обчислити середнє значення $\overline{\xi}$ та дисперсію σ_{ξ}^2 .

Відповідь: $\overline{\xi} = 0$, $\sigma_{\xi}^2 = \frac{a^2}{12}$.

1.27. Знайти середнє значення функції $\eta = e^{i\varphi}$ для рівномірного розподілу випадкової величини φ в інтервалі $(-\Delta\varphi, \Delta\varphi]$.

Відповідь: $\overline{\eta} = \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi}$.

1.28. Визначити середнє значення функції $\eta = e^{\varphi}$ для рівномірного розподілу випадкової величини φ в інтервалі $\left(-\frac{\Delta\varphi}{2}, \frac{\Delta\varphi}{2}\right]$.

Відповідь: $\overline{\eta} = \frac{\text{sh} \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}$.

1.29. Знайти середнє значення функції $\eta = e^{\varphi}$ для нормального розподілу φ при $\overline{\varphi} = 0$.

Відповідь: $\overline{\eta} = \exp\left(\frac{\sigma_{\varphi}^2}{2}\right)$.

1.30. Випадкова величина ξ розподілена за законом $W_{\xi}(x) = a e^{-\kappa x}$, ($\kappa > 0$, $0 \leq x < \infty$). Знайти \bar{x} та σ_x^2 .

Відповідь: $\bar{x} = \frac{1}{\kappa}$, $\sigma_x^2 = \frac{1}{\kappa^2}$.

1.31. Синусоїдальне коливання $\eta = A \sin(\alpha + \xi)$ має випадкову фазу ξ . Обчислити $\bar{\eta}$ та σ_{η}^2 для рівномірного розподілу ξ в інтервалі $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$.

Відповідь: $\bar{\eta} = A \sin \alpha \frac{\sin \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}$;

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \cos 2\alpha \frac{\sin a}{a} - A^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{\sin \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} \right)^2.$$

1.32. Показати, що біномний розподіл задовольняє умові нормування $\sum_{\kappa=0}^N P_N(\kappa) = 1$.

1.33. Показати, що для біномного розподілу існує наступне співвідношення для моментів: $\bar{n}^{\kappa} = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right)^{\kappa} (p+q)^N \Big|_{p+q=1}$.

Користуючись цією формулою, обчислити \bar{n} , $\overline{n^2}$ та σ_n^2 .

Відповідь: $\bar{n} = pN$, $\overline{n^2} = pN \{1 + p(N-1)\}$, $\sigma_n^2 = pN(1-p)$.

1.34. Складаються N коливань $a \cos(\omega t + \xi_i)$, які мають однакові амплітуди. Випадкові фази можуть приймати одне з двох

значень: 0 та π . Обчислити середнє значення сумарної інтенсивності \bar{I} , якщо ймовірність першого значення ($\xi_1 = 0$) дорівнює p , а другого значення ($\xi_2 = \pi$) дорівнює q .

Відповідь:
$$\bar{I} = a^2 N^2 \left[1 + 4 p q \left(\frac{1}{N} - 1 \right) \right].$$

1.35. Знайти енергетичний спектр процесу з АКФ $B(\tau) = \sigma^2 \exp(-\gamma |\tau|) \cos \omega_0 \tau$. Перевірити співвідношення невизначеностей.

Відповідь:
$$S(\omega) = \frac{\sigma^2}{4\pi} \left[\frac{2\gamma}{\gamma^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{2\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right];$$

$$\Delta\omega \cdot \Delta\tau \approx 2.$$

1.36. Знайти характеристичну функцію випадкової величини ξ , яка рівномірно розподілена в інтервалі $[a, b]$.

Відповідь:
$$f_\xi(\nu) = \frac{\exp(ib\nu) - \exp(ia\nu)}{i\nu(b-a)}.$$

1.37. Знайти характеристичну функцію випадкової величини ξ , яка має густину розподілу ймовірності у вигляді $W_\xi(x) = \exp(-|x|)/2$.

Відповідь:
$$f_\xi(\nu) = \frac{1}{\nu^2 + 1}.$$

1.38. Випадковий процес $\xi(t)$ має вигляд $x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$ з постійною ω_0 і випадковими a і b . Вважаючи a і b незалежними, знайти умови стаціонарності процесу $\xi(t)$ в широкому розумінні.

Відповідь:
$$\bar{a} = \bar{b} = 0, \quad \sigma_a^2 = \sigma_b^2.$$

Розділ 2. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ У ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ

У прикладах і задачах цього розділу розглядаються тільки лінійні системи, тобто такі, параметри яких не залежать від рівня вхідного сигналу.

2.1. Основні поняття та співвідношення

Зв'язок між процесом $y(t)$ на виході фізично реалізованої лінійної системи та процесом $x(t)$ на її вході має вигляд

$$y(t) = \int_0^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (2.1)$$

де $h(t, \tau)$ – імпульсна перехідна функція.

Для лінійних систем зі сталими параметрами вираз (2.1) набуває вигляду

$$y(t) = \int_0^t x(t - \tau) h(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Передавальна функція $K(i\omega)$ та імпульсна перехідна функція лінійної системи зі сталими параметрами зв'язані співвідношеннями

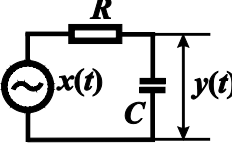
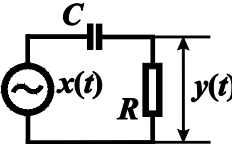
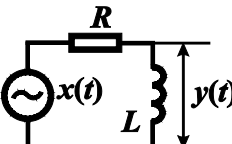
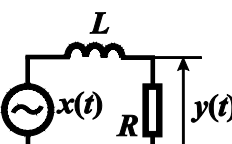
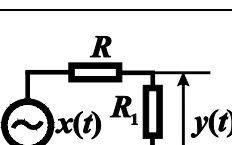
$$K(i\omega) = \frac{C_y(\omega)}{C_x(\omega)} = C(\omega) e^{i\varphi(\omega)} = \int_0^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.3)$$

де $C_y(\omega)$, $C_x(\omega)$ – Фур'є-компоненти процесів $y(t)$ та $x(t)$ відповідно, $C(\omega) = |K(i\omega)|$ – амплітудно-частотна характеристика лінійної системи, $\varphi(\omega) = \arg K(i\omega)$ – фазо-частотна характеристика лінійної системи.

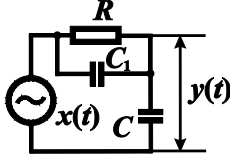
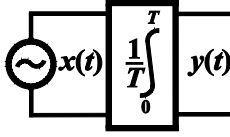
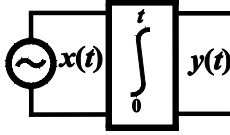
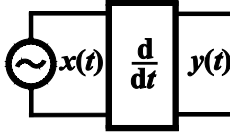
$$h(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.4)$$

Вирази $K(i\omega)$ та $h(t)$ для деяких найпростіших лінійних систем зі сталими параметрами наведені в табл. 2.1.

Комплексні частотні та імпульсні характеристики найпростіших лінійних систем

Схема	$K(i\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$	$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$
	$\frac{1}{1+i\omega RC}$	$\frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$
	$\frac{i\omega RC}{1+i\omega RC}$	$\delta(t) - \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$
	$\frac{i\omega L}{R+i\omega L}$	$\delta(t) - \frac{R}{L} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$
	$\frac{R}{R+i\omega L}$	$\frac{R}{L} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$
	$\frac{1+i\omega T_1}{1+i\omega T}$ $T = (R+R_1)C; T_1 = R_1C$	$\frac{T_1}{T} \delta(t) - \frac{RC}{T^2} \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$

Таблиця 2.1 (продовження)

Схема	$K(i\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$	$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$
	$\frac{1 + i\omega T_1}{1 + i\omega T}$ $T = (C + C_1)R; \quad T_1 = R_1 C$	$\frac{T_1}{T} \delta(t) - \frac{RC}{T^2} \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$
 <p>Ідеальний інтегратор</p>	$\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \exp\left(-i\omega \frac{T}{2}\right)$	$\frac{1}{T}; \quad 0 \leq t \leq T;$ $0; \quad t < 0, t > T$
 <p>Ідеальний інтегратор</p>	$\frac{1}{i\omega}$	$1; \quad 0 \leq t < \infty;$ $0; \quad t < 0$
 <p>Ідеальне диференціююче коло</p>	$i\omega$	$\frac{d}{dt} \delta(t) = \delta'(t)$

Ширина смуги пропускання системи

$$\Delta \omega = \frac{1}{|C_{\xi}(\omega_0)|^2} \int_0^{\infty} |C_{\xi}(\omega)|^2 d\omega = \frac{B_{\xi}(0)}{2S_{\xi}(\omega_0)} . \quad (2.5)$$

Зв'язок математичного очікування та кореляційної функції процесу на виході лінійної системи з відповідними статистичними характеристиками вхідного процесу:

$$\langle y(t) \rangle = L\left(\frac{d}{dt}, t\right) \langle x(t) \rangle , \quad (2.6)$$

$$B_y(t_1, t_2) = L\left(\frac{d}{dt}, t_1\right) L\left(\frac{d}{dt}, t_2\right) B_x(t_1, t_2) ,$$

де $L\left(\frac{d}{dt}, t\right)$ – лінійний однорідний оператор, який пов'язує сигнал на виході системи з сигналом на її вході таким чином :

$$y(t) = L\left(\frac{d}{dt}, t\right) x(t) . \quad (2.7)$$

Енергетичний спектр процесу на виході системи $S_y(\omega)$ має вигляд:

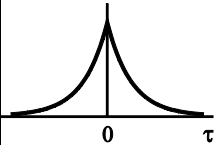
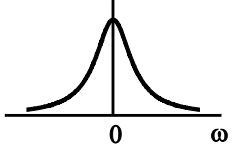
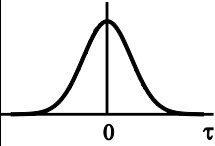
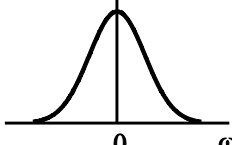
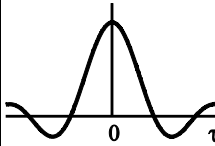

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) |K(i\omega)|^2 , \quad (2.8)$$

де $S_x(\omega)$ – енергетичний спектр на вході системи.

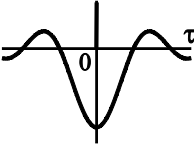
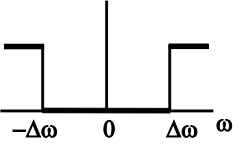
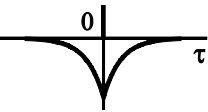
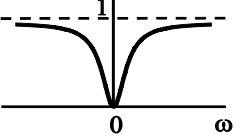
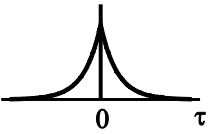
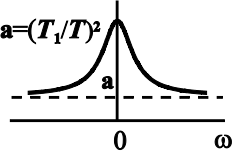
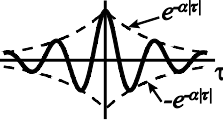
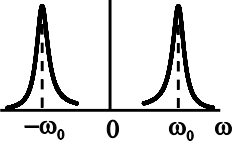
В табл. 2.2 наведені нормовані кореляційні функції та спектральні густини процесів на виході найпростіших лінійних систем при дії на них стаціонарного білого шуму з математичним очікуванням $\langle x \rangle = 0$.

Таблиця 2.2

Нормовані кореляційні функції та спектральні густини процесів на виході лінійних систем при дії на них стаціонарного білого шуму з математичним очікуванням $\langle x \rangle = 0$

Лінійна система	$B(\tau)$		$2\pi \cdot S(\omega)$	
	Аналітичний вираз	Графік	Аналітичний вираз	Графік
1	2	3	4	5
Низькочастотний RC-фільтр	$\exp(-\alpha \tau)$		$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \alpha = \frac{1}{RC}$	
Гаусів низькочастотний фільтр	$\exp(-\alpha\tau^2)$		$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha}\right)$	
Ідеальний низькочастотний фільтр	$\frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau}$		$\frac{\pi}{\Delta\omega}, \quad \omega \leq \Delta\omega$ $0, \quad \omega > \Delta\omega$	

Таблиця 2.2 (продовження)

Ідеальний високочастотний фільтр	$\frac{\pi}{\Delta \omega} \delta(\tau) - \frac{\sin \Delta \omega \tau}{\Delta \omega \tau}$		$0, \quad \omega \leq \Delta \omega$ $\frac{\pi}{\Delta \omega}, \quad \omega > \Delta \omega$	
Високочастотний RL-фільтр	$\delta(\tau) - \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{ \tau }{\beta}\right)$ $\beta = L/R$		$\frac{\beta^2 \omega^2}{1 + \beta^2 \omega^2}$	
Пропорційно-інтегруючий фільтр	$\frac{T_1^2}{T^2} \delta(\tau) + \frac{1}{2T} \times$ $\times \frac{T^2 - T_1^2}{T^2} \exp\left(-\frac{ \tau }{T}\right)$		$\frac{1 + (\omega T_1)^2}{1 + (\omega T)^2}$	
Коливальний контур	$\exp(-\alpha \tau) (\cos \omega_0 \tau +$ $+ \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$		$\frac{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}{[\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$	

2.2. Приклади

2.1. На вхід ідеального диференціюючого кола діє стаціонарний гаусівський випадковий процес $x(t)$ з нульовим математичним очікуванням $\langle x(t) \rangle = 0$ і кореляційною функцією

$$B_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

Визначити кореляційну функцію процесу $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ на виході.

Розв'язання. Оскільки процес стаціонарний, то $B_x(t_1, t_2) = B_x(t_2 - t_1) = B_x(\tau)$, де $\tau = t_2 - t_1$. Згідно з (2.6) для випадку, що розглядається,

$$B_y(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} B_x(t_1, t_2), \quad B_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} B_x(\tau).$$

Оскільки за умовою задачі дається $|\tau|$, а автокореляційні функції $B_x(\tau)$ і $B_y(\tau)$ парні, то достатньо розглянути тільки значення $\tau \geq 0$, а після цього у парний спосіб продовжити остаточний результат у ділянку $\tau < 0$. Так, для $\tau \geq 0$ маємо

$$B_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau} (1 + \alpha\tau),$$

$$\frac{dB_x(\tau)}{d\tau} = -\alpha^2 \sigma_x^2 \tau e^{-\alpha\tau},$$

$$\begin{aligned} B_y(\tau) &= -\frac{d}{d\tau} \left[\frac{dB_x(\tau)}{d\tau} \right] = \alpha^2 \sigma_x^2 \frac{d}{d\tau} (\tau e^{-\alpha\tau}) = \\ &= \alpha^2 \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau} (1 - \alpha\tau). \end{aligned}$$

Продовжуючи тепер отриманий вираз для $B_y(\tau)$ в область від'ємних значень τ , остаточно маємо

$$B_y(\tau) = \alpha^2 \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|).$$

2.2. Автокореляційна функція стаціонарного процесу $x(t)$ з

нульовим середнім має вигляд: $B_x(\tau) = \exp(-\alpha^2 \tau^2)$. Знайти автокореляційну функцію процесу $y(t)$ на виході системи, що перетворює сигнал за законом

$$y(t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt}. \quad (2.9)$$

Розв'язання. Один із можливих шляхів розв'язку задач такого типу зводиться до алгоритму $B_x(\tau) \rightarrow S_x(\omega) \rightarrow S_y(\omega) \rightarrow B_y(\tau)$. Реалізація цього шляху розв'язку зводиться до такого. Згідно з формулами Вінера-Хінчина (1.33) спочатку знаходимо енергетичний спектр вхідного сигналу

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha^2 \tau^2 - i\omega\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left(\alpha\tau + \frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2\right\} d\tau = \frac{\exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right)}{2\alpha\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Далі, переходячи у рівнянні (2.9) до Фур'є-компонент

$$C_y(\omega) = C_x(\omega)(1 + i\omega),$$

знаходимо передавальну функцію лінійної системи: $K(i\omega) = 1 + i\omega$. Звідси згідно з (2.8) енергетичний спектр на виході системи визначається як

$$S_y(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{(1 + \omega^2)}{2\alpha\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right).$$

За відомим спектром $S_y(\omega)$ за допомогою формул Вінера-Хінчина (1.33) знаходимо вихідну автокореляційну функцію

$$B_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \omega^2) \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + i\omega\tau\right) d\omega =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + i\omega\tau\right) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + i\omega\tau\right) d\omega \right] = \\
&= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} (I_1 + I_2).
\end{aligned}$$

Перший інтеграл зводиться до інтеграла Пуассона (див. додаток)

$$I_1 = 2\alpha\sqrt{\pi} \exp(-\alpha^2\tau^2).$$

Під час обчислення другого інтеграла необхідно перейти до диференціювання за параметром τ :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + i\omega\tau\right) d\omega = -\frac{d^2}{d\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + i\omega\tau\right) d\omega = \\
&= -\frac{d^2}{d\tau^2} I_1 = -2\alpha\sqrt{\pi} \frac{d^2}{d\tau^2} \exp(-\alpha^2\tau^2) = \\
&= -2\alpha\sqrt{\pi} \frac{d}{d\tau} \left[(-2\alpha^2\tau) \exp(-\alpha^2\tau^2) \right] = \\
&= 4\alpha^3\sqrt{\pi} \left[\exp(-\alpha^2\tau^2) + \tau(-2\alpha^2\tau) \exp(-\alpha^2\tau^2) \right] = \\
&= 4\alpha^3\sqrt{\pi} (1 - 2\alpha^2\tau^2) \exp(-\alpha^2\tau^2).
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
B_y(\tau) &= \frac{\exp(-\alpha^2\tau^2)}{2\alpha\sqrt{\pi}} \left[2\alpha\sqrt{\pi} + 4\alpha^3\sqrt{\pi}(1 - 2\alpha^2\tau^2) \right] = \\
&= \exp(-\alpha^2\tau^2) \left[1 + 2\alpha^2(1 - 2\alpha^2\tau^2) \right].
\end{aligned}$$

Можливий і інший, простіший шлях розв'язку. Вхідний і вихідний сигнали у лінійній системі пов'язані за допомогою лінійного оператора $\hat{L} \equiv L\left(\frac{d}{dt}, t\right)$.

$$y(t) = \hat{L}x(t),$$

де згідно з (2.9) $\hat{L} = 1 + \partial/\partial t$. Для заданого оператора зв'язок між математичними очікуванням і автокореляційними функціями на вході і виході системи визначається згідно з формулами (2.6):

$$\langle y(t) \rangle = \hat{L} \langle x(t) \rangle,$$

$$B_y(t_1, t_2) = \hat{L}_1 \hat{L}_2 B_x(t_1, t_2).$$

Тут $\hat{L}_{1,2} = 1 + \partial/\partial t_{1,2}$. Враховуючи, що для стаціонарного вхідного процесу, що розглядається, $\langle x(t) \rangle = const = 0$ і $B_x(t_1, t_2) = B_x(t_2 - t_1)$, отримуємо $\langle y(t) \rangle \equiv 0$ і

$$B_y(t_2 - t_1) = \left(1 + \frac{\partial}{\partial t_1}\right) \left(1 + \frac{\partial}{\partial t_2}\right) B_x(t_2 - t_1). \quad (2.10)$$

Переходячи у цьому виразі до нової змінної $\tau = t_2 - t_1$, знаходимо

$$\frac{\partial B_x}{\partial t_1} = \frac{dB_x}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_1} = -\frac{dB_x}{d\tau}; \quad \frac{\partial B_x}{\partial t_2} = \frac{dB_x}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_2} = \frac{dB_x}{d\tau}.$$

У результаті (2.10) набуває такого вигляду:

$$B_y(\tau) = \left(1 - \frac{d}{d\tau}\right) \left(1 + \frac{d}{d\tau}\right) B_x(\tau) = \left(1 - \frac{d^2}{d\tau^2}\right) B_x(\tau).$$

Підставляючи в цю формулу заданий вигляд $B_x(\tau)$, приходимо до виразу

$$\begin{aligned} B_y(\tau) &= \exp(-\alpha^2 \tau^2) - \frac{d}{d\tau} \left[\exp(-\alpha^2 \tau^2) (-\alpha^2) \cdot 2\tau \right] = \\ &= \exp(-\alpha^2 \tau^2) - \exp(-\alpha^2 \tau^2) [(-\alpha^2) \cdot 2\tau - (-\alpha^2) \cdot 2\tau] - \\ &- \exp(-\alpha^2 \tau^2) [(-\alpha^2) \cdot 2] = \exp(-\alpha^2 \tau^2) [1 + 2\alpha^2(1 - 2\alpha^2 \tau^2)], \end{aligned}$$

який збігається з виразом, знайденим раніше іншим способом.

2.3. На вхід диференціюючого кола (рис. 2.1) діє випадкова напруга $x(t)$, що є обмеженим за частотою білим шумом, спектральна густина якого

$$S_x^{(+)}(\omega) = \begin{cases} N_0, & 0 \leq \omega \leq \omega_1; \\ 0, & \omega > \omega_1. \end{cases}$$

Знайти дисперсію σ_y^2 сигналу на виході кола.

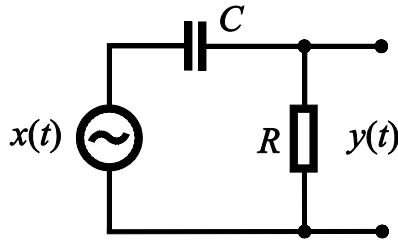


Рис. 2.1

Розв'язання. Для визначення комплексної передавальної функції кола, що розглядається, запишемо закон Кірхгофа:

$$C_x(\omega) = C_I(\omega) \left(R + \frac{1}{i\omega C} \right) = \frac{1 + i\omega CR}{i\omega C} C_I(\omega).$$

Увівши позначення $C_y(\omega) = RC_I(\omega)$, отримаємо

$$K(i\omega) = \frac{C_y(\omega)}{C_x(\omega)} = \frac{i\omega CR}{1 + i\omega CR}; \quad |K(i\omega)|^2 = \frac{\omega^2 C^2 R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}.$$

Тепер з урахуванням (2.8) для спектральної густини на виході системи маємо вираз

$$S_y^{(+)}(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x^{(+)}(\omega) = \begin{cases} N_0 \frac{\omega^2 C^2 R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}, & 0 \leq \omega \leq \omega_1; \\ 0, & \omega > \omega_1. \end{cases}$$

Скориставшись (1.37), отримуємо дисперсію сигналу на виході

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 = B_y(0) &= \int_0^{\infty} S_y^{(+)}(\omega) d\omega = N_0 \int_0^{\omega_1} \frac{\omega^2 C^2 R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} d\omega = \\ &= N_0 \left(\int_0^{\omega_1} d\omega - \int_0^{\omega_1} \frac{d\omega}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \right) = N_0 \left(\omega_1 - \frac{1}{RC} \operatorname{arctg}(\omega_1 RC) \right). \end{aligned}$$

2.4. Стационарний випадковий процес $x(t)$ з кореляційною функцією $B_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$ діє на фільтр нижніх частот, амплітудно-частотна характеристика якого наведена на рис. 2.2. Знайти дисперсію σ_y^2 вихідної напруги $y(t)$.

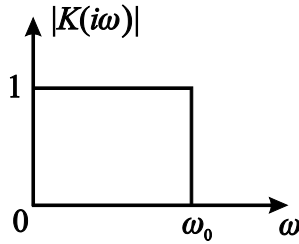


Рис. 2.2

Розв'язання. Спектральну густину на вході фільтра згідно з формулами Вінера-Хінчина (1.33) запишемо як

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau} d\tau =$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau - i\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau - i\omega\tau} d\tau \right] = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \omega\tau d\tau = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Останній інтеграл обчислено з використанням перетворення Лапласа (див. додаток). У випадку, що розглядається, оригіналу $f(\tau) = \cos \omega\tau$ відповідає зображення $F(\alpha) = \alpha / (\alpha^2 + \omega^2)$.

За заданою передавальною функцією системи (рис. 2.2) і знайденим енергетичним спектром вхідного сигналу $S_x(\omega)$ згідно з формулою (2.8) визначаємо спектральну густину вихідного сигналу

$$S_y^{(+)}(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x^{(+)} = \begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, & 0 \leq \omega \leq \omega_0; \\ 0, & \omega > \omega_0. \end{cases}$$

Дисперсія напруги на виході фільтра згідно з (1.37) дорівнює

$$\sigma_y^2 = B_y(0) = \int_0^{\omega_0} S_y^{(+)}(\omega) d\omega = \int_0^{\omega_0} \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \arctg \frac{\omega_0}{\alpha}.$$

Аналогічно розв'язуються всі задачі, пов'язані з дією на лінійні системи стаціонарних процесів і, зокрема, білого шуму (див., наприклад, наступну, складнішу задачу).

2.5. На вхід кола, зображеного на рис. 2.3, діє випадкова напруга $x(t)$, що є білим шумом, зі спектральною густиною $S_x(\omega) = N_0 / 2$, $-\infty < \omega < \infty$. Знайти спектральну густину, кореляційну функцію і дисперсію вихідної напруги $y(t)$.

Розв'язання. Із закону Кірхгофа, записаного для Фур'є-компонент кола, що розглядається, маємо

$$C_x(\omega) = (R + i\omega L)C_1(\omega),$$

$$R = R_1 + R_2.$$

Після введення позначення $C_y(\omega) = R_1 C_1(\omega)$ визначимо комплексну передавальну функцію лінійної системи

$$K(i\omega) = \frac{R_1}{R + i\omega L}.$$

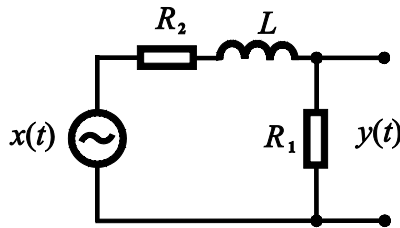


Рис. 2.3

Із (2.8) і цього виразу випливає співвідношення для шуканої спектральної густини на виході системи

$$S_y(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{R_1^2 N_0}{2(R^2 + L^2 \omega^2)}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Згідно з формулою Вінера-Хінчина (1.33) знаходимо кореляційну функцію вихідного сигналу

$$B_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{R_1^2 N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{R^2 + L^2 \omega^2} d\omega.$$

Інтеграл у цій формулі візьмемо за допомогою лишків. Перейдемо у комплексну площину $z = \omega + i\theta$ і розглянемо допоміжний контурний інтеграл

$$B_y(\tau) = \frac{R_1^2 N_0}{2L^2} \oint_C \frac{e^{iz\tau}}{z^2 + a^2} dz = \frac{R_1^2 N_0}{2L^2} I(a, \tau).$$

Тут $a = \frac{R}{L} > 0$, а $I(a, \tau)$ – інтеграл по замкнутому контуру C , який для $\tau > 0$ розташований повністю у верхній півплощині. Особливі точки підінтегральної функції $z_{1,2} = \pm ia$ – прості полюси, $z_3 \rightarrow \infty$ – суттєво особлива точка.

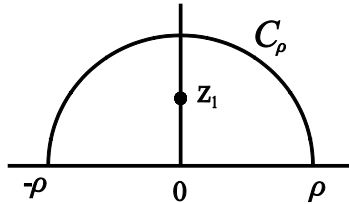


Рис. 2.4

Оскільки підінтегральна функція $\frac{e^{iz\tau}}{z^2 + a^2}$ при $\tau > 0$ є аналітичною у верхній півплощині, то контур інтегрування C можна довільно деформувати. Оберемо його так, як показано на рис. 2.4: частина контуру – це відрізок дійсної осі ($-\rho < \omega < \rho$), а решта – півколо C_ρ радіусом ρ . Після цього спрямуємо $\rho \rightarrow \infty$. При цьому згідно з лемою Жордана інтеграл за C_ρ перетворюється на 0 (через експоненціальне спадання підінтегральної функції $\square e^{-\theta\tau}$), а інтеграл за дійсною віссю, що залишився, дорівнює сумі лишків, що потрапили всередину замкнутого контуру C :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2 + a^2} d\omega = 2\pi i \left[\operatorname{res}_{z=ia} \left(\frac{e^{iz\tau}}{z^2 + a^2} \right) + \operatorname{res}_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{iz\tau}}{z^2 + a^2} \right) \right].$$

Лишок у точці $z = ia$ легко обчислюється як

$$2\pi i \operatorname{res}_{z=ia} \frac{e^{iz\tau}}{(z - z_1)(z - z_2)} = 2\pi i \frac{e^{iz_1\tau}}{z_1 - z_2} = 2\pi i \frac{e^{-\tau a}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\tau a}.$$

А лишок у точці $z \rightarrow \infty$ дорівнює нулю, оскільки $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2 + a^2} = 0$.

Отже,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{a} e^{-a|\tau|}.$$

З урахуванням цього співвідношення, після продовження отриманого парним способом результату в область $\tau < 0$ вираз для $B_y(\tau)$ можна записати в остаточному вигляді:

$$B_y(\tau) = \frac{R_1^2 N_0 \pi}{2L(R_1 + R_2)} \exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L} |\tau|\right).$$

Поклавши в цій формулі $\tau = 0$, отримаємо вираз для дисперсії (див. (1.37)):

$$\sigma_y^2 = \frac{R_1^2 N_0 \pi}{2L(R_1 + R_2)}.$$

2.6. На вхід пропорційно-інтегруючого фільтра (рис. 2.5) надходить стаціонарна випадкова напруга $x(t)$ з нульовим середнім значенням і кореляційною функцією $B_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$.

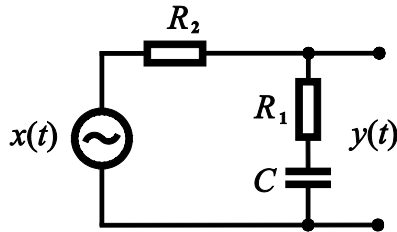


Рис. 2.5.

Визначити спектральну густину $S_y(\omega)$, кореляційну функцію $B_y(\tau)$ і дисперсію σ_y^2 напруги $y(t)$ на виході фільтра.

Розв'язання. Передавальна функція знаходиться з закону Кірхгофа для Фур'є-компонент напруги і струму:

$$C_x(\omega) = \left(R_1 + R_2 + \frac{1}{i\omega C} \right) C_I(\omega),$$

який дає змогу визначити зв'язок між $C_y(\omega)$ і $C_x(\omega)$. Увівши

позначення $C_y(\omega) = \left(R_1 + \frac{1}{i\omega C} \right) C_I(\omega)$, отримаємо

$$C_y(\omega) = \frac{R_1 + \frac{1}{i\omega C}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{i\omega C}} C_x(\omega).$$

Таким чином, маємо:

$$K(i\omega) = \frac{1 + i\omega T_1}{1 + i\omega T}, \quad |K(i\omega)|^2 = \frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T^2},$$

де $T = C(R_1 + R_2)$; $T_1 = R_1 C$.

Енергетичний спектр $S_x(\omega)$ вхідного сигналу визначається за заданою автокореляційною функцією $B_x(\tau)$ за допомогою формули Вінера–Хінчина (1.33):

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau - i\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau - i\omega\tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-(\alpha - i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)\tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha - i\omega} + \frac{1}{\alpha + i\omega} \right] = \frac{\sigma_x^2 a}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \end{aligned}$$

Таким чином, знаючи передавальну функцію $K(i\omega)$ лінійної системи й енергетичний спектр $S_x(\omega)$ на вході, на виході системи згідно з (2.8) отримаємо

$$S_y(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T^2} \cdot \frac{\sigma_x^2 a}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

Тоді кореляційну функцію флуктуацій напруги на виході кола можна

записати з урахуванням формул Вінера–Хінчина (1.33) у такому вигляді:

$$B_y(\tau) = \alpha \frac{\sigma_x^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T^2} \cdot e^{i\omega\tau} d\omega = \alpha \frac{\sigma_x^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega. \quad (2.11)$$

Тут $F(\omega) = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T^2}$. Інтеграл у (2.11) візьмемо за

допомогою лишків, як і в задачі 2.5. Перейдемо у комплексну площину $z = \omega + i\theta$ і оберемо допоміжний інтеграл від

$$F(z) = \frac{1}{\alpha^2 + z^2} \cdot \frac{1 + z^2 T_1^2}{1 + z^2 T^2} \quad \text{по замкненому контуру } C,$$

розташованому у верхній півплощині, якщо $\tau > 0$ (або у нижній – якщо $\tau < 0$). Підінтегральна функція у цьому інтегралі має такі особливі точки: $z_{1,2} = \pm ia$, $z_{3,4} = \pm i/T$ – прості полюси при $\alpha \neq 1/T$ і $z_5 \rightarrow \infty$ – суттєво особлива точка. При цьому для випадку $\tau > 0$ обчислення (2.11) приводить до такого результату:

$$\begin{aligned} B_y(\tau) &= \alpha \frac{\sigma_x^2}{\pi} \cdot 2\pi i \left[\operatorname{res}_{z=i/T} F(z) + \operatorname{res}_{z=ia} F(z) \right] = \\ &= 2\alpha \sigma_x^2 i \left[\frac{1}{T^2} \cdot \frac{1 + T_1^2 (i/T)^2}{2(i/T)} \cdot \frac{e^{-\frac{\tau}{T}}}{(i/T)^2 + \alpha^2} + \frac{1 + T_1^2 (i\alpha)^2}{1 + T^2 (i\alpha)^2} \cdot \frac{e^{-\alpha\tau}}{2i\alpha} \right] = \\ &= \alpha \sigma_x^2 \left[\frac{1 - T_1^2 / T^2}{T} \cdot \frac{e^{-\frac{\tau}{T}}}{\alpha^2 - 1/T^2} + \frac{1 - \alpha^2 T_1^2}{\alpha(1 - \alpha^2 T^2)} e^{-\alpha\tau} \right] = \\ &= \alpha \sigma_x^2 T \left[1 - \frac{T_1^2 / T^2}{\alpha^2 T^2 - 1} e^{-\frac{\tau}{T}} + \frac{1 - \alpha^2 T_1^2}{\alpha T(1 - \alpha^2 T^2)} e^{-\alpha\tau} \right]. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Узагальнюючи (2.12) для випадку всіх довільних значень, остаточно отримуємо

$$B_y(\tau) = \alpha \sigma_x^2 T \left[\frac{1 - T_1^2 / T^2}{\alpha^2 T^2 - 1} e^{-\frac{|\tau|}{T}} + \frac{1 - \alpha^2 T_1^2}{\alpha T(1 - \alpha^2 T^2)} e^{-\alpha|\tau|} \right].$$

Вираз для дисперсії σ_y^2 отримаємо з $B_y(\tau)$, поклавши $\tau=0$:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \alpha \sigma_x^2 T \left[\frac{1 - T_1^2 / T^2}{\alpha^2 T^2 - 1} + \frac{1 - \alpha^2 T_1^2}{\alpha T (1 - \alpha^2 T^2)} \right] = \\ &= \alpha \sigma_x^2 \left[\frac{T_1^2 / T - T}{1 - \alpha^2 T^2} + \frac{1 - \alpha^2 T_1^2}{\alpha (1 - \alpha^2 T^2)} \right] = \alpha \sigma_x^2 \frac{1 - \alpha^2 T_1^2 - \alpha T + \alpha T_1^2 / T}{\alpha (1 - \alpha^2 T^2)} = \\ &= \sigma_x^2 \frac{T - \alpha^2 T_1^2 T - \alpha T^2 + \alpha T_1^2}{T(1 - \alpha^2 T^2)} = \sigma_x^2 \frac{T + \alpha T_1^2}{T(1 + \alpha T)}. \end{aligned}$$

2.3. Задачі для самостійного розв'язання

2.7. На вхід кола, зображеного на рис. 2.6, діє випадкова напруга $x(t)$, що є білим шумом з нульовим математичним очікуванням $\langle x(t) \rangle = 0$ та спектральною густиною $S_x = N_0 / 2$, $-\infty < \omega < \infty$. Знайти спектральну густину та кореляційну функцію вихідної напруги $y(t)$.

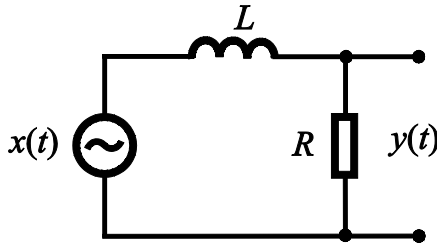


Рис. 2.6

Відповідь: $S_y(\omega) = \frac{N_0}{2} \frac{R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$;

$$B_y(\tau) = \pi N_0 \frac{R}{2L} \exp\left\{-|\tau| \frac{R}{L}\right\} .$$

2.8. Розв'язати задачу 2.1 за умови, що

$$B_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Відповідь:

$$B_y(\tau) = \sigma_x^2 (\omega_0^2 + \alpha^2) e^{-\alpha|\tau|} \left[\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right].$$

2.9. На вхід радіотехнічного пристрою, до якого входять лінія затримки на час $t_{зам} = t_0$ та диференціююча схема (рис. 2.7), впливає стаціонарний випадковий процес з автокореляційною функцією $B_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|)$.

Визначити взаємну кореляційну функцію $B_{zy}(\tau)$ процесів

$$z(t) = x(t + t_0), \quad y(t) = \dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}.$$

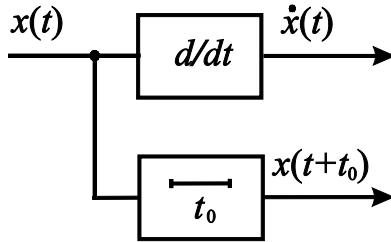


Рис. 2.7

Відповідь: $B_{zy}(\tau) = -\alpha^2 \sigma_x^2 (\tau - t_0) e^{-\alpha|\tau - t_0|}.$

2.10. На схему, наведену на рис. 2.8, впливає флуктуаційна напруга $x(t)$ у вигляді білого шуму з автокореляційною функцією

$$B_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$

Знайти автокореляційну функцію $B_y(\tau)$ та

енергетичний спектр $S_y(\omega)$ вихідної напруги для системи в стаціонарному стані.

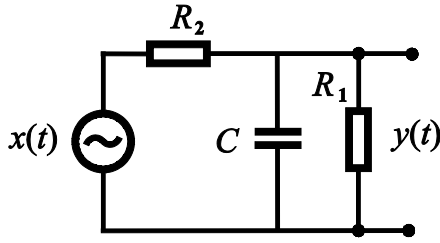


Рис. 2.8

Відповідь:

$$B_y(\tau) = \frac{N_0}{4CR_2} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}|\tau|\right);$$

$$S_y(\omega) = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + R_1^2R_2^2\omega^2C^2} \cdot \frac{N_0}{4\pi}.$$

2.11. На послідовний ланцюг RL (рис. 2.9) впливає флуктуаційний струм $I(t)$, який має рівномірну спектральну густину $S_I(\omega) = \frac{N_0}{2}$ в області частот $|\omega| \leq \omega_1$. Визначити дисперсію σ_y^2 напруги на індуктивності L .

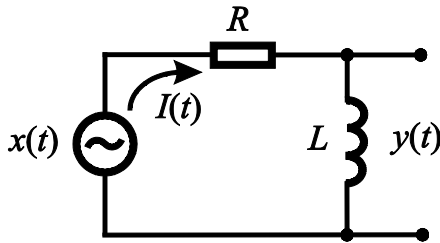


Рис. 2.9

Відповідь:

$$\sigma_y^2 = \frac{(L\omega_1)^2}{3} N_0 \omega_1.$$

2.12. На послідовний ланцюг RL (рис. 2.9) впливає флуктуаційний струм $I(t)$ з АКФ $B_I(\tau) = \sigma_I^2 \exp(-\alpha^2 \tau^2)$. Визначити дисперсію σ_y^2 напруги на індуктивності L .

Відповідь: $\sigma_y^2 = 2\alpha^2 L^2 \sigma_i^2$.

2.13. Стаціонарний випадковий процес $x(t)$ зі спектральною густиною $S_x(\omega)$ впливає на лінійний фільтр з комплексною частотною характеристикою $K(i\omega) = (1 - e^{-i\omega T})^n$. Визначити спектральну густину $S_y(\omega)$ вихідного процесу $y(t)$.

Відповідь: $S_y(\omega) = \left(2 \sin \frac{\omega T}{2}\right)^{2n} S_x(\omega)$.

2.14. Нехай $x(t)$ та $x_1(t)$ – випадкові процеси, а

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau ; \quad y_1(t) = \int_{-\infty}^t h_1(t-\tau)x_1(\tau)d\tau .$$

Довести, що

$$B_{yy_1}(t, t_1) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t_1-\tau_1)B_{xx_1}(\tau, \tau_1)d\tau_1 .$$

2.15. Автокореляційна функція флуктуацій напруги $y(t)$ на обкладинках ємності C (рис. 2.10) має вигляд:

$B_y(\tau) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right)$. Визначити: а) автокореляційну функцію процесу $x(t)$ на вході кола $B_x(\tau)$; б) автокореляційну функцію $B_I(\tau)$ флуктуацій струму $I(t)$.

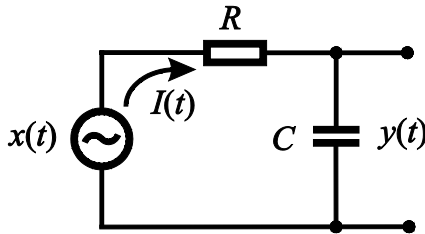


Рис. 2.10

Відповідь: $B_x(\tau) = \sigma^2 \left(3 - 4 \frac{\tau^2}{\tau_0^2} \right) \cdot \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right), \quad \tau_0 = RC ;$

$$B_I(\tau) = \frac{2C^2\sigma^2}{\tau_0^2} \left(1 - \frac{2\tau^2}{\tau_0^2} \right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right).$$

2.16. На вхід RL – кола (рис. 2.11) подається випадковий процес $x(t)$ з автокореляційною функцією $B(\tau) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right)$.

Визначити:

а) енергетичний спектр флуктуацій напруги $y(t)$ на індуктивності L ;

б) дисперсію флуктуацій струму σ_I^2 , якщо на вхід подається білий шум зі спектральною густиною

$$S_x(\omega) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < \omega < \infty .$$

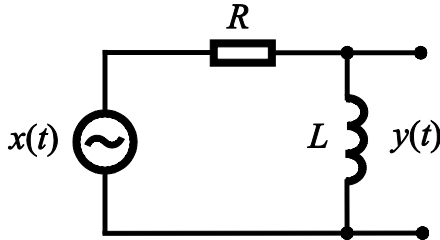


Рис. 2.11

Відповідь:

$$S_y(\omega) = \frac{\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot \frac{\tau_0 \sigma^2}{2\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{\omega^2 \tau_0^2}{4}\right\}; \quad \sigma_I^2 = \frac{N_0}{2} \frac{\pi}{RL} .$$

2.17. На ємність C (рис. 2.12), починаючи з моменту часу $t = 0$, впливає флуктуаційний струм $I(t)$, що становить білий шум з нульовим математичним очікуванням $\langle I(t) \rangle = 0$ та

автокореляційною функцією $B_I(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$. Визначити дисперсію $\sigma_y^2(t)$ напруги $y(t)$ на ємності C .

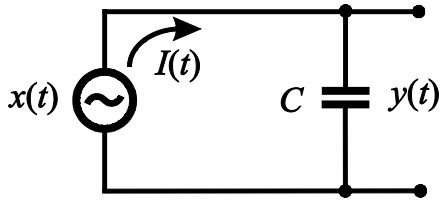


Рис. 2.12

Відповідь: $\sigma_y^2(t) = \frac{N_0}{2C^2} t$.

2.18. Визначити ефективну ширину смуги пропускання інтегруючого RC – кола (рис. 2.10).

Відповідь: $\Delta\omega = \frac{\pi}{RC}$.

Розділ 3. БРОУНІВСЬКИЙ РУХ. ФЛУКТУАЦІЇ В РАДІОТЕХНІЧНИХ КОЛАХ

3.1. Основні поняття та співвідношення

У табл. 3.1 відображена «відповідність» поміж величинами, які характеризують рух броунівської частинки та тепловий шум в електричних колах.

Таблиця 3.1

Броунівський рух	Електричне коло
Маса частинки M	Індуктивність кола L
Коефіцієнт тертя γ	Активний опір R
Швидкість частинки $V(t)$	Сила струму $I(t)$
Зміщення частинки за час t $x(t) = \int_0^t V(t') dt'$	Перенесений заряд за час t $q(t) = \int_0^t I(t') dt'$
Випадкова сила $F(t)$	Випадкова ЕРС $E(t)$

Середнє зміщення броунівської частинки

$$\langle x(t) \rangle = V_0 \tau_M \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_M}\right) \right], \quad (3.1)$$

де $\tau_M = \frac{M}{\gamma}$ – час релаксації, V_0 – початкова швидкість.

Дисперсія зміщень броунівської частинки масою M при температурі T

$$\sigma_x^2(t) = \frac{2kTM}{\gamma^2} \left[\frac{t}{\tau_M} - \frac{3}{2} + 2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_M}\right) - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{2t}{\tau_M}\right) \right]. \quad (3.2)$$

Середня швидкість броунівської частинки

$$\langle V(t) \rangle = V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_M}\right). \quad (3.3)$$

Дисперсія флуктуацій швидкості броунівської частинки

$$\sigma_V^2(t) = \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \exp\left\{-\frac{t' + t'' - 2t}{\tau_M}\right\} B_a(t'' - t'), \quad (3.4)$$

де $B_a(t)$ – АКФ випадкового прискорення. У випадку δ – корельованого випадкового прискорення

$$\sigma_V^2(t) = \frac{kT}{M} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau_M}\right)\right]. \quad (3.5)$$

Формули Найквіста:

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \operatorname{Re} Z_1(i\omega), \quad S_I(\omega) = \frac{S_E(\omega)}{|Z(i\omega)|^2} = \frac{kT}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{Re} Z_1(i\omega)}{|Z(i\omega)|^2} \quad (3.6)$$

при $-\infty < \omega < \infty$, де $Z_1(i\omega)$ – комплексний опір (імпеданс) ділянки електричного кола, що шумить, $Z(i\omega)$ – імпеданс кола, яке розглядається.

Спектральна густина флуктуацій швидкості броунівської частинки

$$S_V(\omega) = \frac{kT}{\pi\gamma} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_M^2}. \quad (3.7)$$

Формула Каллена–Вельтона (флуктуаційно-дисипаційна теорема):

$$S_x(\omega) = -\frac{kT\alpha''(\omega)}{\pi\omega}, \quad (3.8)$$

де $\alpha''(\omega)$ – уявна частина узагальненої сприйнятливості $\alpha(\omega)$.

АКФ дробового струму

$$B_I(\tau) = e \langle I \rangle \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\tau + \theta) d\theta, \quad (3.9)$$

де e – заряд електрона, $\langle I \rangle$ – середній струм, $F(x)$ – форма елементарного імпульсу струму, який створюється одним електронном.

Спектральна густина дробового струму

$$S_I(\omega) = 2\pi e \langle I \rangle |C_F(\omega)|^2, \quad (3.10)$$

де $C_F(\omega)$ – спектр імпульсу струму $F(t)$: $C_F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt$.

3.2. Приклади

3.1. Обчислити дисперсію флуктуацій швидкості частинки для одновимірного броунівського руху, вважаючи, що автокореляційна функція (АКФ) випадкового прискорення є гаусовою:

$$B_a(\tau) = \overline{a(t'')a(t')} = \sigma_a^2 \exp\left(-\frac{\tau^2}{T_a^2}\right), \quad (3.11)$$

де $\sigma_a^2 = \overline{a^2}$ – дисперсія, T_a – характерний масштаб спадання АКФ випадкового прискорення $a(t)$, а $\tau = t'' - t'$.

Розв'язання. Skorистаємося формулою (3.4) для дисперсії флуктуації швидкості броунівської частинки

$$\sigma_V^2(t) = \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \exp\left\{-\frac{2t}{\tau_M} + \frac{t' + t''}{\tau_M}\right\} B_a(t'' - t') \quad (3.12)$$

і перейдемо в ній до нових сумарних $q = t' + t''$ і різницевих $\tau = t'' - t'$ змінних. При цьому, як легко показати, якобіан переходу I дорівнює $I = \frac{\partial(t', t'')}{\partial(q, \tau)} = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$. Звідси у нових змінних

вираз (3.12) записується так:

$$\begin{aligned} \sigma_V^2(t) &= \frac{e^{-2t/\tau_M}}{2} \left\{ \int_{-t}^0 B_a(\tau) d\tau \int_{-\tau}^{\tau+2t} e^{q/\tau_M} dq + \int_0^t B_a(\tau) d\tau \int_{\tau}^{-\tau+2t} e^{q/\tau_M} dq \right\} = \\ &= \frac{\tau_M}{2} e^{-2t/\tau_M} \left\{ \int_{-t}^0 B_a(\tau) \left[e^{(\tau+2t)/\tau_M} - e^{-\tau/\tau_M} \right] d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t B_a(\tau) \left[e^{(-\tau+2t)/\tau_M} - e^{\tau/\tau_M} \right] d\tau \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tau_M e^{-2t/\tau_M} \int_0^t B_a(\tau) \left[e^{(-\tau+2t)/\tau_M} - e^{\tau/\tau_M} \right] d\tau = \\
&= \tau_M \left\{ \int_0^t B_a(\tau) e^{-\tau/\tau_M} d\tau - e^{-2t/\tau_M} \int_0^t B_a(\tau) e^{\tau/\tau_M} d\tau \right\}.
\end{aligned}$$

Після підстановки заданого виду АКФ (3.11) випадкового прискорення отримаємо

$$\begin{aligned}
&\sigma_V^2(t) = \sigma_a^2 \tau_M \times \\
&\times \left\{ \int_0^t \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_M} - \frac{\tau^2}{T_a^2}\right) d\tau - \exp\left(-\frac{2t}{\tau_M}\right) \int_0^t \exp\left(\frac{\tau}{\tau_M} - \frac{\tau^2}{T_a^2}\right) d\tau \right\}. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

За визначенням T_a – характерний час зміни АКФ $B_a(\tau)$. Він визначається часом зіткнення окремих молекул із броунівською макрочастинкою. Час же τ_M – характерний час релаксації швидкості макрочастинки. Тому завжди можна вважати виконаною умову $\tau_M \gg T_a$. При цьому в інтегралах (3.13) у показниках експонент можна знехтувати доданками $\pm \tau/\tau_M$:

$$\exp\left\{-\frac{\tau^2}{T_a^2} \pm \frac{\tau}{\tau_M}\right\} \approx \exp\left(-\frac{\tau^2}{T_a^2}\right). \quad \text{Якщо до того ж ми будемо}$$

розглядати час $t \gg \tau_M$ ($T_a \ll \tau_M \ll t$), то обчислення інтегралів можна проводити у нескінченних межах. У результаті отримуємо

$$\begin{aligned}
\sigma_V^2(t) &\approx \sigma_a^2 \tau_M \left[1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau_M}\right) \right] \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\rho^2}{T_a^2}\right) d\rho = \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_a^2 T_a \tau_M \left[1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau_M}\right) \right].
\end{aligned}$$

Враховуючи далі, що $t \gg \tau_M$, остаточно отримаємо

$$\sigma_V^2 \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_a^2 T_a \tau_M.$$

3.2. Визначити спектральні густини ЕРС і струму для кола, що складається з опору R з незамкненими виведеннями (рис. 3.1).

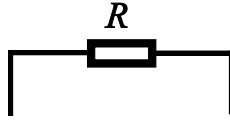


Рис. 3.1

Розв’язання. Користуючись формулами Найквіста (3.6), отримуємо

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \operatorname{Re} Z_1(\omega) = \frac{kT}{\pi} R ;$$

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \frac{\operatorname{Re} Z_1(\omega)}{|Z(\omega)|^2} = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{(R + \infty)^2} = 0 .$$

При обчисленні $S_I(\omega) = \frac{S_E(\omega)}{|Z(\omega)|^2}$ за $Z(\omega)$ слід брати повний комплексний опір кола, в якому тече шумовий струм. У цьому випадку $|Z(\omega)| = R + \infty$. Фізично рівність $S_I(\omega) = 0$ визначається відсутністю у колі струму, оскільки коло розімкнене.

3.3. Визначити спектральні густини ЕРС і струму для короткозамкненого опору R (рис. 3.2).

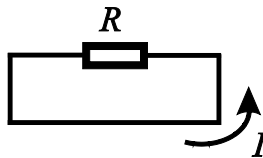


Рис. 3.2

Розв’язання. Користуючись формулами Найквіста (3.6), знаходимо

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} R ; \quad S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{(R + 0)^2} = \frac{kT}{\pi} \frac{1}{R} .$$

3.4. Проаналізувати зміни в спектральній густині теплових флуктуацій струму залежно від величини опору R , беручи до уваги ємність C , яку шунтує R (рис. 3.3).

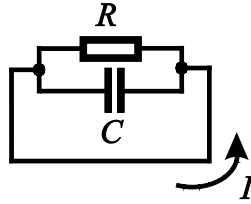


Рис. 3.3.

Розв’язання. Для розв’язання задачі будемо користуватися формулами Найквіста (3.6). Перш за все визначимо $Z_1(\omega)$, $\text{Re } Z_1(\omega)$, $|Z(\omega)|$:

$$\frac{1}{Z_1(\omega)} = \frac{1}{R} + i\omega C; \quad Z_1(\omega) = \frac{R}{1 + i\omega CR} = \frac{R(1 - i\omega CR)}{1 + (\omega CR)^2};$$

$$\text{Re } Z_1(\omega) = \frac{R}{1 + (\omega CR)^2};$$

$$|Z(\omega)| = \sqrt{Z(\omega)Z^*(\omega)} = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}.$$

Тепер

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{1 + (\omega CR)^2};$$

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} \frac{1 + (\omega CR)^2}{R^2} = \frac{kT}{\pi} \frac{1}{R}.$$

Графік залежності спектральної густини струму теплових флуктуацій від величини опору показано на рис. 3.4.

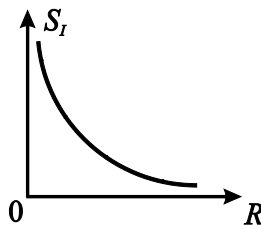


Рис. 3.4

3.5. Визначити спектральні густини ЕРС і струму для контуру, що складається із паралельно поєднаних опору R і ємності C (рис. 3.5).

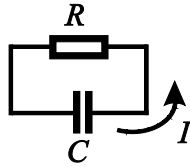


Рис. 3.5

Розв’язання. Послідовність розв’язку цієї задачі така сама, як і попередньої.

$$Z_1(\omega) = R + \frac{1}{i\omega C} ;$$

$$\operatorname{Re} Z_1(\omega) = R ;$$

$$|Z(\omega)| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} = \sqrt{\frac{1 + (\omega CR)^2}{\omega^2 C^2}} ;$$

$$|Z(\omega)|^2 = \frac{1 + (\omega CR)^2}{\omega^2 C^2} .$$

Тепер згідно з формулами Найквіста (3.6) маємо

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} R ;$$

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \cdot \frac{R\omega^2 C^2}{1 + (\omega CR)^2} .$$

3.6. Знайти кореляційну функцію і проаналізувати енергетичний спектр дробового струму при заданій функції форми поодинокого імпульсу:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{2t}{\tau_{np}} , & 0 \leq t \leq \tau_{np} ; \\ 0 , & t < 0, \quad t > \tau_{np} . \end{cases}$$

Розв’язання. За умовою задачі $F(t)$ має вигляд, зображений на рис. 3.6.

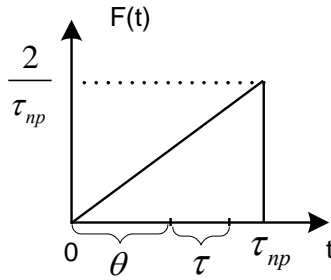


Рис. 3.6

Згідно з (3.9) кореляційна функція струму $B_I(\tau)$, записана у змінних θ і τ , подається як

$$B_I(\tau) = e\bar{I} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)F(\theta + \tau)d\theta,$$

де \bar{I} – середнє значення струму. Границі інтегрування у даному випадку вибираються, виходячи із заданого вигляду функції $F(t)$. Поточна точка визначається координатою θ , τ – часовий зсув для визначення кореляції (див. рис. 3.6). Цей зсув може бути як додатним, так і від’ємним.

Розглянемо спочатку випадок $\tau > 0$. За умовою задачі $F(t) = 0$ при $t < 0$ і $t > \tau_{np}$. Отже $B_I(\tau)$ буде відмінною від нуля за умови виконання наступних нерівностей (див. (3.9)):

$$0 < \theta < \tau_{np} \quad \text{і} \quad 0 < (\theta + \tau) < \tau_{np}.$$

Перетворимо ці нерівності до вигляду: $0 < \theta < \tau_{np}$ і $-\tau < \theta < \tau_{np} - \tau$. Зобразимо крайні точки цих нерівностей на осі (рис. 3.7).

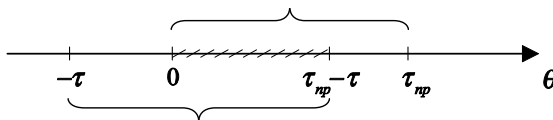


Рис. 3.7

Видно, що обидві нерівності одночасно виконуватимуться тільки за умови перебування θ в інтервалі $0 < \theta < \tau_{np} - \tau$ (заштрихована ділянка). Таким чином, ми приходимо до такого визначення:

$$B_I(\tau) = e\bar{I} \int_0^{\tau_{np}-\tau} \frac{2\theta}{\tau_{np}^2} \frac{2(\theta+\tau)}{\tau_{np}^2} d\theta = \frac{2e\bar{I}}{3\tau_{np}^4} (\tau_{np} - \tau)^2 (\tau + 2\tau_{np}),$$

яке справджується для $0 \leq \tau \leq \tau_{np}$. Аналогічним чином отримується і вираз для $B_I(\tau)$ при від'ємних значеннях τ : $-\tau_{np} \leq \tau \leq 0$. У цьому випадку, проте, зручніше продовжити парним способом $B_I(\tau)$ в область від'ємних значень τ ($\tau < 0$). У результаті отримуємо такий остаточний вираз:

$$B_I(\tau) = \frac{2e\bar{I}}{3\tau_{np}^4} (\tau_{np} - |\tau|)^2 (|\tau| + 2\tau_{np}).$$

Графік залежності $B_I(\tau)$ подано на рис. 3.8.

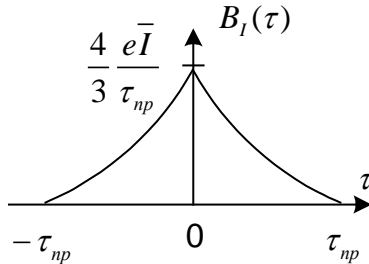


Рис. 3.8

Видно, що $B_I(\tau)$ має максимальне значення при $\tau = 0$, а при $\tau = \pm\tau_{np}$ набуває мінімальних значень, що дорівнюють нулю.

Енергетичний спектр $S_I(\omega)$ для функції $F(t)$, що розглядається, визначається згідно з (3.10):

$$S_I(\theta) = \frac{2e\bar{I}}{\pi\theta^4} (2 + \theta^2 - 2\cos\theta - 2\theta\sin\theta),$$

де $\theta = \omega\tau_{np}$ – безрозмірний кут прольоту.

Проаналізуємо цей вираз при різних значеннях θ (частоти ω). При $\theta \ll 1$ (низькі частоти), подавши $\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$ і

$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}$, отримаємо

$$S_I(\theta) \approx \frac{e\bar{I}}{2\pi}.$$

При $\theta \gg 1$ (високі частоти) у цій формулі можна залишити в дужках тільки доданок θ^2 , в результаті чого знаходимо

$$S_I(\theta) = \frac{2e\bar{I}}{\pi\theta^2}.$$

Звідси випливає, що на високих частотах $S_I(\omega) \sim 1/\omega^2$. Графік $S_I(\omega)$ показано на рис. 3.9.

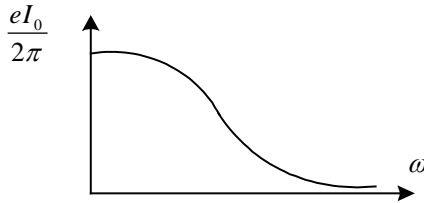


Рис. 3.9

3.3. Задачі для самостійного розв'язання

3.7. Розрахувати $\overline{V^2}(t)$ для одновимірного броунівського руху, якщо кореляційна функція випадкового прискорення $a(t)$ має вигляд:

$$R_a = \overline{a^2}, \quad |t_2 - t_1| \leq T;$$

$$R_a = 0, \quad |t_2 - t_1| > T.$$

Відповідь: $\overline{V^2}(t) = V_0^2 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) + \overline{a^2} \tau T \left[1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\right].$

3.8. Чому дорівнює дисперсія флуктуацій електричного заряду,

який переноситься через даний перетин провідника в послідовному RL колі (при $t \gg L/R$).

Вказівка. Скористатися наведеними на початку розділу формулами для середнього квадрату зміщення броунівської частинки і табл. 3.1.

Відповідь:
$$\sigma_q^2 \Big|_{t \gg \frac{L}{R}} = q^2 \Big|_{t \gg \frac{L}{R}} = \frac{2kT}{R} t.$$

3.9. Розрахувати максимальну потужність, котру можна витягти з опору, який шумить та який нагрітий до температури T , шляхом оптимального узгодження навантаження.

Відповідь:
$$P_{\max}(\Delta\omega) = \frac{kT}{2\pi} \Delta\omega.$$

3.10. Знайти дисперсію флуктуацій шумового струму в послідовному RL колі для δ – корельованої випадкової ЕРС $B_E = C\delta(t_1 - t_2)$. Сталу C визначити з умови рівності $\frac{kT}{2}$ середній енергії магнітного поля індуктивності.

Вказівка. Скористатися формулою (3.5) при заданих умовах і табл. 3.1.

Відповідь:
$$\sigma_I^2 = \frac{kT}{L} \left[1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \right], \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

3.11. Знайти спектральну густину випадкової ЕРС теплових шумів для кола, яке складається з послідовно з'єднаних R і L .

Відповідь:
$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} R.$$

3.12. Визначити енергетичний спектр випадкових ЕРС та струму теплових шумів для кола, зображеного на рис. 3.10.

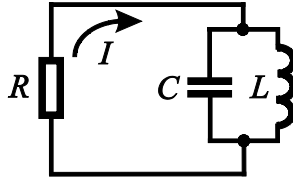


Рис. 3.10

Відповідь: $S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} R$; $S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{R^2 + \frac{\omega^2 L^2}{(1 - \omega^2 LC)^2}}$.

3.13. Визначити енергетичний спектр випадкових ЕРС та струму теплових шумів для кіл, які зображені на рис. 3.11. Температура окремих елементів кіл наведена на схемах. Порівняти і пояснити отримані результати. Порівняти з результатами задач 3.2 і 3.3, для чого припустити $R_2 \rightarrow 0$ і $R_2 \rightarrow \infty$.

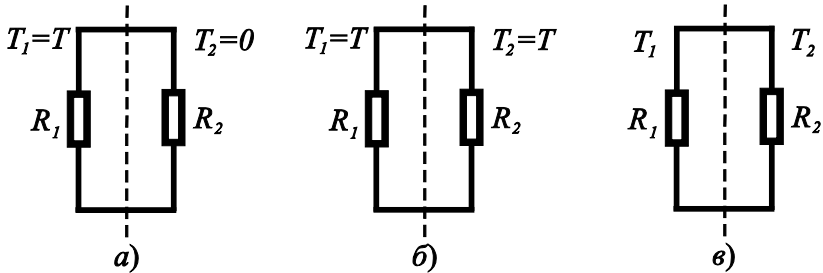


Рис. 3.11

Відповідь:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } S_E &= \frac{kT}{\pi} R_1, & S_I &= \frac{kT}{\pi} \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2}; \\
 \text{б) } S_E &= \frac{kT}{\pi} (R_1 + R_2), & S_I &= \frac{kT}{\pi} \frac{1}{R_1 + R_2}; \\
 \text{в) } S_E &= \frac{k}{\pi} (T_1 R_1 + T_2 R_2), & S_I &= \frac{k}{\pi} \frac{T_1 R_1 + T_2 R_2}{(R_1 + R_2)^2}.
 \end{aligned}$$

3.14. Визначити спектральну густину шумового струму і дисперсію його флуктуацій для кіл, які показані на рис. 3.12. Порівняти отримані результати між собою. Пояснити нескінченне значення дисперсії для кола б).

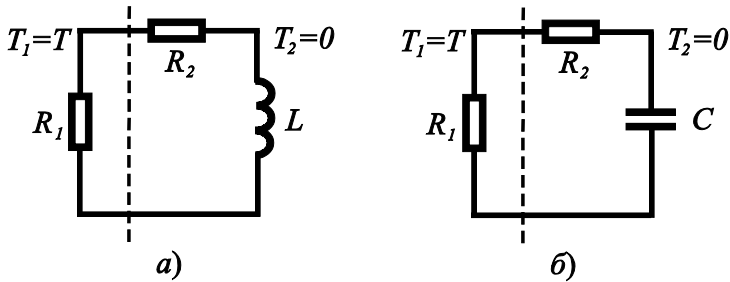


Рис. 3.12

Відповідь:

$$\text{а) } S_E = \frac{kT}{\pi} R_1;$$

$$\text{б) } S_E = \frac{kT}{\pi} R_1;$$

$$S_I = \frac{kT}{\pi} \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L^2};$$

$$S_I = \frac{kT}{\pi} \frac{R_1 \omega^2 C^2}{1 + \omega^2 C^2 (R_1 + R_2)^2};$$

$$\sigma_I^2 = \frac{kTR_1}{(R_1 + R_2)L}.$$

$$\sigma_I^2 \rightarrow \infty.$$

3.15. Розрахувати енергетичний спектр шумових ЕРС та струму в колі, яке зображено на рис. 3.13. Порівняти отриману залежність $S_I(\omega)$ на високих частотах з відповідним результатом задачі 3.14а.

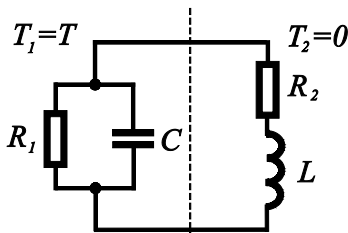


Рис. 3.13

Відповідь: $S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \frac{R_1}{1 + R_1^2 \omega^2 C^2};$

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \frac{R_1}{1 + R_1^2 \omega^2 C^2} \left[\left(R_2 + \frac{R_1}{1 + R_1^2 \omega^2 C^2} \right)^2 + \left(\omega L - \frac{R_1^2 \omega C}{1 + R_1^2 \omega^2 C^2} \right)^2 \right]^{-1}.$$

3.16. Знайти кореляційну функцію і енергетичний спектр дробового струму – імпульсного пуассонівського випадкового процесу $I(t) = e \sum_{\nu} F(\theta)$, де $F(\theta) = \delta(\theta)$, $\theta = t - t_{\nu}$, а t_{ν} – пуассонівський потік подій.

Відповідь: $R_I(\tau) = e\bar{I} \delta(\tau);$

$$S_I(\omega) = \frac{e\bar{I}}{2\pi}.$$

Розділ 4. ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

4.1. Основні поняття та співвідношення

Узагальнення формул Вінера–Хінчина для випадкового поля ξ :

$$B_{\xi}(\vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\vec{q}) e^{i\vec{q}\vec{\rho}} d\vec{q}, \quad S_{\xi}(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} d\vec{\rho}. \quad (4.1)$$

Середня інтенсивність розсіяного сигналу у борнівському наближенні

$$\bar{I}_1(\vec{R}) = \frac{\pi A_0^2 k_0^4}{2R^2} V \cdot S_{\mu}(\vec{q}). \quad (4.2)$$

Тут A_0 – амплітуда падаючої плоскої хвилі $U_0 = A_0 \exp(i\vec{k}_0 \vec{r})$, V – розсіюючий об'єм, $S_{\mu}(\vec{q})$ – просторово-енергетичний спектр відносних флуктуацій діелектричної проникності $\mu = \delta\varepsilon / \bar{\varepsilon}$:

$$S_{\mu}(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\mu}(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} d\vec{\rho},$$

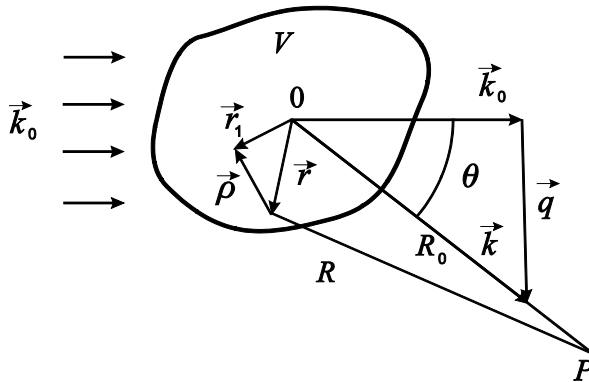


Рис. 4.1

$B_{\mu}(\vec{\rho})$ – автокореляційна функція відносних флуктуацій діелектричної проникності в розсіюючому об'ємі, $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_0$ – вектор

розсіювання. Пояснення позначень в (4.2) див. на рис. 4.1 та в конспекті лекцій.

Індикатриса розсіювання

$$F(\theta, \varphi) = \frac{\bar{I}_1(R, \theta, \varphi)}{\bar{I}_1(R, 0, 0)} = \frac{S_\mu(\vec{q})}{S_\mu(0)}. \quad (4.3)$$

Вираз для дисперсії флуктуацій фази хвилі в середовищах з великими, але плавними неоднорідностями (див. рис. 4.2) має вигляд

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{2} k_0^2 \sigma_\mu^2 z \int_0^z \left(1 - \frac{\zeta}{z}\right) K_\mu(\zeta) d\zeta, \quad (4.4)$$

де $K_\mu(\zeta) = B_\mu(\zeta) / \sigma_\mu^2$ – коефіцієнт кореляції відносних флуктуацій діелектричної проникності $\mu = \delta\varepsilon / \bar{\varepsilon}$.

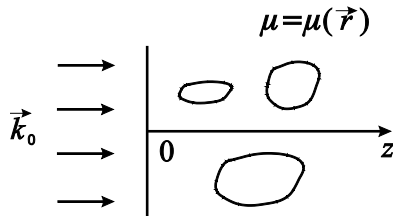


Рис. 4.2

4.2. Приклади

4.1. Показати, що для статистично однорідного й ізотропного поля $\delta\mu(\vec{R})$ просторово-спектральна густина $S_\mu(\vec{q})$ залежить тільки від модуля вектора розсіювання \vec{q} . Отримати зв'язок між $B_\mu(\rho)$ і $S_\mu(q)$.

Розв'язання. За визначенням, кореляційна функція однорідного та ізотропного поля залежить тільки від модуля $\rho = |\vec{\rho}|$ різницевого вектора $\vec{\rho}$. З урахуванням цього запишемо формулу (4.1):

$$S_\mu(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} B_\mu(\rho) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} d\vec{\rho}.$$

Цей інтеграл зручно обчислювати у сферичних координатах $\vec{\rho} = (\rho, \theta, \varphi)$, де θ відлічується від полярної осі, спрямованої

уздовж вектора \vec{q} (рис. 4.3).

Враховуючи, що в обраній системі координат елементарний об'єм записується у вигляді $d\vec{\rho} = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$, а $\vec{q}\vec{\rho} = q\rho \cos \theta$, отримаємо

$$S_{\mu}(\vec{q}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^{\infty} B_{\mu}(\rho) \rho^2 d\rho \int_0^{\pi} e^{-iq\rho \cos \theta} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi. \quad (4.5)$$

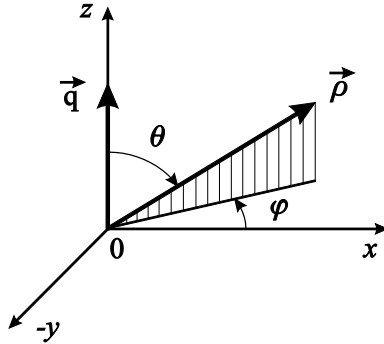


Рис. 4.3

Інтеграл за $d\varphi$ дорівнює 2π , а інтегрування за $d\theta$ легко проводиться за допомогою заміни змінних $t = \cos \theta$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{-iq\rho \cos \theta} \sin \theta d\theta &= \int_{-1}^1 e^{-iq\rho t} dt = \\ &= -\frac{1}{iq\rho} e^{-iq\rho t} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{q\rho} \sin(q\rho). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Підставляючи (4.6) у (4.5), отримаємо

$$S_{\mu}(\vec{q}) = \frac{1}{2\pi^2 q} \int_0^{\infty} B_{\mu}(\rho) \sin(q\rho) \rho d\rho = S_{\mu}(q).$$

Отже, для статистично однорідного й ізотропного поля $\delta\mu(\vec{R})$ просторовий енергетичний спектр залежить тільки від модуля вектора розсіювання \vec{q} : $S_{\mu}(\vec{q}) = S_{\mu}(q)$.

В аналогічний спосіб, враховуючи, що для ізотропного поля флуктуацій діелектричної проникності $S_\mu(\vec{q}) = S_\mu(q)$, можна переписати й формулу (4.1):

$$B_\mu(\vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\mu(q) e^{i\vec{q}\vec{\rho}} d\vec{q} = \int_0^{\infty} q^2 S_\mu(q) dq \int_0^\pi e^{iq\rho\cos\theta} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ = \frac{4\pi}{\rho} \int_0^{\infty} S_\mu(q) \sin(q\rho) q dq = B_\mu(\rho).$$

Тут інтегрування виконувалося у сферичних координатах $\vec{q} = (q, \theta, \varphi)$, де θ відлічується від полярної осі, спрямованої уздовж вектора $\vec{\rho}$ (рис. 4.4).

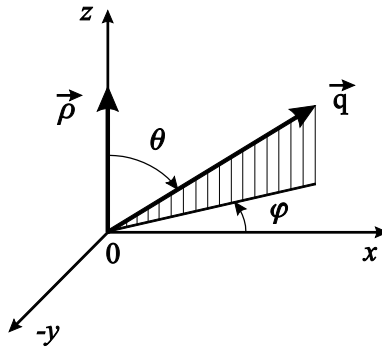


Рис. 4.4

4.2. У результаті розсіювання плоскої хвилі на випадкових неоднорідностях середовища виникло випромінювання, інтенсивність якого спадає за законом $\sim \exp(-\theta^2 / \theta_0^2)$ зі зростанням кута розсіювання θ . Визначити за цими даними коефіцієнт кореляції показника заломлення, вважаючи кут θ_0 малим ($\theta_0 \ll 1$).

Розв'язання. Розглядаємо розсіювання у борнівському наближенні (одноразове розсіювання). Згідно з умовою

$$\bar{I}_1 \sim \exp\left\{-\frac{\theta^2}{\theta_0^2}\right\}.$$

Оскільки $\bar{I}_1 \sim S_\mu(\bar{q})$, то

$$S_\mu(\bar{q}) \sim \exp\left\{-\frac{\theta^2}{\theta_0^2}\right\}. \quad (4.7)$$

Перейдемо від θ до q з використанням співвідношення

$$q = 2k_0 \sin \frac{\theta}{2} \quad (\text{див. рис. 4.5, де прийнято } |\vec{k}| = |\vec{k}_0|).$$

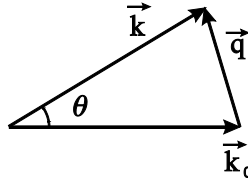


Рис. 4.5

Врахуємо також, що згідно з умовою кут θ_0 малий. Відповідно до (4.7), енергетичний спектр $S_\mu(\bar{q})$ відмінний від нуля лише для кутів $\theta \leq \theta_0 \ll 1$. Тому можна обмежитися розглядом тільки малих значень θ (у яких зосереджена основна енергія розсіяного випромінювання). У цьому випадку $q \approx k_0 \theta$. Отже (4.7) можна подати таким чином:

$$S_\mu(\bar{q}) \approx \exp\left(-\frac{q^2}{k_0^2 \theta_0^2}\right). \quad (4.8)$$

Тепер з формул Вінера–Хінчина випливає

$$\begin{aligned} B_\mu(\vec{\rho}) &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{q^2}{k_0^2 \theta_0^2}\right) \exp(i\vec{q}\vec{\rho}) d\vec{q} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}{k_0^2 \theta_0^2}\right) e^{i(q_x \rho_x + q_y \rho_y + q_z \rho_z)} dq_x dq_y dq_z = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iq_x \rho_x - \frac{q_x^2}{k_0^2 \theta_0^2}\right) dq_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iq_y \rho_y - \frac{q_y^2}{k_0^2 \theta_0^2}\right) dq_y \times \end{aligned}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iq_z \rho_z - \frac{q_z^2}{k_0^2 \theta_0^2}\right) dq_z. \quad (4.9)$$

Кожен з трьох однакових за виглядом інтегралів у (4.9) зводиться до інтеграла Пуассона. Розглянемо один із цих інтегралів:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iq_x \rho_x - \frac{q_x^2}{k_0^2 \theta_0^2}\right) dq_x &= \theta_0 k_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\psi^2 - \frac{\rho_x^2 \theta_0^2 k_0^2}{4}\right) d\psi = \\ &= \theta_0 k_0 \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{\rho_x^2 \theta_0^2 k_0^2}{4}\right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Тут

$$\psi = \frac{q_x}{\theta_0 k_0} + \frac{i \rho_x \theta_0 k_0}{2}.$$

З (4.9) та (4.10) можна записати кінцевий вираз для $B_\mu(\vec{\rho})$:

$$\begin{aligned} B_\mu(\vec{\rho}) &\square \pi \sqrt{\pi} (\theta_0 k_0)^3 \exp\left(-\frac{\theta_0^2 k_0^2}{4} (\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2)\right) = \\ &= \pi \sqrt{\pi} (\theta_0 k_0)^3 \exp\left(-\frac{\theta_0^2 k_0^2}{4} \rho^2\right). \end{aligned}$$

Отже коефіцієнт кореляції показника заломлення має вигляд

$$K_\mu(\vec{\rho}) = \frac{B_\mu(\rho)}{B_\mu(0)} = \exp\left(-\frac{\theta_0^2 k_0^2}{4} \rho^2\right) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{l^2}\right),$$

де $l = 2 / \theta_0 k_0$.

4.3. Коефіцієнт кореляції флуктуацій показника заломлення має гаусову форму

$$K_\mu(\vec{\rho}) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{l^2}\right), \quad (4.11)$$

де $\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}$ – тривимірний різницевий вектор. Розрахувати дисперсію флуктуацій фази σ_S^2 і показати, що на малих трасах $\sigma_S^2 \sim z^2$, а на великих – $\sigma_S^2 \sim z$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (4.4) для дисперсії флукутацій фази, у якій $K_\mu(\zeta) = K_\mu(\rho_x = 0, \rho_y = 0, \rho_z = \zeta) = K_\mu(0, 0, \zeta)$ – коефіцієнт кореляції (нормована кореляційна функція), що розглядається у суміщених точках ($x' = x'', y' = y''$) у поперечному до променя напрямку і в рознесених ($\zeta = \rho_z = z' - z''$) – у поздовжньому (вздовж променя). Згідно з визначенням (4.11) маємо

$$K_\mu(\zeta) = \exp\left(-\frac{\zeta^2}{l^2}\right).$$

Тоді формула (4.4) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \sigma_s^2(z) &= \frac{k_0^2 z \sigma_\mu^2}{2} \int_0^z \left(1 - \frac{\zeta}{z}\right) \exp\left(-\frac{\zeta^2}{l^2}\right) d\zeta = \\ &= \frac{k_0^2 z \sigma_\mu^2}{2} \left[\int_0^z \exp\left(-\frac{\zeta^2}{l^2}\right) d\zeta - \int_0^z \frac{\zeta}{z} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{l^2}\right) d\zeta \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Перший інтеграл у (4.12) після заміни змінних $\zeta/l = x/\sqrt{2}$ приводиться до стандартного вигляду інтеграла ймовірностей (див. додаток):

$$\int_0^z \exp\left(-\frac{\zeta^2}{l^2}\right) d\zeta = \frac{l}{\sqrt{2}} \int_0^{z\sqrt{2}/l} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{l\sqrt{\pi}}{2} \Phi(z\sqrt{2}/l). \quad (4.13)$$

Другий інтеграл легко обчислюється:

$$\frac{1}{z} \int_0^z \zeta \exp\left(-\frac{\zeta^2}{l^2}\right) d\zeta = \frac{l^2}{z} \int_0^{z/l} x e^{-x^2} dx = \frac{l^2}{2z} \int_0^{z^2/l^2} e^{-t} dt = \frac{l^2}{2z} \left[1 - \exp\left(-\frac{z^2}{l^2}\right)\right]. \quad (4.14)$$

Отже,

$$\sigma_s^2(z) = \frac{k_0^2 \sigma_\mu^2 z}{2} l \left\{ \frac{\sqrt{\pi} \Phi(z\sqrt{2}/l)}{2} - \frac{l}{2z} \left[1 - \exp\left(-\frac{z^2}{l^2}\right)\right] \right\}. \quad (4.15)$$

Проаналізуємо цей вираз для двох граничних випадків.

I. Короткі траси ($z/l \ll 1$).

Згідно з (4.13) для малих значень аргументу інтеграл ймовірностей

можна наближено записати як

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \Phi(z\sqrt{2}/l) \approx \int_0^{z\sqrt{2}/l} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{z\sqrt{2}}{l} - \frac{1}{6} \left(\frac{z\sqrt{2}}{l}\right)^3 \approx \frac{z\sqrt{2}}{l}.$$

Другий доданок (4.14) також можна спростити і привести до вигляду

$$\frac{l}{2z} \left[1 - \exp\left(-\frac{z^2}{l^2}\right) \right] \approx \frac{l}{2z} (1 - 1 + z^2/l^2) = z/2l.$$

В результаті для коротких трас отримаємо таке значення дисперсії:

$$\sigma_s^2(z) \approx \frac{k_0^2 z \sigma_\mu^2}{2} \left(z - \frac{z}{2}\right) = \frac{k_0^2 \sigma_\mu^2}{4} z^2,$$

тобто $\sigma_s^2 \sim z^2$.

II. Довгі траси ($z \gg l$).

При $z \gg l$ інтеграл ймовірностей $\Phi(z\sqrt{2}/l)$ в (4.15) можна замінити його граничним значенням, коли $z/l \rightarrow \infty$. Як відомо,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 1$ (див. табл. 1 додатка). З іншого боку, в (4.15) можна

знехтувати експонентою ($\exp(-z^2/l^2) \approx 0$). У результаті вираз (4.15) для дисперсії флуктуацій фази набуває вигляду

$$\sigma_s^2(z) \approx \frac{k_0^2 \sigma_\mu^2 l}{2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{l}{2z}\right) z \approx \frac{\sqrt{\pi} k_0^2 \sigma_\mu^2 l}{4} z.$$

4.3. Задачі для самостійного розв'язання

4.4. Хвиля поширюється в ізотропному випадково неоднорідному середовищі з гаусовою функцією кореляції $B_\mu(\bar{\rho}) = \sigma_\mu^2 \exp(-\rho^2/l^2)$. Визначити у борнівському наближенні індикатрису розсіювання та повну потужність, розсіяну об'ємом V в усіх напрямках.

Відповідь: $F(\theta) = \exp\left(-l^2 k_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right);$

$$\bar{I}_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{4} k_0^2 V l \sigma_\mu^2 [1 - \exp(-k_0^2 l^2)].$$

4.5. Дослідити залежність розсіяної потужності від кута розсіювання (індикатрису розсіювання) для анізотропних флуктуацій показника заломлення з гаусовою функцією кореляції

$$B_{\mu}(\vec{\rho}) = \sigma_{\mu}^2 \exp\left(-\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2}\right),$$

де ξ, η, ζ – проекції вектора $\vec{\rho}$ вздовж осей x, y, z .

Хвильовий вектор падаючого випромінювання \vec{k}_0 спрямований вздовж осі z . Кути між вектором розсіяного випромінювання \vec{k} і осями x, y, z дорівнюють α, β, θ (рис. 4.6).

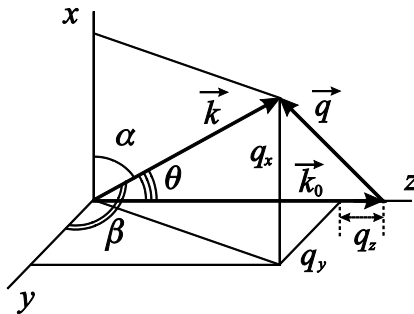


Рис. 4.6

Відповідь:

$$F(\alpha, \beta, \theta) = \exp\left[-\frac{k_0^2}{4}\left(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + 4c^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)\right].$$

4.6. Використовуючи результати задачі 4.4, сформулювати умову застосовності борнівського наближення (виходячи з вимоги $\bar{I}_1 / I_0 \ll 1$) для великих ($l \gg \lambda$) та малих ($l \ll \lambda$) неоднорідностей.

Відповідь:

$$\text{а) } l \gg \lambda, \quad \sigma_{\mu}^2 \frac{L}{\lambda} \frac{l}{\lambda} \ll 1;$$

$$\text{б) } l \ll \lambda, \quad \sigma_\mu^2 \frac{L}{\lambda} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^3 \ll 1,$$

де L – лінійний розмір розсіюючого об'єму ($V \propto L^3$).

4.7. Провести аналіз, наведений в задачі 4.3, для кореляційної функції у вигляді

$$K_\mu(\vec{\rho}) = 1, \quad |\vec{\rho}| \leq l;$$

$$K_\mu(\vec{\rho}) = 0, \quad |\vec{\rho}| > l.$$

Відповідь:

$$\text{а) } |\vec{\rho}| \leq l, \quad \sigma_s^2 = \frac{k_0^2 z^2 \sigma_\mu^2}{4};$$

$$\text{б) } |\vec{\rho}| > l, \quad \sigma_s^2 = \frac{k_0^2 l \sigma_\mu^2}{2} \left(z - \frac{l}{z} \right).$$

4.8. Внаслідок проходження плоскої хвилі через неоднорідне середовище виникло розсіяне випромінювання, інтенсивність якого з ростом кута розсіювання θ спадає за законом

$$F(\theta) = \left[1 + \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \right]^{-2}.$$

Вважаючи кут θ_0 малим ($\theta_0 \ll 1$), визначити коефіцієнт кореляції флуктуацій показника заломлення $K_\mu(\vec{\rho})$.

Відповідь:

$$K_\mu(\vec{\rho}) = \exp(-|\vec{\rho}| k_0 \theta_0).$$

4.9. Розв'язати задачу 4.8 для випадку $F(\theta) = \exp\left(-\frac{\theta}{\theta_0}\right)$.

Відповідь:

$$K_\mu(\vec{\rho}) = \frac{1}{1 + k_0^2 \theta_0^2 \rho^2}.$$

4.10. Розрахувати у борнівському наближенні індикатрису розсіювання хвиль у неоднорідному статистично ізотропному

середовищі з коефіцієнтом кореляції флуктуацій показника заломлення у вигляді

$$K_{\mu}(\vec{\rho}) = \exp\left(-\frac{|\vec{\rho}|}{l}\right).$$

Відповідь:

$$F(\theta) = \frac{1}{(1 + k_0^2 l^2 \theta^2)^2}.$$

4.11. Розв'язати задачу 4.10 для випадку

$$K_{\mu}(\vec{\rho}) = \frac{l^2}{l^2 + \rho^2}.$$

Відповідь:

$$F(\theta) = \exp(-k_0 \theta l).$$

4.12. Визначити залежність від довжини траси z дисперсії флуктуації фази $\sigma_s^2(z)$ плоскої хвилі, яка поширюється в неоднорідному статистично ізотропному середовищі з коефіцієнтом кореляції флуктуацій μ у вигляді

$$K_{\mu}(\vec{\rho}) = \frac{l^2}{l^2 + \rho^2}.$$

Дослідити граничні випадки при

а) $z \ll l$; б) $z \gg l$.

Відповідь:

$$\sigma_s^2(z) = \frac{k_0^2 \sigma_{\mu}^2 l z}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{z}{l} - \frac{l}{2z} \ln\left(1 + \frac{z^2}{l^2}\right) \right].$$

$$\text{а) } \sigma_s^2 \approx \frac{k_0^2 \sigma_{\mu}^2}{4} z^2;$$

$$\text{б) } \sigma_s^2 \approx \frac{\pi k_0^2 \sigma_{\mu}^2 l}{4} z.$$

4.13. Просторовий енергетичний спектр флуктуацій μ має вигляд:

$$S_{\mu}(\bar{q}) = \frac{S_{\mu}(0)}{|\bar{q}|} \exp(-|\bar{q}|l).$$

Визначити залежність від довжини траси z дисперсії флукутацій фази плоскої хвилі $\sigma_s^2(z)$, яка поширюється у такому середовищі.

Розглянути граничні випадки

$$\text{а) } z \ll l; \quad \text{б) } z \gg l.$$

Відповідь:

$$\sigma_s^2(z) = \frac{k_0^2 \sigma_{\mu}^2 l z}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{z}{l} - \frac{l}{2z} \ln \left(1 + \frac{z^2}{l^2} \right) \right].$$

$$\text{а) } \sigma_s^2 \approx \frac{k_0^2 \sigma_{\mu}^2}{4} z^2;$$

$$\text{б) } \sigma_s^2 \approx \frac{\pi k_0^2 \sigma_{\mu}^2 l}{4} z.$$

4.14. Визначити в наближенні геометричної оптики дисперсію флукутації фази лазерного випромінювання (прийняти $\lambda = 10^{-6} \text{ м}$) для випадку, коли кореляційна функція характеризується масштабом кореляції $l = 10^3 \text{ м}$, $\overline{\mu^2} = 10^{-10}$ та довжини траси $z = 10^2 \text{ м}$.

Відповідь:

$$\sigma_s^2 \approx 10^7 \text{ рад}^2.$$

4.15. Розв'язати задачу 4.14 для радіохвиль дециметрового діапазону (прийняти $\lambda = 30 \text{ см}$) при $l = 10^3 \text{ м}$, $\overline{\mu^2} = 10^{-10}$, $z = 10^4 \text{ м}$.

Відповідь:

$$\sigma_s^2 \approx 0.2 \text{ рад}^2.$$

Розділ 5. МЕТОД ФАЗОВОГО ЕКРАНА

5.1. Основні поняття та співвідношення

Поле в точці \vec{R}_p за фазовим екраном (див. рис. 5.1)

$$U(\vec{R}_p) = \frac{k_0}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} U(\vec{r}) \frac{\exp\left(ik_0|\vec{r} - \vec{R}_p|\right)}{|\vec{r} - \vec{R}_p|} \cos\theta(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (5.1)$$

де Σ_0 – поверхня фазового екрана, $\theta(\vec{r})$ – кут між оссю z і напрямом на точку спостереження P . Поле на вході фазового екрана: $U_0(\vec{r}) = A_0(\vec{r}) \exp[ik_0\varphi_0(\vec{r})]$, $A_0(\vec{r})$ і $k_0\varphi_0(\vec{r})$ – амплітуда і фаза падаючої хвилі відповідно. Поле на поверхні фазового екрана: $U(\vec{r}) = A_0(\vec{r}) \exp[ik_0\varphi(\vec{r})]$, де $k_0\varphi(\vec{r}) = \bar{S} + \delta S$, $\bar{S} = k_0\varphi(\vec{r})$ і $\delta S = k_0\delta\varphi(\vec{r})$ – відповідно середня фаза і флуктуації фази, отримані хвилею після проходження через фазовий екран, \vec{k}_0 , \vec{k} – хвильові вектори падаючої та розсіяної хвиль відповідно, $|\vec{k}| = |\vec{k}_0|$.

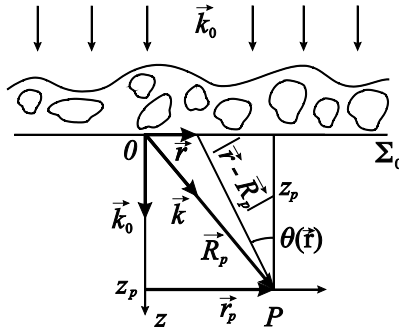


Рис. 5.1

Середнє поле в точці \vec{R}_p за фазовим екраном

$$\begin{aligned} \langle U(\vec{R}_p) \rangle &= \frac{k_0}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} \frac{A_0(\vec{r}) d\vec{r}}{|\vec{r} - \vec{R}_p|} \cos\theta(\vec{r}) \times \\ &\times \exp\left[i\left(k_0|\vec{r} - \vec{R}_p| + \bar{S}\right)\right] \langle \exp(i\delta S) \rangle. \quad (5.2) \end{aligned}$$

Середнє поле після проходження крізь фазовий екран при гаусовій функції розподілу випадкової фази

$$\langle U(\vec{R}_p) \rangle = e^{-\sigma_s^2/2} U_d(\vec{R}_p), \quad (5.3)$$

де $\sigma_s^2 = \langle (\delta S)^2 \rangle = const$ – дисперсія флуктуацій фази на екрані, $U_d(\vec{R}_p) = U(\vec{R}_p)|_{\delta S=0}$ – поле $U(\vec{R}_p)$ (5.1), яке було б у точці спостереження \vec{R}_p , якби на екрані не було випадкових флуктуацій фази ($\delta S \equiv 0$).

У малокутовому наближенні ($\cos \theta(\vec{r}) \approx 1$) і у випадку сильних флуктуацій фази на екрані ($\sigma_s^2 \gg 1$) середня інтенсивність поля на відстані z_p від фазового екрану (див. рис. 5.1)

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle = \frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int I_0(\vec{r}) \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} [\vec{r}_p - \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle]^2 \right\} d\vec{r}, \quad (5.4)$$

де $I_0(\vec{r}) = A_0^2(\vec{r})$, $\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{\sigma_s^2}{k_0^2 l_s^2}$ – дисперсія кутів розсіювання, l_s^2 – радіус кореляції флуктуацій фази,

$$\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r} + z_p \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle, \quad \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle = \nabla_r \overline{\varphi(\vec{r})}. \quad (5.5)$$

У випадку статистично однорідних флуктуацій фази ($\langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle = 0$) формула (5.4) набуває вигляду

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle = \frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int I_0(\vec{r}) \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} [\vec{r}_p - \vec{r}]^2 \right\} d\vec{r}. \quad (5.6)$$

Подання середньої інтенсивності поля у вигляді суми когерентної і некогерентної складових:

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle = \left| \langle U(\vec{R}_p) \rangle \right|^2 + \overline{|\delta U|^2} = I_{\text{коз}}(\vec{R}_p) + I_{\text{некоз}}(\vec{R}_p), \quad (5.7)$$

$$I_{\text{коз}}(\vec{R}_p) = \left| \langle U(\vec{R}_p) \rangle \right|^2 = \exp(-\sigma_s^2) \left| U_d(\vec{R}_p) \right|^2, \quad (5.8)$$

$$I_{\text{некоз}}(\vec{R}_p) \Big|_{\sigma_s^2 \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (5.9)$$

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle \Big|_{\sigma_s^2 \rightarrow \infty} \rightarrow I_{\text{некоз}}(\vec{R}_p). \quad (5.10)$$

Середня діаграма поля в дальній зоні (зоні Фраунгофера) для параболічної антени для малих кутів θ_p при флукутаціях фази в апертурі σ_s^2 , розподілених за нормальним законом, визначається співвідношенням (5.3), де

$$U_d(\vec{R}_p) \approx U_0 \frac{k_0 a^2}{2iz_p} \cdot \left[\frac{2J_1(t)}{t} \right] \exp \left[ik_0 z_p \left(1 + \frac{\theta_p^2}{2} \right) \right]. \quad (5.11)$$

Тут U_0 – поле у площині апертури ідеальної антени, a – радіус апертури антени, $J_1(t)$ – функція Бесселя першого роду першого порядку, $\theta_p \approx \frac{r_p}{z_p}$, $t = k_0 a \theta_p$.

Когерентна складова інтенсивності

$$I_{\text{ког}}(\vec{R}_p) = \left| \langle U(\vec{R}_p) \rangle \right|^2 \approx \left(A_0 \frac{k_0 a^2}{2z_p} \right)^2 \cdot \left[\frac{2J_1(t)}{t} \right]^2 e^{-\sigma_s^2}, \quad (5.12)$$

де A_0 – амплітуда поля U_0 .

Некогерентна складова інтенсивності

$$\begin{aligned} I_{\text{неког}}(\vec{R}_p) &\approx \langle I(\vec{R}_p) \rangle = \frac{A_0^2 a^2}{z_p^2} \cdot \frac{k_0^2 l_s^2}{2\sigma_s^2} \exp \left\{ -\frac{k_0^2 l_s^2}{2\sigma_s^2} \theta_p^2 \right\} = \\ &= \frac{A_0^2 a^2}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} \exp \left\{ -\frac{\theta_p^2}{\sigma_\gamma^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

5.2. Приклади

5.1. На необмежений фазовий екран ($z = 0$) ортогонально падає плоска хвиля $U_0(\vec{R}, t) = A_0 e^{i(\vec{k}_0 \vec{R} - \omega t)}$, де $\vec{k}_0 = k_0 \vec{e}_z$, $k_0 = \omega/c$ (див. рис.5.1). Скориставшись принципом Гюйгенса, розрахувати середнє поле і середню інтенсивність за екраном для повністю когерентного поля ($\sigma_s^2 = 0$).

Розв'язання. Згідно з визначенням, фаза вихідної хвилі у площині фазового екрана ($z = 0$) дорівнює нулю ($S_0 = 0$). Крім

цього, випадкові флукутації фази у «нескінченно тонкому» екрані відсутні ($\delta S = 0$). Отже, поле на виході екрана ($z = 0$) має вигляд:

$$U|_{z=0} \equiv U_0(\vec{r}, t) \equiv U_0(x, y, t) = A_0 e^{-i\omega t}. \quad (5.14)$$

Оскільки напрямок поширення вихідної плоскої хвилі збігається з напрямком осі OZ ($\vec{k}_0 = k_0 \vec{e}_z$), розв'язання задачі можна проводити у малокутовому наближенні. У цьому випадку у формулі (5.1), що виражає принцип Гюйгенса, можна покласти $\cos \theta(\vec{r}) = 1$. У результаті з урахуванням (5.14) у довільній точці спостереження за екраном поле визначається так:

$$U(\vec{R}_p) = \frac{k_0 A_0 e^{-i\omega t}}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} \frac{e^{ik_0 R}}{R} dx dy, \quad \text{де } R = |\vec{r} - \vec{R}_p|. \quad (5.15)$$

Через те, що у розглядуваній задачі випадкові флукутації фази відсутні, статистичне середнє поле $\langle U(\vec{R}_p) \rangle$ збігається з дифракційним значенням (5.15): $\langle U(\vec{R}_p) \rangle = U(\vec{R}_p)$. У наближенні френелівської дифракції (у малокутовому наближенні) подамо відстань $R = |\vec{r} - \vec{R}_p|$ від довільної точки екрана $\vec{R} = (0, \vec{r})$ до точки спостереження $\vec{R}_p = (z_p, x_p, y_p)$ (див. рис. 5.2) у вигляді

$$R = \left[z_p^2 + (x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 \right]^{1/2} \approx z_p + \frac{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}{2z_p}. \quad (5.16)$$

Виконавши далі у виразі (5.15) заміну змінних $x' = x - x_p$, $y' = y - y_p$, отримаємо

$$\bar{U}(\vec{R}_p) = \frac{k_0}{2\pi i z_p} A_0 e^{i(k_0 z_p - \omega t)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ ik_0 \left(\frac{x'^2}{2z_p} + \frac{y'^2}{2z_p} \right) \right\} dx' dy'.$$

У знаменнику підінтегрального виразу для $\bar{U}(\vec{R}_p)$ ми наближено поклали $R \approx z_p$.

Кожен з інтегралів в останньому виразі дорівнює $\sqrt{\frac{2\pi z_p}{ik_0}}$.

Таким чином, остаточно можна записати

$$\bar{U}(\vec{R}_p) = A_0 e^{i(k_0 z_p - \omega t)}; \quad |\bar{U}(\vec{R}_p)| = A_0.$$

Тепер нескладно визначити когерентну складову середньої інтенсивності $\bar{I}_{\text{коз}} = |\bar{U}(\vec{R}_p)|^2$. Оскільки $U(\vec{R}_p) = \bar{U}(\vec{R}_p)$, то $|U(\vec{R}_p)| = |\bar{U}(\vec{R}_p)|$ і $\bar{I}_{\text{коз}} = A_0^2 = I_0$.

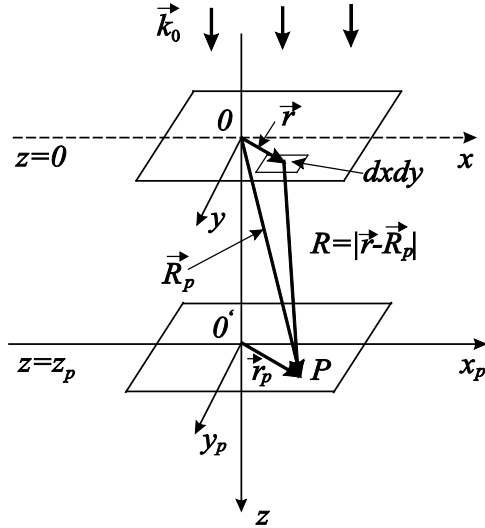


Рис. 5.2

Отримані результати цілком природні. Оскільки флукутації фази і поглинання хвилі на екрані відсутні, то при нескінченному фазовому екрані (нескінченному фронті хвилі) хвиля за екраном і далі залишається плоскою зі сталими амплітудою й інтенсивністю.

5.2. На «тонкий» шар, безмежний у поперечному напрямку і скінченної товщини у поздовжньому, зі статистично однорідними неоднорідностями показника заломлення ортогонально падає плоска хвиля. На виході з шару ($z = 0$) знаходиться непрозора кругла заслінка радіусом a . Вважаючи, що регулярна рефракція в неоднорідному шарі відсутня, визначити середню інтенсивність поля $\bar{I}(z_p)$ на осі заслінки, користуючись принципом Гюйгенса для повністю некогерентного поля ($\sigma_s^2 \gg 1$).

Розв'язання. Як вихідний, використовуємо вираз (5.4), отриманий для випадку сильних флуктуацій фази ($\sigma_s^2 \gg 1$). Розташувавши початок декартової системи координат у центр заслінки та поклавши $I_0(\vec{r}) = A_0^2$ і $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r}$, у довільній точці спостереження за екраном отримаємо (див. формулу (5.6))

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle = \frac{A_0^2}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_{\Sigma_0} \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} (\vec{r}_p - \vec{r})^2 \right\} d\vec{r}. \quad (5.17)$$

Тут Σ_0 – область інтегрування, що являє собою нескінченну площину $z = 0$, за вирахуванням круга радіусом a . Згідно з умовою задачі точка спостереження знаходиться на осі заслінки, отже ми повинні покласти $\vec{r}_p = 0$. Інтеграл у (5.17) простіше обчислювати у полярних координатах $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ і $\varphi = \arctg(x/y)$, у яких він набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{I_0}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_a^\infty \rho \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} \right\} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{I_0}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_a^\infty \exp \left\{ -\frac{t}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} \right\} dt = I_0 \exp \left\{ -\frac{a^2}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} \right\}. \end{aligned}$$

Проаналізуємо отриманий результат. Дисперсія флуктуацій кутів розсіювання σ_γ^2 пов'язана з дисперсією флуктуацій фази σ_s^2 співвідношенням $\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{\sigma_s^2}{k_0^2 l_s^2}$. Отже

$$\bar{I} = I_0 \exp \left\{ -\frac{a^2 k_0^2 l_s^2}{2 \sigma_s^2 z_p^2} \right\} = I_0 \exp \left\{ -\frac{2\pi^2 a^2 l_s^2}{\sigma_s^2 z_p^2 \lambda^2} \right\}.$$

З отриманого виразу видно, що при $\sigma_s^2 \rightarrow \infty$ $\bar{I} \rightarrow I_0$. З іншого боку, при великій, але фіксованій дисперсії флуктуацій фази на екрані ($\sigma_s^2 \gg 1$) граничне значення $\bar{I} = I_0$ буде досягнуте тим швидше, чим більша довжина хвилі λ і відстань до екрана z_p , а також чим менший радіус заслінки a і масштаб неоднорідностей фази

l_s . Фізично це означає, що хвиля з достатньо великою (порівняно з радіусом заслінки a) довжиною λ «не помічає» заслінки. При нескінченно великому радіусі заслінки ($a \rightarrow \infty$), як і слід було сподіватися, $\bar{I} \rightarrow 0$ (заслінка перекриває все падаюче випромінювання).

Випадок $\sigma_s^2 \rightarrow 0$ отриманим виразом не описується, оскільки, відповідно до умови задачі, як вихідний було взято вираз для \bar{I} , справедливий тільки для $\sigma_s^2 \gg 1$.

5.3. На довгофокусну тонку лінзу з дрібномасштабними неоднорідностями показника заломлення всередині ортогонально падає плоска хвиля $U_0(\vec{R}) = A_0 e^{ik_0 z}$ (рис. 5.3). У наближенні сильних статистично однорідних й ізотропних флуктуацій фази ($\sigma_s^2 \gg 1$), у круглому розкритті лінзи ($0 \leq r \leq a$) і заданій кореляційній функції $B_s(\rho)$ визначити розподіли середнього поля і середньої інтенсивності у фокальній площині лінзи ($z_p = F$, де F – фокусна відстань лінзи). Вважати, що відбувається випадкове розсіювання променів на малі кути.

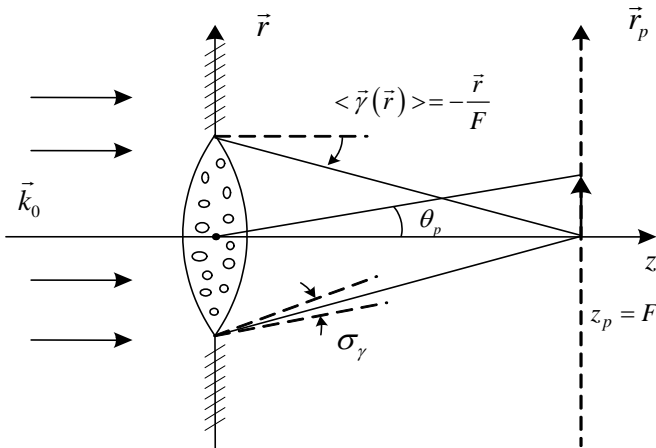


Рис. 5.3

Розв'язання. Тонку лінзу, через яку проходить плоска хвиля, можна розглядати як тонкий фазовий коректор (фазовий екран). Після проходження на виході лінзи падаюче поле набуває вигляду:

$$U(\vec{R}) = A_0 \exp\left\{i\left[\bar{S}(\vec{r}) + \delta S(\vec{r})\right]\right\},$$

де регулярний набіг фази для ідеальної лінзи дорівнює

$$\bar{S}(\vec{r}) = -k_0 \frac{r^2}{2F}. \quad (5.18)$$

Регулярний кут заломлення $\langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle$ променів на виході довгофокусної лінзи визначається згідно з формулою (5.5) як

$$\langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{k_0} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \langle \bar{S}(\vec{r}) \rangle = -\frac{\vec{r}}{F}. \quad (5.19)$$

Для довгофокусних лінз повинна виконуватися нерівність $r/F \leq a/F \ll 1$. При цьому, враховуючи, що згідно з визначенням відбувається випадкове розсіювання променів на малі кути поблизу регулярного відхилення (5.19), розв'язання задачі проведимо у рамках малокуткового наближення.

Середнє поле у довільній точці спостереження, розташованій за фазовим екраном (лінзою), задається виразом (5.3), де $U_d(\vec{R}_p)$ – дифракційне значення поля, що визначається формулою (5.2) за відсутності випадкових флуктуацій фази ($\delta S = k_0 \delta \varphi \equiv 0$). Скориставшись визначенням середньої фази (5.18) і спрощенням (5.16) у попередній задачі, для фокальної площини лінзи ($z_p = F$) дифракційне поле $U_d(\vec{R}_p)$ ми визначаємо так:

$$U_d(F, \vec{r}_p) \approx \frac{k_0 A_0}{2\pi i F} \exp\left\{ik_0\left(F + \frac{r_p^2}{2F}\right)\right\} \times \\ \times \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \exp\left\{ik_0 \frac{r r_p}{F} \cos(\varphi - \varphi_p)\right\} d\varphi.$$

Ми записали інтеграл за поверхнею фазового екрана Σ_0 у полярних координатах $\vec{r} = (r, \varphi)$ і $\vec{r}_p = (r_p, \varphi_p)$. Інтегрування за кутом приводить до такого виразу:

$$U_d(F, r_p) \approx \frac{k_0 A_0}{iF} \exp \left\{ ik_0 \left(F + \frac{r_p^2}{2F} \right) \right\} \int_0^a r J_0 \left(k_0 \frac{r_p}{F} r \right) dr. \quad (5.20)$$

При обчисленні залишкового інтеграла за dr введемо нову змінну $x = k_0 r \theta_p$ і позначення $t = k_0 a \theta_p$, де $\theta_p = r_p / F$ – кутове зміщення спостерігача відносно центра лінзи (див. рис. 5.3). У результаті (5.20) набуває вигляду:

$$U_d(F, r_p) \approx \frac{k_0 a^2 A_0}{iF t^2} \exp \left\{ ik_0 F \left(1 + \frac{\theta_p^2}{2} \right) \right\} \int_0^t x J_0(x) dx = U_F \cdot \left[\frac{2J_1(t)}{t} \right],$$

де $U_F = \frac{k_0 a^2 A_0}{2iF} \exp \left\{ ik_0 F \left(1 + \frac{\theta_p^2}{2} \right) \right\}$. При обчисленні ми

скористалися табличним значенням невизначеного інтеграла

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x),$$

де $J_1(x)$ – функція Бесселя першого роду першого порядку.

Таким чином, для середнього поля у фокальній площині отримуємо вираз:

$$\langle U(F, r_p) \rangle \approx U_F \left[\frac{2J_1(t)}{t} \right] e^{-\sigma_s^2/2}.$$

Для відповіді на друге питання скористаємося виразом для середньої інтенсивності (5.4), який для нашої задачі набуває вигляду:

$$\langle I(F, \vec{r}_p) \rangle = \frac{A_0^2}{\pi F^2 \sigma_\gamma^2} \int \exp \left\{ -\frac{1}{F^2 \sigma_\gamma^2} \left[\vec{r}_p - \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle \right]^2 \right\} d\vec{r}. \quad (5.21)$$

Згідно з формулою (5.5) визначимо $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r} + z_p \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle$.

Враховуючи (5.19), для відстані $z_p = F$ отримаємо

$\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r} - F \frac{\vec{r}}{F} = 0$. У результаті обчислення з (5.21) маємо:

$$\langle I(F, r_p) \rangle = I_{\max} \exp \left\{ -\frac{\theta_p^2}{\sigma_\gamma^2} \right\}, \quad \text{де} \quad I_{\max} = \frac{a^2 A_0^2}{F^2 \sigma_\gamma^2}.$$

Для остаточної відповіді нам необхідно виразити дисперсію кутів розсіювання випромінювання σ_γ^2 через задану кореляційну функцію фази $B_S(\rho)$. Скориставшись зв'язком між дисперсіями σ_γ^2 і σ_S^2 ($\sigma_\gamma^2 = 2\sigma_S^2/k_0^2 l_S^2$), а також визначенням характерного розміру l_S неоднорідностей фази ($l_S^{-2} = -B_S''(0)/\sigma_S^2$), отримаємо

$$\sigma_\gamma^2 = \frac{2}{k_0^2} |B_S''(0)|.$$

5.4. Плоска хвиля $U_0(\vec{R}) = A_0 e^{ik_0 \vec{R}}$, де $\vec{k}_0 = k_0 \vec{e}_z$, $k_0 = \omega/c$ падає ортогонально на неоднорідний шар скінченної товщини у поздовжньому напрямку. Показник заломлення середовища в середині шару $n = const$. Товщина шару h змінюється випадковим чином від точки до точки ($h = h(x, y)$). Випадкове поле товщин $h = h(x, y)$ статистично однорідне й ізотропне: $\langle h \rangle = h_0$, $\sigma_h^2 = const$, $B_h(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = B_h(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. Виразити середнє значення поля й інтенсивності плоскої хвилі після проходження шару як функції h, n, B_h , розглядаючи шар як фазовий екран.

Розв'язання. Вважатимемо, що поза шаром хвиля поширюється у вакуумі ($n=1$). Зобразимо заданий шар у системі координат x, y, z (див. рис. 5.4) і визначимо середнє значення фази $\bar{S}(\vec{r})$ і дисперсію флуктуацій σ_S^2 на виході з шару. У малокутовому наближенні додаткова фазова модуляція, що виникає внаслідок відмінності n від 1 і різної товщини шару, дорівнює

$$S(x, y) = k_0 h(x, y)(n - 1) .$$

Оскільки $n = const$ і $\bar{h} = const$, середній набіг фази $S(\vec{r})$ на екрані також є сталою величиною:

$$\bar{S} = k_0 (n - 1) \bar{h} = const .$$

Флуктуації фази $\delta S(x, y)$ на екрані, зумовлені випадковим полем товщин $h(\vec{r})$, тепер можна записати у вигляді

$$\delta S(x, y) = S - \bar{S} = k_0(n-1)\delta h(x, y).$$

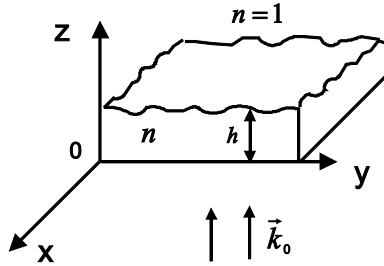


Рис. 5.4

Звідси знаходимо зв'язок між кореляційними функціями фази $B_S(\rho)$ і товщин $B_h(\rho)$:

$$B_S(\rho) = k_0^2(n-1)^2 B_h(\rho). \quad (5.22)$$

Поклавши $\rho = 0$, знаходимо також зв'язок між дисперсіями флуктуацій фази на екрані σ_S^2 і товщини шару σ_h^2 :

$$\sigma_S^2 = k_0^2(n-1)^2 \sigma_h^2. \quad (5.23)$$

Враховуючи, що згідно з умовою задачі $\sigma_h^2 = const$, доходимо висновку, що й $\sigma_S^2 = const$.

Для обчислення середнього поля скористаємося формулою (5.3):

$$\langle U(\vec{R}_p) \rangle = e^{-\sigma_S^2/2} U_d(\vec{R}_p), \quad (5.24)$$

де $U_d(\vec{R}_p)$ – дифракційне значення поля в точці спостереження, яке згідно з (5.1) дорівнює

$$U_d(\vec{R}_p) = \frac{k_0 A_0}{2\pi i} e^{i\bar{S}(\vec{r})} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} \cos\theta(\vec{r}) \frac{e^{ik_0|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|}.$$

Знайдений вираз є остаточною відповіддю на перше питання задачі. Для конкретизації $U_d(\vec{R}_p)$ необхідно задати область інтегрування Σ_0 . Наприклад, якщо Σ_0 – це нескінченна площина, то, як було показано в задачі 5.1, у процесі інтегрування ми отримуємо результат:

$$U_d(\vec{R}_p) = \frac{k_0 A_0}{2\pi i} e^{i\bar{S}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \theta(\vec{r}) \frac{e^{ik_0|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} d\vec{r} = A_0 e^{i(\bar{S}+k_0 z_p)}.$$

Тепер, враховуючи знайдені значення середньої фази \bar{S} та її дисперсії σ_S^2 , середнє поле (5.24) у довільній точці за екраном визначається так:

$$\bar{U}(P) = U_0 \exp \left\{ ik_0 [z_p + (n-1)\bar{h}] - \frac{k_0^2 (n-1)^2 \sigma_h^2}{2} \right\}.$$

Перед тим, як переходити до другого питання задачі, розглянемо деякі співвідношення між статистичними характеристиками фази хвилі й товщин неоднорідного шару. Згідно з (5.22) обчислимо другу похідну від $B_S(\rho)$ в точці $\rho = 0$:

$$B_S''(0) = k_0^2 (n-1)^2 B_h''(0). \quad (5.25)$$

За другими похідними $B_S''(0)$ і $B_h''(0)$ введемо до розгляду характерні розміри флуктуацій фази l_S і товщин l_h :

$$\frac{1}{l_S^2} = -\frac{B_S''(0)}{\sigma_S^2}; \quad \frac{1}{l_h^2} = -\frac{B_h''(0)}{\sigma_h^2}. \quad (5.26)$$

При цьому формулу (5.25) можна переписати у такому вигляді:

$$\frac{\sigma_S^2}{l_S^2} = k_0^2 (n-1)^2 \frac{\sigma_h^2}{l_h^2}. \quad (5.27)$$

З останньої рівності з урахуванням співвідношення для дисперсій (5.23) випливає, що $l_S \equiv l_h$, тобто характерні масштаби флуктуацій товщини шару і фази на виході з екрана збігаються.

Перейдемо тепер до визначення середньої інтенсивності поля, яка задається виразом

$$\bar{I}(\bar{R}_p) = \frac{I_0}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_{\Sigma_0} \exp \left\{ -\frac{(\bar{r} - \bar{r}_p)^2}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} \right\} d\bar{r}. \quad (5.28)$$

Щоб визначити $\bar{I}(\bar{R}_p)$ за цією формулою, у цій задачі необхідно знати дисперсію кутів розкиду променів σ_γ^2 на виході з шару (екрана). Ця дисперсія може бути виражена через дисперсію флуктуацій фази (див. формулу (5.4)):

$$\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{\sigma_s^2}{k_0^2 l_s^2}.$$

Отже для того щоб знайти σ_γ^2 , потрібно знати дисперсію σ_s^2 і радіус кореляції l_s випадкової фази. Враховуючи співвідношення (5.27), отримаємо

$$\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{(n-1)^2 \sigma_h^2}{l_h^2}.$$

З іншого боку, скориставшись визначенням l_h (5.26), перепишемо цей вираз у вигляді

$$\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{(n-1)^2 \sigma_h^2}{l_h^2} = 2(n-1)^2 |B_h''(0)|.$$

Таким чином, шукана середня інтенсивність (5.28) визначається як

$$\bar{I}(\bar{R}_p) = \frac{I_0}{2\pi z_p^2 (n-1)^2 |B_h''(0)|} \int_{\Sigma_0} \exp \left\{ -\frac{(\bar{r}_p - \bar{r})^2}{2z_p^2 (n-1)^2 |B_h''(0)|} \right\} d\bar{r}. \quad (5.29)$$

Цей вираз є остаточною відповіддю на друге питання задачі, оскільки інтегрування у (5.29) можна виконати тільки при заданій формі екрана Σ_0 .

5.5. У скільки разів тропосферою Землі ослаблюється середнє поле сигналу, що передається із Землі на Місяць? Вважати, що товщина тропосфери $h(\bar{r})$ розподілена за нормальним законом із середнім значенням $\bar{h} = 10 \text{ км}$ і середньоквадратичним відхиленням

$\sigma_h = 10^{-2} \bar{h}$, а коефіцієнт заломлення тропосфери n дорівнює 1,0001. Розрахунки провести для $\lambda = 10 \text{ см}$.

Розв'язання. Товщина тропосфери набагато менша за відстань між Землею і Місяцем. Тому тропосферу можна розглядати як фазовий екран і скористатися співвідношенням (5.3) для середнього поля

$$\bar{U}(\bar{R}_p) = e^{-\sigma_s^2/2} U_d(\bar{R}_p),$$

де σ_s^2 – дисперсія флуктуацій фази хвилі на виході з тропосфери, а $U_d(\bar{R}_p)$ – поле у точці спостереження за відсутності випадкових збурень.

Отже, ослаблення середнього поля

$$N = \frac{U_d(\bar{R}_p)}{\bar{U}(\bar{R}_p)} = e^{\sigma_s^2/2}.$$

Згідно з формулою (5.23) попередньої задачі маємо:

$$\sigma_s^2 = k_0^2 (n-1)^2 \sigma_h^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} (n-1)^2 \sigma_h^2.$$

Згідно з умовою задачі $\sigma_h = 10^{-2}$, $\bar{h} = 100 \text{ м}$, отже, $\sigma_h^2 = 10^4 \text{ м}^2$. Крім того, $n-1 = 10^{-4}$. Враховуючи ці оцінки, маємо $\sigma_s^2/2 \approx 0,2$ і, відповідно, отримуємо таке значення ослаблення: $N \approx 1,2$.

5.6. Параболічна антена працює на хвилі з $\lambda = 10 \text{ см}$. Яка похибка у виготовленні параболоїда може бути прийнятною, якщо допускається зменшення поля в e разів. Вважати, що випадкові відхилення форми рефлектора від параболоїда розподілені за нормальним законом.

Розв'язання. Оскільки флуктуації фази у площині апертури антени викликані похибками виготовлення поверхні відбивача антени δz , то, з урахуванням подвійного шляху хвилі від випромінювача до відбивача і назад до апертури, маємо:

$$\delta S = 2k_0 \delta z, \quad \sigma_s^2 = 4k_0^2 \sigma_z^2.$$

З лінійності зв'язку між δS і δz випливає, що флуктуації фази δS так само, як і флуктуації відхилень форми поверхні δz , розподілені за

нормальним законом. Для нормально розподілених флуктуацій фази у розкритті середнє поле у хвильовій зоні визначається виразом (5.3):

$$\langle U(\vec{R}_p) \rangle = e^{-\sigma_s^2/2} U_d(\vec{R}_p).$$

Звідси видно, що середнє поле $\langle U \rangle$ відрізняється від дифракційного U_d тільки множником $\exp(-\sigma_s^2/2)$. Тому ослаблення поля дорівнює

$$N = \frac{U_d(\vec{R}_p)}{\langle U(\vec{R}_p) \rangle} = \exp\left(\frac{\sigma_s^2}{2}\right).$$

Зменшення поля у e разів можливе при $\sigma_s^2 = 2$. Отже, для заданих умов задачі можна записати:

$$2k_0^2\sigma_z^2 = 1; \quad \sigma_z = \frac{1}{\sqrt{2}k_0}.$$

Враховуючи, що $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$, і підставляючи задане значення $\lambda = 10\text{ см}$, знаходимо допустиму середньоквадратичну похибку виготовлення відбивача $\sigma_z = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi} \approx 1,1\text{ см}$.

5.3. Задачі для самостійного розв'язання

5.7. Випадкові відхилення форми поверхні, що виникають при виготовленні відбивача параболічної антени, розподілені за нормальним законом із середньоквадратичним відхиленням $\sigma_z = 1\text{ мм}$. На якій довжині хвилі амплітуда середнього поля у напрямку максимуму випромінювання зменшиться у e разів?

Відповідь: $\lambda = 8,9\text{ мм}$.

5.8. Користуючись принципом Гюйгенса для повністю некогерентного поля ($\sigma_s^2 \gg 1$), розрахувати середнє поле и середню інтенсивність для необмеженого фазового екрану на відстані z від екрану.

Відповідь: $\langle U(P) \rangle \rightarrow 0$ при $\sigma_s^2 \rightarrow \infty$, $\langle I \rangle = I_0 = A_0^2$.

5.9. Фазовий екран являє собою круглий отвір діаметром $2a$, на котрий падає плоска хвиля. Користуючись принципом Гюйгенса для повністю некогерентного поля ($\sigma_s^2 \gg 1$), визначити середню інтенсивність поля вздовж осі отвору.

Відповідь: $\langle U(z) \rangle = I_0 \left(1 - \exp \left\{ -\frac{a^2}{2\sigma_s^2 z^2} \right\} \right)$.

5.10. Визначити ослаблення середнього поля параболічної антени, якщо точність виготовлення профілю відбивача антени характеризується середньоквадратичним відхиленням $\sigma_z = 1 \text{ мм}$. Випадкові відхилення δz розподілені за нормальним законом. Робоча довжина хвилі антени $\lambda = 1 \text{ см}$.

Відповідь: $N = \frac{U(P)|_{s=0}}{\langle U(P) \rangle} \approx 2.2$.

5.11. Антена закрита обтічником у вигляді плоскої пластини середньої товщини $\bar{h} = 1 \text{ см}$. Флуктуації товщини розподілені за нормальним законом зі стандартним відхиленням $\sigma_h = 0.1 \bar{h}$. Діелектрична проникність матеріалу обтічника $\varepsilon = 9$. Робоча довжина хвилі антени складає $\lambda = 1 \text{ см}$. Яке ослаблення середнього поля антени?

Відповідь: $N \approx 1.5$.

5.12. Коефіцієнт заломлення n шару середовища товщиною h змінюється випадковим чином з дисперсією σ_n^2 біля $\langle n \rangle = n_0$ (закон розподілу – нормальний). У кілька разів ослабне середнє поле після проходження хвилі через шар?

Відповідь: $N = \exp \left\{ \frac{2\pi^2 \sigma_n^2 h^2}{\lambda^2} \right\}$.

Розділ 6. РОЗСПОВАННЯ ХВИЛЬ НА СТАТИСТИЧНО НЕРІВНИЙ ПОВЕРХНІ

6.1. Розсіювання хвиль на слабкошорсткій поверхні

Індикатриса розсіювання на шорсткій поверхні

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{\langle I_1(\theta_p, \varphi_p) \rangle}{\langle I_1(\theta_0, 0) \rangle} \equiv \frac{\langle I_1(\vec{R}_p) \rangle}{\langle I_1(\theta_0, 0) \rangle} = \frac{S_\xi(\vec{q}_\perp) \cos^2 \theta_p}{S_\xi(0) \cos^2 \theta_0}, \quad (6.1)$$

де

$$\langle I_1(\vec{R}_p) \rangle \approx \frac{4I_0 k_0^4 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_p S_\xi(\vec{q}_\perp)}{R_p^2} \Sigma_0, \quad (6.2)$$

θ_p – полярний кут, що відлічується від осі OZ , φ_p – азимутальний кут, що відлічується від осі OX в площині XOY (рис. 6.1), θ_0 – кут падіння плоскої хвилі на шорстку поверхню, I_0 – інтенсивність падаючої хвилі, Σ_0 – сумарна площа розсіюючої поверхні,

$S_\xi(\vec{q}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} e^{-i\vec{q}_\perp \cdot \vec{\rho}} B_\xi(\vec{\rho})$ – просторовий енергетичний спектр

випадкових нерівностей поверхні $z = \xi(\vec{r})$, $B_\xi(\vec{\rho})$ – просторова автокореляційна функція нерівностей $B_\xi(\vec{\rho}) = \langle \xi(\vec{r}') \xi(\vec{r}'') \rangle$ при $\langle \xi(\vec{r}) \rangle = 0$, $\vec{\rho} = \{\rho_x, \rho_y\} = \vec{r}' - \vec{r}''$, $d\vec{\rho} \equiv d\rho_x d\rho_y$, $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_0$, \vec{k} , \vec{k}_0 – хвильові вектори розсіяної і падаючої хвиль відповідно ($|\vec{k}| = |\vec{k}_0|$),

$$\vec{q} = \begin{cases} q_x = k_0 (\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0); \\ q_y = k_0 \sin \theta_p \sin \varphi_p; \\ q_z = k_0 (\cos \theta_p + \cos \theta_0). \end{cases} \quad (6.3)$$

$q_\perp = (q_x, q_y)$, $\vec{R}_p = (R_p, \theta_p, \varphi_p)$ – точка спостереження, (див. рис. 6.1).

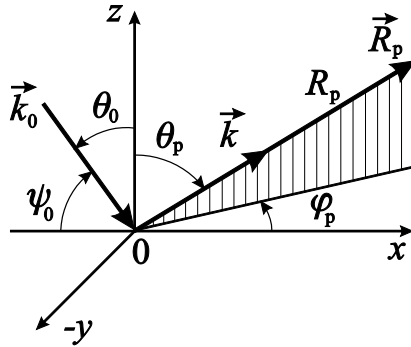


Рис. 6.1

6.2. Метод Кірхгофа для великих, але плавних нерівностей

Індикатриса розсіювання

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{\langle I_p(\theta_p, \varphi_p) \rangle}{\langle I_p(\theta_0, 0) \rangle} = \frac{q^4}{q_z^4} \cdot \frac{W_\gamma(-\bar{q}_\perp/q_z)}{W_\gamma(0)}, \quad (6.4)$$

де $W_\gamma(\vec{\gamma})$ – густина розподілу ймовірності випадкових нахилів $\vec{\gamma}$ нерівностей поверхні. У випадку нормального закону розподілу нахилів

$$W_\gamma(\vec{\gamma}) = \frac{1}{\pi \sigma_\gamma^2} \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{\sigma_\gamma^2}\right\}, \quad (6.5)$$

де σ_γ^2 – дисперсія нахилів, формула (6.4) набуває вигляду:

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{q^4}{q_z^4} \cdot \exp\left\{-\frac{q_\perp^2}{q_z^2 \sigma_\gamma^2}\right\}. \quad (6.6)$$

6.3. Приклади

6.1. Розрахувати методом малих збурень розподіл середньої інтенсивності у дальній зоні, вважаючи, що характерний розмір розсіюючої поверхні $L \sim \sqrt{\Sigma_0}$ набагато перевищує масштаб неоднорідностей l_ξ випадкової поверхні

$$z(x, y) = \xi(x, y) \sin(\alpha x + \nu). \quad (6.7)$$

Тут $\xi(x, y)$ – нормально розподілене статистично однорідне та ізотропне поле випадкових амплітуд підвищень (із нульовим середнім значенням $\bar{\xi} = 0$ і дисперсією σ_ξ^2), α – детермінована величина, обернено пропорційна періоду «ґратки» L_p (тобто $\alpha = 2\pi/L_p$), а ν – випадкова величина, рівномірно розподілена в інтервалі $[-\pi, \pi]$. Вважаючи $\xi(x, y)$ і ν статистично незалежними, побудувати схематичний графік $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$.

Розв’язання. Щоб знайти розподіл $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$, необхідно знати просторовий спектр шорсткостей $S_z(\vec{q}_\perp)$ (див. формули (6.1)), який може бути отриманий шляхом Фур’є-перетворення кореляційної функції шорсткостей $B_z(\vec{r}', \vec{r})$. Позначення, що використовуються у розв’язанні, наведені на рис. 6.2.

При обчисленні статистичних характеристик випадкової поверхні скористаємося властивістю густини розподілу ймовірності для незалежних величин:

$$W(\xi, \nu) = W(\xi)W(\nu).$$

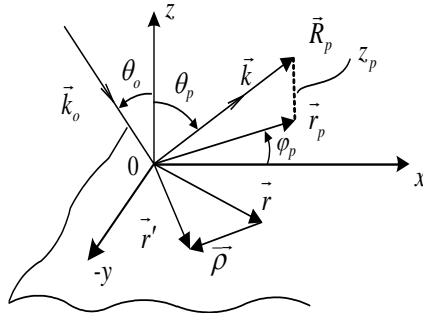


Рис. 6.2

Позначатимемо $\langle \dots \rangle_\xi$ і $\langle \dots \rangle_\nu$ відповідно усереднення за ξ і за ν . Відповідно до визначення (6.7), середнє відхилення $\langle z(x, y) \rangle$ дорівнює

$$\langle z(x, y) \rangle = \langle \xi(x, y) \rangle_{\xi} \langle \sin(\alpha x + \nu) \rangle_{\nu} = 0.$$

Побудуємо тепер автокореляційну функцію шорсткостей поверхні

$$B_z(\vec{r}', \vec{r}) = \langle z(\vec{r}') z(\vec{r}) \rangle = \langle \xi(\vec{r}') \xi(\vec{r}) \rangle_{\xi} \times \\ \times \langle \sin(\alpha x' + \nu) \sin(\alpha x + \nu) \rangle_{\nu}.$$

Згідно з умовою задачі

$$\langle \xi(\vec{r}') \xi(\vec{r}) \rangle_{\xi} = \sigma_{\xi}^2 \exp \left\{ -\frac{(\vec{r}' - \vec{r})^2}{l_{\xi}^2} \right\}.$$

Усереднення за випадковою величиною ν дає

$$\begin{aligned} \langle \sin(\alpha x' + \nu) \sin(\alpha x + \nu) \rangle_{\nu} &= \\ &= \frac{1}{2} \langle \{ \cos[\alpha(x' - x)] - \cos[\alpha(x' - x) + 2\nu] \} \rangle_{\nu} = \quad (6.8) \\ &= \frac{1}{2} \cos \alpha(x' - x) - \frac{1}{2} \langle \cos[\alpha(x' + x) + 2\nu] \rangle_{\nu}. \end{aligned}$$

Неважко показати, що другий доданок у (6.8) дорівнює нулю. Справді,

$$\begin{aligned} \langle \cos[\alpha(x' + x) + 2\nu] \rangle_{\nu} &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos[\alpha(x' + x) + 2\nu] W(\nu) d\nu = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[\alpha(x' + x) + 2\nu] d\nu \equiv 0. \end{aligned}$$

Таким чином, кореляційна функція для заданої випадкової поверхні має вигляд:

$$B_z(\vec{\rho}) = \frac{\sigma_{\xi}^2}{2} \exp \left\{ -\frac{\rho_x^2 + \rho_y^2}{l_{\xi}^2} \right\} \cos \alpha \rho_x,$$

де $\vec{\rho} = \vec{r}' - \vec{r} = (\rho_x, \rho_y)$. За допомогою формули Вінера-Хінчина знаходимо спектральну густину розсіяного випромінювання

$$S_z(\vec{q}_{\perp}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} B_z(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}_{\perp} \vec{\rho}} d\vec{\rho} =$$

$$= \frac{\sigma_\xi^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\rho_y^2}{l_\xi^2} - iq_y \rho_y \right\} d\rho_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\rho_x^2}{l_\xi^2} - iq_x \rho_x \right\} \cos \alpha \rho_x d\rho_x.$$

Представивши $\cos \alpha \rho_x = \frac{1}{2} (e^{i\alpha \rho_x} + e^{-i\alpha \rho_x})$, після інтегрування отримаємо

$$\begin{aligned} S_z(\vec{q}_\perp) &= \frac{\sigma_\xi^2}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\rho_y^2}{l_\xi^2} - iq_y \rho_y \right\} d\rho_y \times \\ &\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\rho_x^2}{l_\xi^2} - i(q_x + \alpha) \rho_x \right\} d\rho_x + \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\rho_x^2}{l_\xi^2} - i(q_x - \alpha) \rho_x \right\} d\rho_x \right] = \\ &= \frac{\sigma_\xi^2 l_\xi^2}{16\pi} \exp \left\{ -\frac{q_y^2 l_\xi^2}{4} \right\} \left[\exp \left\{ -\frac{(q_x + \alpha)^2 l_\xi^2}{4} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(q_x - \alpha)^2 l_\xi^2}{4} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Шукана інтенсивність розсіяного поля згідно з (6.2) пропорційна $S_z(\vec{q}_\perp)$:

$$\bar{I}(\theta_p, \varphi_p) \sim S_z(\vec{q}_\perp) \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_p. \quad (6.10)$$

Проаналізуємо тепер знайдену залежність $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$ від кутів спостереження. Для цього скористаємося формулою (6.3) для проекцій вектора розсіювання:

$$\begin{cases} q_x = k_0 \sin \theta_p \cos \varphi_p - k_0 \sin \theta_0 = k_0 (\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0); \\ q_y = k_0 \sin \theta_p \sin \varphi_p - k_0 \sin 0 = k_0 \sin \theta_p \sin \varphi_p. \end{cases} \quad (6.11)$$

Із (6.9) і (6.10) видно, що функція $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$ має максимуми при кутах спостереження, що задовольняють умовам $q_x = \mp \alpha$ і $q_y = 0$. Звідси, враховуючи (6.11), отримуємо:

$$\begin{cases} q_x = k_0 \sin \theta_p \cos \varphi_p - k_0 \sin \theta_0 = \mp \alpha; \\ q_y = k_0 \sin \theta_p \sin \varphi_p = 0. \end{cases} \quad (6.12)$$

Після ділення другого рівняння на перше при $k_0 \sin \theta_0 \mp \alpha \neq 0$

отримуємо співвідношення $tg\varphi_p = 0$, тобто $\varphi_p = 0, \pi$. Це означає, що максимуми інтенсивності розсіяного випромінювання лежать у площині падіння. Перше рівняння у (6.12) при цьому набуває вигляду

$$k_0 \sin \theta_p = \pm \left[k_0 \sin \theta_0 \mp \alpha \right], \quad (6.13)$$

де знак «+» перед квадратними дужками відповідає азимутальному куту $\varphi_p = 0$, а знак «-», відповідно, $\varphi_p = \pi$. Під час знаходження дійсних коренів рівняння (6.13) ми повинні враховувати, що області зміни кутів θ_p і θ_0 лежать у межах $0 \leq \theta_{p,0} \leq \pi/2$. Якщо ми припустимо, що полярний кут θ_p може набувати і від'ємних значень $-\pi/2 \leq \theta_p \leq \pi/2$, то аналізувати (6.13) можна з одним знаком «+» перед квадратними дужками, вважаючи, що від'ємним кутам θ_p відповідає азимутальний кут $\varphi_p = \pi$. Враховуючи, що $L_p = 2\pi/\alpha$ і $k_0 = 2\pi/\lambda$, остаточно отримаємо

$$\sin \theta_p = \sin \theta_0 \mp \frac{\lambda}{L_p}, \quad (6.14)$$

де $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$. Розв'язок цього рівняння

$$\theta_p = \theta_{1,2} = \arcsin \left(\sin \theta_0 \mp \frac{\lambda}{L_p} \right) \quad (6.15)$$

легко проілюструвати за допомогою рис. 6.3. Видно, що корені рівняння (6.14) визначаються як точки перетину кривої $y(\theta_p) = \sin \theta_p$

і двох прямих $y_{1,2}(\theta_p) = \sin \theta_0 \mp \frac{\lambda}{L_p}$. Для заданого кута падіння θ_0

залежно від величини відношення λ/L_p можуть спостерігатися або два дійсних корені, або один, або взагалі жодного.

Відсутність дійсних коренів (це можливо при $\lambda/L_p > 1$) свідчить про те, що вони стають уявними. У цьому випадку $|\bar{k}| \neq |\bar{k}_0|$. Відповідна цим умовам розсіяна хвиля буде неоднорідною (не поширюваною від поверхні: уявність величини k_z для неї означає експоненційне згасання інтенсивності у напрямку від поверхні). У

другому граничному випадку, коли $\lambda/L_p \ll 1$, розсіяна хвиля поширюється у «майже дзеркальних» напрямках ($\theta_p = \theta_{1,2} \approx \theta_0$).

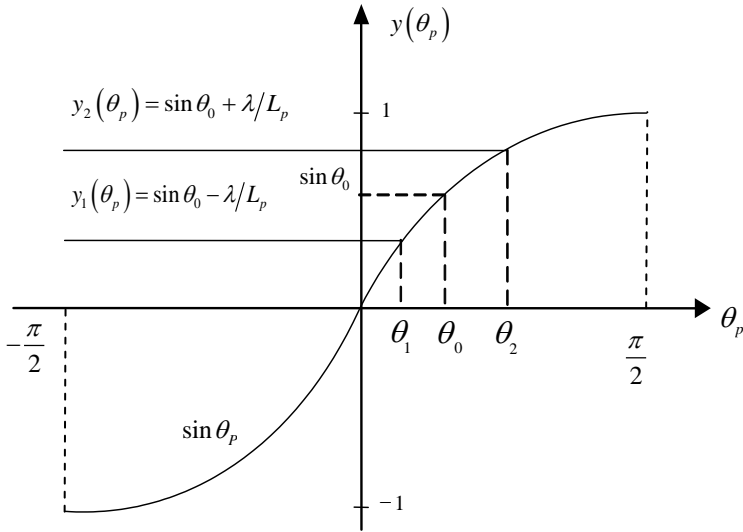


Рис. 6.3

Кути, під якими розсіюються хвилі у випадку, що розглядається, визначимо, поклавши у (6.14) $\theta_p = \theta_{1,2} \approx \theta_0 + \Delta\theta_p$, де $\Delta\theta_p \ll \theta_0$. При цьому у лінійному за малим параметром $\lambda/L_p \ll 1$ наближенні розв'язок (6.15) має вигляд:

$$\theta_{1,2} \approx \theta_0 \mp \frac{\lambda}{L_p \cos \theta_0}. \quad (6.16)$$

Таким чином, напрямки максимальної інтенсивності у площині падіння збігаються з напрямками $\varphi_p = 0, \pi$; $\theta_p = \theta_{1,2}$. Схематично індикатрису розсіювання зображено на рис. 6.4.

Згідно з (6.9) ширина пелюсток $\Delta\theta_p$ на рівні $1/e$ оцінюється з таких співвідношень:

$$(q_x \pm \alpha)^2 l_\xi^2 = 4; \quad q_y^2 l_\xi^2 = 4.$$

$$\Delta\theta_p \approx \frac{2}{k_0 l_\xi \cos \theta_0}. \quad (6.18)$$

Для практичного використання дифракційних ґраток цікавим є тільки випадок $\Delta\theta_p \ll \theta_2 - \theta_1$. У рамках прийнятих допущень згідно з (6.16) маємо $\theta_2 - \theta_1 \approx 2\alpha/k_0 \cos \theta_0$. Звідси з урахуванням (6.18) отримуємо $1/l_\xi \ll \alpha = 2\pi/L_p$. Отже, для періодичної структури, що розглядається, на l_ξ накладається обмеження $l_\xi \gg L_p/2\pi$.

Розглянутий випадок наочно демонструє резонансний характер розсіювання: кожній гармоніці неоднорідностей відповідає своє розсіяне поле. Оскільки у цій задачі збурення границі описується однією гармонікою, то у розсіяному полі існує тільки дві хвилі з векторами розсіювання $\vec{q}_{1,2} = (\pm\alpha, 0, 0)$.

Для фізичної інтерпретації отриманих формул розглянемо випадок нормального падіння хвилі ($\theta_0 = 0$) на поверхню, задану виразом (6.7). На рис. 6.5 показано процес відбиття плоскої хвилі від ідеальної синусоїдальної дифракційної ґратки з періодом $L_p = 2\pi/\alpha$ і початковою фазою ν .

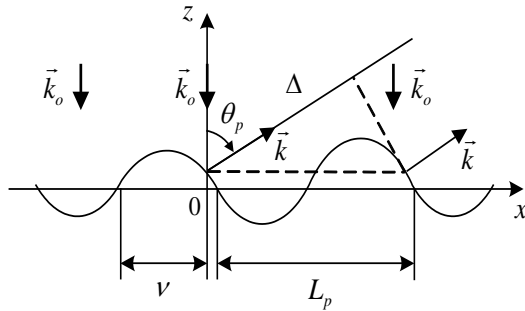


Рис. 6.5

Кожна точка поверхні є джерелом сферичної хвилі, що розходиться. Хвилі, розсіяні різними ділянками поверхні, когерентно складаються. Видно, що в одному і тому ж напрямку θ_p хвилі, розсіяні ділянками поверхні, зсунутими одна від одної на період $L_p, 2L_p, \dots, nL_p$, будуть мати оптичні різниці ходу $\Delta, 2\Delta, \dots, n\Delta$, де

$\Delta = L_p \sin \theta_p$. Розсіяне від усіх ділянок поверхні випромінювання буде синфазним, якщо $\Delta = \pm m\lambda$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$). У результаті ми приходимо до умови $L_p \sin \theta_p = \pm m\lambda$. При $m = 0$ кут синфазного відбиття збігається з падаючим кутом $\theta_p = \theta_0 = 0$. Значенню $m = 1$ відповідає перша відбита гармоніка з кутами відбиття $\theta_p = \theta_{1,2} = \mp \arcsin(\lambda/L_p)$ та ін.

У міру зростання m інтенсивності розсіяних гармонік швидко спадають. Найбільш інтенсивними є гармоніки з $m = 0$ і $m = 1$. У наближенні слабкошорстких неоднорідностей, коли $k_0\sigma_\xi \ll 1$ ($\lambda \gg \sigma_\xi$), у розсіяному полі враховуються тільки гармоніки з $m = 0$ і $m = 1$. При цьому кути розсіювання для першої гармоніки $\theta_p = \theta_{1,2} = \pm \arcsin(\lambda/L_p)$ і залежать від довжини хвилі падаючого випромінювання. Отримане співвідношення фізично означає, що незважаючи на те, що розсіяне випромінювання формується всією поверхнею, синфазно розсіюють тільки ті точки поверхні, просторове рознесення яких відповідає умові $L_p \sin \theta_p = \pm \lambda$.

6.2. Розрахувати методом малих збурень розподіл середньої інтенсивності у дальній зоні, вважаючи, що характерний розмір розсіюючої поверхні $L \ll \sqrt{\Sigma_0}$ набагато перевищує масштаб неоднорідностей l_z випадкової поверхні

$$z(x, y) = \xi_0 \sin(\alpha x + \nu) \sin(\beta y + \psi).$$

Тут α, β – сталі величини, що визначають періоди ґраток L_{px}, L_{py} уздовж напрямків x і y ($\alpha = 2\pi/L_{px}, \beta = 2\pi/L_{py}$). Випадкові величини ν і ψ незалежні, причому ν і ψ рівномірно розподілені в інтервалі $[-\pi, \pi]$. Побудувати схематичний графік $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$.

Розв'язання. Використаємо алгоритм і результати обчислень, наведених у задачі 6.1:

$$z(x, y) \rightarrow B_z(\vec{r}', \vec{r}) \rightarrow S_z(\vec{q}_\perp) \rightarrow \bar{I}_1(\theta, \varphi).$$

Згідно з цією схемою для заданої поверхні $z(x, y)$ побудуємо спочатку автокореляційну функцію $B_z(\vec{r}', \vec{r})$:

$$B_z(\vec{r}', \vec{r}) = \xi_0^2 \langle \sin(\alpha x' + \nu) \sin(\alpha x + \nu) \sin(\beta y' + \psi) \sin(\beta y + \psi) \rangle_{\nu\psi}.$$

Оскільки випадкові величини ν та ψ незалежні, цей вираз можна переписати як

$$B_z(\vec{r}', \vec{r}) = \xi_0^2 \langle \sin(\alpha x' + \nu) \sin(\alpha x + \nu) \rangle_{\nu} \times \\ \times \langle \sin(\beta y' + \psi) \sin(\beta y + \psi) \rangle_{\psi}.$$

Обчислимо перший множник

$$\langle \sin(\alpha x' + \nu) \sin(\alpha x + \nu) \rangle_{\nu} = \\ = \frac{1}{2} \langle \{ \cos[\alpha(x' - x)] - \cos[\alpha(x' + x) + 2\nu] \} \rangle_{\nu} = \\ = \frac{1}{2} \cos(\alpha \rho_x) - \frac{1}{2} \langle \cos[\alpha(x' + x) + 2\nu] \rangle_{\nu},$$

де $\rho_x = x' - x$.

За визначенням середньої величини для заданих границь зміни ν ,

$$\langle \cos[\alpha(x' + x) + 2\nu] \rangle_{\nu} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos[\alpha(x' + x) + 2\nu] W(\nu) d\nu = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[\alpha(x' + x) + 2\nu] d\nu = 0.$$

Аналогічно отримаємо вираз для усереднення за ψ :

$$\langle \sin(\beta y' + \psi) \sin(\beta y + \psi) \rangle_{\psi} = \frac{1}{2} \cos(\beta \rho_y).$$

Отже,

$$B_z(\vec{r}', \vec{r}) \equiv B_z(\vec{\rho}) = \frac{\xi_0^2}{4} \cos(\alpha \rho_x) \cos(\beta \rho_y).$$

За знайденим виразом $B_z(\vec{\rho})$ і формулою Вінера–Хінчина визначаємо $S_z(\vec{q}_\perp)$:

$$\begin{aligned}
S_z(\vec{q}_\perp) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} B_z(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}_\perp \vec{\rho}} d\vec{\rho} = \\
&= \frac{\xi_0^2}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha\rho_x) \cos(\beta\rho_y) e^{-i(q_x\rho_x + q_y\rho_y)} d\rho_x d\rho_y = \\
&= \frac{\xi_0^2}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha\rho_x) \exp(-iq_x\rho_x) d\rho_x \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\beta\rho_y) \exp(-iq_y\rho_y) d\rho_y.
\end{aligned}$$

Розглянемо перший з інтегралів

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha\rho_x) \exp(-iq_x\rho_x) d\rho_x &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\alpha - q_x)\rho_x] d\rho_x + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(\alpha + q_x)\rho_x] d\rho_x = \pi [\delta(\alpha - q_x) + \delta(\alpha + q_x)].
\end{aligned}$$

Таким же чином отримуємо вираз для другого інтегралу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\beta\rho_y) \exp(-iq_y\rho_y) d\rho_y = \pi [\delta(\beta - q_y) + \delta(\beta + q_y)].$$

В результаті приходимо до такого виразу:

$$S_z(\vec{q}_\perp) = \frac{\xi_0^2}{16} [\delta(\alpha - q_x) + \delta(\alpha + q_x)] [\delta(\beta - q_y) + \delta(\beta + q_y)].$$

Згідно з (6.2) значення $\bar{I}_1(\theta, \varphi)$ дорівнює

$$\begin{aligned}
\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p) &= \bar{I}_{10} \cos^2 \theta_p [\delta(\alpha - q_x) + \delta(\alpha + q_x)] \times \\
&\times [\delta(\beta - q_y) + \delta(\beta + q_y)],
\end{aligned}$$

де
$$\bar{I}_{10} = \frac{k_0^4 \xi_0^2 \Sigma_0 \cos^2 \theta_0}{4R_p^2}.$$

У напрямках, відповідних співвідношенням $q_x \neq \mp \alpha$, $q_y \neq \mp \beta$, розсіяне випромінювання відсутнє. Зі знайденого виразу видно, що максимуми випромінювання спостерігаються під кутами, для яких виконуються такі рівності: $q_x = \mp \alpha$, $q_y = \mp \beta$, тобто

$$\begin{cases} \sin \theta_p \cos \varphi_p = \sin \theta_0 \mp \frac{\alpha}{k_0}; \\ \sin \theta_p \sin \varphi_p = \mp \frac{\beta}{k_0}. \end{cases}$$

Аналіз цієї системи рівнянь засвідчує, що для розглянутої поверхні характерні чотири «викиди» розсіяного випромінювання під кутами $\theta_p = \theta_{1,2}$, $\varphi_p = \varphi_{1-4}$, де

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \arcsin \sqrt{\left(\sin \theta_0 - \frac{\alpha}{k_0} \right)^2 + \frac{\beta^2}{k_0^2}}; \\ \varphi_{1,3} = \pm \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{k_0 \sin \theta_0 + \alpha} \right). \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_2 = \arcsin \sqrt{\left(\sin \theta_0 + \frac{\alpha}{k_0} \right)^2 + \frac{\beta^2}{k_0^2}}; \\ \varphi_{2,4} = \pm \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{k_0 \sin \theta_0 - \alpha} \right). \end{array} \right.$$

Таким чином, для розглянутої поверхні розсіяне випромінювання $\bar{I}_1(\theta, \varphi)$ не лежить у площині падіння ($\varphi = 0, \pi$), а має складну структуру, яку схематично зображено на рис. 6.6.

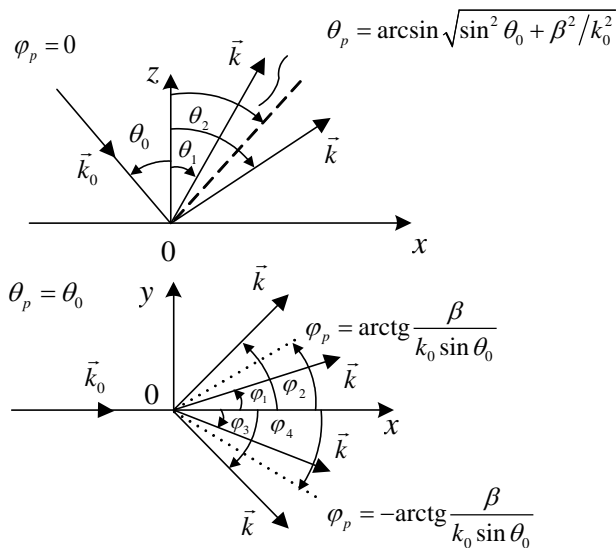


Рис. 6.6

6.3. У наближенні Кірхгофа розрахувати індикатрису розсіювання для випадкової поверхні

$$\xi(x, y) = \alpha x + \beta y,$$

де α і β – незалежні випадкові величини, розподілені за нормальним законом із нульовими середніми ($\bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0$) і дисперсіями $\sigma_\alpha^2 = \alpha_0^2$ і $\sigma_\beta^2 = \beta_0^2$. Побудувати схематичний графік індикатриси розсіювання.

Розв'язання. Задана поверхня розсіювання є випадково орієнтованою у просторі площиною. При цьому коефіцієнти α і β є тангенсами кутів нахилів площини відносно осей координат x та y відповідно ($\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \gamma_x$, $\beta = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \gamma_y$). Унаслідок незалежності величин γ_x і γ_y для густини розподілу ймовірності нахилів $W_\gamma(\vec{\gamma})$ виконується співвідношення $W_\gamma(\gamma_x, \gamma_y) = W_\gamma(\gamma_x)W_\gamma(\gamma_y)$. Отже, з урахуванням нормальності розподілу нахилів γ_x і γ_y отримуємо:

$$W_\gamma(\vec{\gamma}) = \frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0} \exp \left\{ -\frac{\gamma_x^2}{2\alpha_0^2} - \frac{\gamma_y^2}{2\beta_0^2} \right\}. \quad (6.19)$$

Для визначення індикатриси розсіювання ми маємо згідно з (6.4) виконати у (6.19) заміну $\vec{\gamma} \rightarrow -\vec{q}_\perp/q_z$, у результаті чого (6.19) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} W_\gamma(\vec{\gamma}) \Big|_{\vec{\gamma} = -\vec{q}_\perp/q_z} &= \frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0} \exp \left\{ -\frac{q_x^2}{2\alpha_0^2 q_z^2} - \frac{q_y^2}{2\beta_0^2 q_z^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0} \exp \left\{ -\frac{q_x^2 \beta_0^2 + q_y^2 \alpha_0^2}{2q_z^2 \alpha_0^2 \beta_0^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Обчислимо $W_\gamma(\vec{\gamma})$ у напрямку дзеркального відбиття, коли $\vec{q}_\perp = 0$:

$$W_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0}. \quad (6.21)$$

Підставляючи тепер отримані значення (6.20) і (6.21) у формулу (6.4), знаходимо вираз для індикатриси розсіювання:

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{q^4}{q_z^4} \exp \left\{ -\frac{q_x^2 \beta_0^2 + q_y^2 \alpha_0^2}{2q_z^2 \alpha_0^2 \beta_0^2} \right\}.$$

Ураховуючи зв'язок (6.3) між проекціями вектора розсіювання q_x, q_y і q_z і кутами спостереження θ_p і φ_p , остаточно отримаємо

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{4(1 + \cos \theta_p \cos \theta_0 - \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \times \exp \left\{ -\frac{\beta_0^2 (\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0)^2 + \alpha_0^2 \sin^2 \theta_p \sin^2 \varphi_p}{2\alpha_0^2 \beta_0^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \right\}. \quad (6.22)$$

Побудуємо схематичне зображення $F(\theta_p, \varphi_p)$ у двох площинах: $XOZ - F(\theta_p, 0)$ і $XOY - F(\theta_0, \varphi_p)$. Ці окремі випадки легко отримуються з виразу (6.22):

$$F(\theta_p, 0) = \frac{4[1 + \cos(\theta_p + \theta_0)]^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \exp \left\{ -\frac{(\sin \theta_p - \sin \theta_0)^2}{2\alpha_0^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \right\}; \quad (6.23)$$

$$F(\theta_0, \varphi_p) = \frac{(1 + \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{4\cos^4 \theta_0} \times \exp \left\{ -\frac{\text{tg}^2 \theta_0}{8\alpha_0^2 \beta_0^2} \cdot [\beta_0^2 (1 - \cos \varphi_p)^2 + \alpha_0^2 \sin^2 \varphi_p] \right\}. \quad (6.24)$$

Згідно з (6.23) і (6.24) при $\alpha_0^2 \ll 1$ і $\beta_0^2 \ll 1$ у розподілах $F(\theta_p, \varphi_p)$ спостерігатимуться гострі максимуми (рис. 6.7) під кутами $\theta_p = \theta_0$ – для $F(\theta_p, 0)$ і $\varphi_p = 0$ – для $F(\theta_0, \varphi_p)$.

Характерну ширину індикатриси розсіювання за рівнем e^{-1} легко знайти за допомогою простих оцінок. Так, ураховуючи, що при $\alpha_0^2, \beta_0^2 \ll 1$ передекспоненційні множники у (6.23) і (6.24) повільно змінюються порівняно з експонентами, наближено візьмемо їх для фіксованих кутів $\theta_p = \theta_0$ і $\varphi_p = 0$:

$$\frac{4 \left[1 + \cos(\theta_p + \theta_0) \right]^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \Bigg|_{\theta_p = \theta_0} = 1 \quad \text{для } F(\theta_p, 0);$$

$$\frac{(1 + \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{4 \cos^4 \theta_0} \Bigg|_{\varphi_p = 0} = 1 \quad \text{для } F(\theta_0, \varphi_p).$$

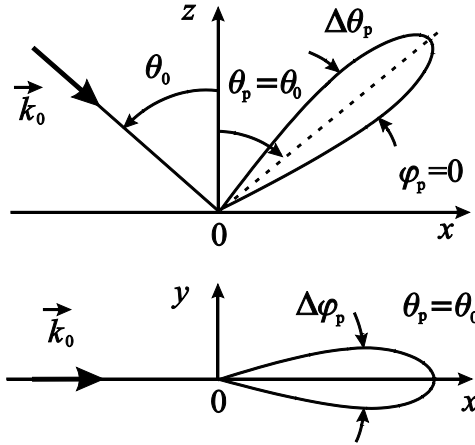


Рис. 6.7

У показнику експоненти (6.23) покладемо $\theta_p = \theta_0 + \Delta\theta_p$ і, вважаючи, що $\Delta\theta_p \ll \theta_0$, проведемо спрощення

$$\frac{(\sin \theta_p - \sin \theta_0)^2}{2\alpha_0^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} = \frac{[\sin(\theta_0 + \Delta\theta_p) - \sin \theta_0]^2}{2\alpha_0^2 [\cos(\theta_0 + \Delta\theta_p) + \cos \theta_0]^2} \approx \frac{(\Delta\theta_p)^2}{8\alpha_0^2}.$$

Аналогічно і для (6.24) з точністю до квадратичних доданків за $\alpha_0^2, \beta_0^2, \varphi^2 \ll 1$ знаходимо спрощений вираз

$$\frac{[\beta_0^2 (1 - \cos \varphi_p)^2 + \alpha_0^2 \sin^2 \varphi_p] \sin^2 \theta_0}{8\alpha_0^2 \beta_0^2 \cos^2 \theta_0} \approx \frac{\varphi_p^2}{8\beta_0^2 \operatorname{ctg}^2 \theta_0}.$$

У результаті отримуємо такі наближені розподіли індикатриси розсіювання в околі максимумів:

$$F(\theta_p, 0) \approx \exp \left\{ -\frac{(\Delta\theta_p)^2}{8\alpha_0^2} \right\};$$

$$F(\theta_0, \varphi_p) \approx \exp \left\{ -\frac{\varphi_p^2}{8\beta_0^2 \text{ctg}^2 \theta_0} \right\}.$$

Звідси характерні масштаби зміни індикатриси розсіювання за кутами θ_p і φ_p дорівнюють:

$$\Delta\theta_p \approx 2\sqrt{2}\alpha_0;$$

$$\Delta\varphi_p \approx 2\sqrt{2}\beta_0 \text{ctg} \theta_0.$$

6.4. Здійснити перехід у розглянутому у попередній задачі анізотропному розподілі нахилів до ізотропного випадку.

Розв'язання. Для ізотропного розподілу нахилів у густині ймовірності, наведеній у задачі 6.3, ми маємо покласти $\sigma_\alpha^2 = \sigma_\beta^2 = \sigma^2$.

З іншого боку, з урахуванням того, що

$$\vec{\gamma} = \gamma_x \vec{e}_x + \gamma_y \vec{e}_y = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y,$$

для дисперсій модуля і проекцій отримуємо такий зв'язок:

$$\sigma_\gamma^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 = 2\sigma^2.$$

Враховуючи викладене, формули (6.19) і (6.22) попередньої задачі зводяться до вигляду:

$$W_\gamma(\vec{\gamma}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}{2\sigma^2} \right\} = \frac{1}{\pi\sigma_\gamma^2} \exp \left\{ -\frac{\gamma^2}{\sigma_\gamma^2} \right\} = W_\gamma(\gamma);$$

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{4(1 + \cos \theta_p \cos \theta_0 - \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{\sin^2 \theta_p + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p}{\sigma_\gamma^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \right\}.$$

6.4. Задачі для самостійного розв'язання

6.5. На поверхню

$$z = \xi(x, y) = \xi,$$

де випадкова величина ξ рівномірно розподілена в інтервалі $(-\xi_0, \xi_0]$, під кутом θ_0 падає плоска монохроматична хвиля. Розрахувати та навести схематичний розподіл середньої інтенсивності розсіяного випромінювання за напрямками.

Відповідь: $\langle I_1(\theta_p, \varphi_p) \rangle \propto \delta(q_x) \cdot \delta(q_y),$

де

$$q_x = k_0 (\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0);$$

$$q_y = k_0 \sin \theta_p \sin \varphi_p.$$

Залежність середньої інтенсивності розсіяного випромінювання за напрямками показано на рис. 6.8.

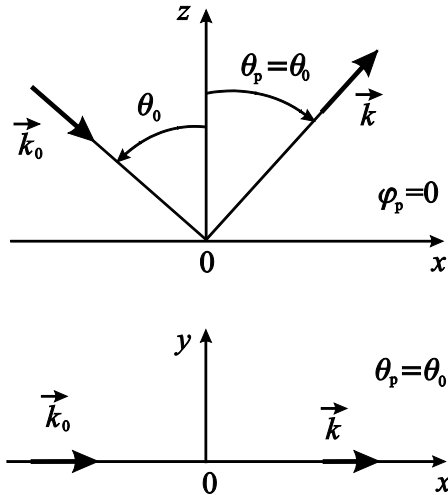


Рис. 6.8

6.6. Розрахувати методом малих збурень розподіл середньої інтенсивності розсіяного випромінювання за напрямками для випадкової поверхні

$$z(x) = \xi_0 \sin(\alpha x + \nu),$$

де ν – випадкова величина, рівномірно розподілена в інтервалі $[-\pi, \pi]$. Побудувати схематичний графік $\langle I_1(\theta_p, \varphi_p) \rangle$.

Відповідь:

$$\langle I_1(\theta_p, \varphi_p) \rangle \propto \delta(q_y) [\delta(q_x + \alpha) + \delta(q_x - \alpha)].$$

Залежність середньої інтенсивності розсіяного випромінювання за напрямками показана на рис. 6.9.

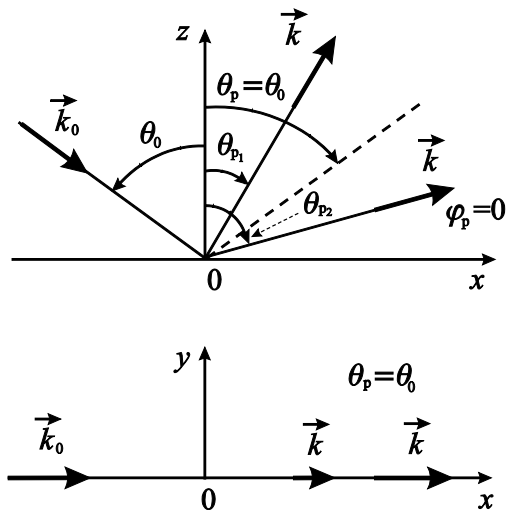


Рис. 6.9

6.7. Розрахувати та навести схематичний розподіл індикатриси розсіювання випромінювання для слабкошорсткої випадкової поверхні з кореляційною функцією нерівностей вигляду

$$B_z(\vec{\rho}) = \sigma_z^2 \exp \left\{ -\frac{\rho_x^2}{a^2} - \frac{\rho_y^2}{b^2} \right\}.$$

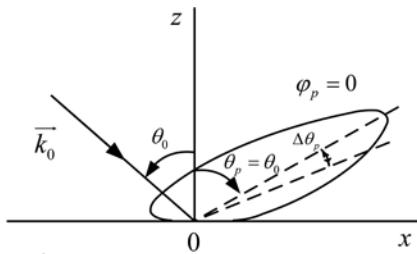
Вважаючи підвищення поверхні $z(\vec{r})$ малими, знайти характерні розміри індикатриси розсіювання $\Delta\theta_p$ та $\Delta\varphi_p$ за рівнем e^{-1} при умові $|\theta_p - \theta_0| \ll 1$.

Відповідь:

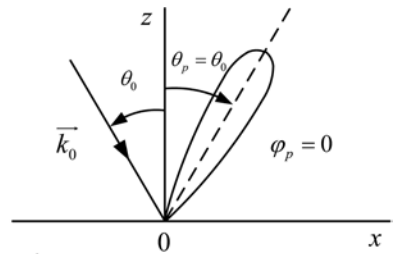
$$F(\theta_p, \varphi_p) \approx \exp \left\{ -\frac{k_0^2}{4} \left[a^2 (\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0)^2 + b^2 \sin^2 \theta_p \sin^2 \varphi_p \right] \right\}.$$

$$\Delta \theta_p \approx \frac{2}{k_0 a \cos \theta_0}; \quad \Delta \varphi_p \approx \frac{2}{k_0 b \sin \theta_0}.$$

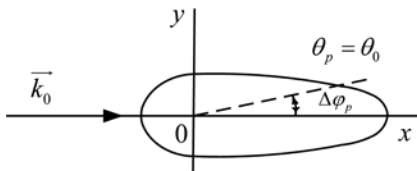
Схематичне зображення індикатриси розсіювання наведено на рис. 6.10 а, б (у випадку дрібних нерівностей: $k_0 l_{\perp} \ll 1$) та рис. 6.11 а, б (у випадку довгих пологих нерівностей: $k_0 l_{\perp} \gg 1$).



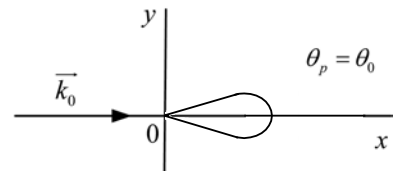
а)



а)



б)



б)

Рис. 6.10

Рис. 6.11

ДОДАТОК

1. Визначення гіперболічних функцій:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\operatorname{cth} x}.$$

2. Формули Ейлера для комплексних чисел:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z; \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z;$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

3. Деякі співвідношення для тригонометричних функцій

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x.$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}.$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}.$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{y - x}{2}.$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}.$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}.$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x.$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

$$2 \sin x \cdot \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y).$$

$$2 \sin x \cdot \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y).$$

$$2 \cos x \cdot \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y).$$

4. Біноміальні коефіцієнти (кількість сполучень):

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}; \quad C_n^1 = n; \quad C_n^n = C_n^0 = 1; \quad C_n^m = C_n^{n-m}.$$

5. Розкладення деяких функцій в ряди:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad [|x| < \infty].$$

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \quad [|x| < \infty].$$

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots +$$

$$+ (\pm 1)^n \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n \dots \quad [m > 0; \quad |x| < 1].$$

$$(1 \pm x)^{-m} = 1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2!} x^2 \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} x^3 + \dots +$$

$$+ (\mp 1)^n \frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{n!} x^n \dots \quad [m > 0; \quad |x| < 1].$$

6. Деякі інтеграли, які найбільш часто зустрічаються при розв'язанні задач:

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}.$$

$$\int x e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right).$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right).$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n}{a} e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx.$$

$$\int \frac{e^{ax}}{x} dx = \text{Ei}(ax). \quad \text{Тут } \text{Ei}(x) \text{ - інтегральна показникова функція (див. додаток II)}.$$

$$\int \frac{e^{ax}}{x^2} dx = -\frac{e^{ax}}{x} + a \cdot \text{Ei}(ax).$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a}.$$

$$\int \sin^2(mx) dx = \frac{1}{2m} x - \frac{1}{4m} \sin(2mx).$$

$$\int \cos^2(mx) dx = \frac{1}{2m} x + \frac{1}{4m} \sin(2mx).$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad [a > 0]. \quad \text{Тут } \Gamma(x) -$$

Гамма-функція Ейлера (див. Додаток 12).

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2(2a)^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad [a > 0].$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad [a > 0].$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx &= \sqrt{\pi}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx &= \sqrt{2\pi} \end{aligned} \right\} - \text{інтеграл Пуассона.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 \pm px) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{p^2}{4a}\right) \quad [a > 0].$$

$$\int_0^{\infty} x^n \exp(-a^2 x^2) dx = \frac{1}{2a^{n+1}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad [a > 0, n > -1].$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-a^2 x^2) \cos mx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \exp\left(-\frac{m^2}{4a^2}\right) \quad [a > 0].$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-ax) \cos mx dx = \frac{a}{a^2 + m^2} \quad [a > 0].$$

7. Визначення лишків та застосування їх до обчислення інтегралів.

Лишок функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці z_0 визначається як

$$\operatorname{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta,$$

де C - будь який замкнений контур, який містить тільки одну особливу точку z_0 .

Обчислення лишків.

1. Якщо функція $f(z)$ розкладена в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k (z - z_0)^k, \text{ то}$$

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

2. Якщо z_0 є особливою усувною точкою, то

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = 0.$$

3. Якщо z_0 є полюсом, то:

а) у випадку, коли z_0 є простим полюсом,

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0) f(z) \right].$$

Зокрема, якщо $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\psi(z_0) = 0$,

$\psi'(z_0) \neq 0$, $\varphi(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)};$$

б) у випадку, коли z_0 є полюсом порядку $m > 1$,

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right].$$

8. Інтеграл ймовірності (інтеграл помилок, функція Лапласа). Для визначення ймовірності $P\{x_1 < x < x_2\}$ влучання в інтервал $[x_1, x_2]$ випадкової величини x , яка розподілена за нормальним законом, треба розраховувати інтеграл типу

$$P\{x_1 < x < x_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x_1}^{x_2} \exp \left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right] dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x_1-a}{\sigma}}^{\frac{x_2-a}{\sigma}} \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] dz.$$

Такий інтеграл не може бути записаним через елементарні функції і тому для розрахунків ймовірностей випадкових величин з

нормальним законом розподілу складені таблиці спеціальної функції

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \operatorname{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right),$$

яку називають функцією Лапласа, або інтегралом помилок $\operatorname{erf}(x)$. Функція $\Phi(t)$ є непарною, тобто $\Phi(-t) = -\Phi(t)$.

Значення $\Phi(t)$ для додатних значень t подано в табл. 1.

Таблиця 1

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0.00	0.00000	0.95	0.65789	1.90	0.94257
0.05	0.03988	1.00	0.68269	1.95	0.94882
0.10	0.07966	1.05	0.70628	2.00	0.95450
0.15	0.11924	1.10	0.72867	2.05	0.95964
0.20	0.15852	1.15	0.74986	2.10	0.96427
0.25	0.19741	1.20	0.76986	2.15	0.96844
0.30	0.23582	1.25	0.78870	2.20	0.97219
0.35	0.27366	1.30	0.80640	2.25	0.97555
0.40	0.31084	1.35	0.82298	2.30	0.97855
0.45	0.34729	1.40	0.83849	2.35	0.98123
0.50	0.38292	1.45	0.85294	2.40	0.98360
0.55	0.41768	1.50	0.86639	2.45	0.98571
0.60	0.45149	1.55	0.87886	2.50	0.98758
0.65	0.48431	1.60	0.89040	2.55	0.98923
0.70	0.51607	1.65	0.90106	2.60	0.99068
0.75	0.54675	1.70	0.91087	2.65	0.99195
0.80	0.57629	1.75	0.91988	2.70	0.99307
0.85	0.60468	1.80	0.92814	2.75	0.99404
0.90	0.63188	1.85	0.93569	2.80	0.99489

Для $t = 0$ функція $\Phi(t)$ близька до лінійної і тому при малих t може бути представлена в аналітичному вигляді шляхом розкладу експоненти під інтегралом в ряд та подальшому інтегруванні ряду. Якщо обмежитися лінійним членом, отримуємо

$$\Phi(t \ll 1) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} t.$$

Примітка. В деяких книгах під тією ж назвою «інтеграл ймовірностей» наводиться таблиця функції $\Phi(t)/2$ або ж таблиця функції розподілу

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2}[1 + \Phi(t)].$$

9. Подання та властивості дельта-функції Дірака $\delta(t)$.

Деякі найбільш уживаних подань δ – функції:

$$\delta(x - a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (x - a)^2};$$

$$\delta(x - a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - a)^2}{2\varepsilon^2}\right);$$

$$\delta(x - a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{\pi} \cdot \frac{\sin[\varepsilon(x - a)]}{\varepsilon(x - a)};$$

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x - a)} d\omega.$$

δ – функція дорівнює нулю всюди, крім точки $x = a$ (де її аргумент дорівнює нулю), а у точці $x = a$ набуває нескінченного значення:

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \neq a; \\ \infty, & \text{якщо } x = a. \end{cases}$$

$$\delta[b(x - a)] = \frac{1}{|b|} \delta(x - a) \quad \text{або} \quad \delta(bx - a) = \frac{1}{|b|} \delta\left(x - \frac{a}{b}\right).$$

Функція парна $\delta(-x) = \delta(x)$.

«Площа» під δ – функцією скінченна і дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) dx = 1.$$

Правило інтегрування:

$$\int_a^b \delta(x-x_0) dx = \begin{cases} 1, & a < x_0 < b; \\ 0.5, & x_0 = a \text{ або } x_0 = b; \\ 0 & x_0 < a, \quad x_0 > b. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a).$$

10. Функція Хевісайда $h(x)$:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \geq 0; \\ 0, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} h(x-a) = \delta(x-a).$$

11. Інтегральна показникова функція $Ei(x)$:

$$Ei(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt \quad [x < 0].$$

$$Ei(x) = e^x \left[\frac{1}{x} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(x-t)^2} dt \right].$$

$$Ei(\pm xa) = \pm e^{\pm xa} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{a \mp t} dt \quad [x > 0, a > 0].$$

$$Ei(1) = 1.895, \quad Ei(-1) = -0.219.$$

12. Визначення та властивості Гамма-функції $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad [x > 0].$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(1-x) \cdot \Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x} \sqrt{\pi} \Gamma(2x).$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

13. Перетворення Фур'є:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx.$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega.$$

Таблиця деяких перетворень Фур'є

Таблиця 2

Оригінал $f(x)$	Зображення $F(\omega)$
$af(x) + bg(x)$	$aF(\omega) + bG(\omega)$
$f(x-a)$	$\exp(i\omega a)F(\omega)$
$\exp(iax)f(x)$	$F(\omega+a)$
$\frac{d^n f(x)}{dx^n}, \quad n=0,1,2,\dots$	$(-i\omega)^n F(\omega)$
$x^n f(x), \quad n=0,1,2,\dots$	$(-i)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$
$\delta(x)$	1
$\exp(-iax)$	$2\pi\delta(\omega-a)$
$\sin ax$	$\pi i [\delta(\omega+a) - \delta(\omega-a)]$
$\cos ax$	$\pi [\delta(\omega+a) + \delta(\omega-a)]$
$\exp(-ax^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)$

14. Перетворення Лапласа:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad s = \sigma + i\beta, \quad [\sigma \geq 0].$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st} ds,$$

Деякі перетворення Лапласа

Таблиця 3

Оригінал $f(t)$	Зображення $F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$\delta(t-a), \quad a > 0$	$\exp(-as)$
$t^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n \exp(at), \quad n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\exp(at) \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$\exp(at) \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Мінаков А. О Статистична радіофізика: підруч. для студ. вищ. навч. закл.: у 3 ч. / А. О. Мінаков, О. Ф. Тирнов – Х. : Веста, 2007. – Ч. 1: Основні поняття теорії ймовірностей. Елементи теорії випадкових функцій. – 2007. – 192 с.
2. Мінаков А.О. Статистична радіофізика: підруч. для студ. вищ. навч. закл.: у 3 ч. / А. О. Мінаков, О. Ф. Тирнов – Х. : Веста, 2007. – Ч. 2: Флуктуаційні явища в радіотехніці та основи статистичної теорії поширення хвиль. – 2007. – 176 с.
3. Мінаков А.О. Статистична радіофізика: підруч. для студ. вищ. навч. закл.: у 3 ч. / А. О. Мінаков, О. Ф. Тирнов – Х. : Веста, 2007. – Ч. 3: Вплив випадкових неоднорідностей на поширення та розсіювання хвиль. – 2007. – 160 с.
4. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику / С. М. Рытов – М. : Наука, 1976. – Ч. I. Случайные процессы. – 494 с.
5. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику / С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И Татарский – М. : Наука, 1978. – Ч. II. Случайные поля. – 463 с.
6. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники /Б. Р. Левин – М. : Сов. радио, 1974. – 550 с.
7. Горяинов В. Т. Статистическая радиотехника. Примеры и задачи / В. Т. Горяинов, А. Г. Журавлев, В. И. Тихонов – М. : Сов. радио, 1980. – 543 с.