МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА

Л. Ф. ЧОРНОГОР

НЕЛІНІЙНА РАДІОФІЗИКА

Підручник

Видання третє, доповнене та перероблене

Харків – 2015

УДК 530.18+534.1, 550.338
ББК 32.814
Ч-49

Рецензенти:

В. М. Яковенко – академік НАН України (Інститут радіофізики і електроніки НАН України, м. Харків);

С. М. Шульга – доктор фіз.-мат. наук, професор (Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна)

Затверджено до друку рішенням Вченої ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол №… від…)

Чорногор Л. Ф. Нелінійна радіофізика : підручник. – 3-тє вид., доп. і перероб. / Л Ф. Чорногор. – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2015. – 204 с.

Викладено загальні питання нелінійної електродинаміки: вихідні рівняння, методи їх розв'язання, самовплив та взаємодія хвиль, теорія ударних хвиль і солітонів, нестійкості. Наведені численні приклади нелінійних явищ з електродинаміки, квантової та космічної радіофізики, фізики плазми тощо. Обговорюються питання детермінованого хаосу та самоорганізації.

Для студентів старших курсів, аспірантів і наукових робітників відповідного профілю.

46 іл., 4 табл., 44 бібл.

Черногор Л. Ф. Нелинейная радиофизика : учебник. – 3-е изд., доп. и перераб. / Л. Ф. Черногор. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2015. – 204 с.

Изложены общие вопросы нелинейной электродинамики: исходные уравнения, методы их решения, самовоздействие и взаимодействие волн, теория ударных волн и солитонов, неустойчивости. Приведены многочисленные примеры нелинейных явлений из электродинамики, квантовой и космической радиофизики, физики плазмы и т. д. Обсуждаются вопросы детерминированного хаоса и самоорганизации.

Для студентов старших курсов, аспирантов и научных работников соответствующего профиля.

46 илл., 4 табл., 44 библ.

Chernogor L. F. Nonlinear Radio Physics : textbook. – 3-rd ed., revised / L. F. Chernogor. – Kharkiv : V. N. Karazin Kharkiv National University, 2015. – 204 p.

The textbook is concerned with the following general principals of nonlinear electrodynamics: basic equations, techniques for their solution, self-action, interaction, shock wave and soliton theory, and instabilities. The numerous examples of nonlinear phenomena are presented from the field of electrodynamics, quantum and space radio- physics, plasma physics, etc. Deterministic chaos and self-organization are discussed.

The textbook is intended for graduate and postgraduate students, and scientists in the field.

46 Figures, 4 Tables, 44 References.

УДК 530.18+534.1, 550.338
ББК 32.814

© Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 2015
© Чорногор Л. Ф., 2015
© Дончик І. М., макет обкладинки, 2015

ЗМІСТ

Передмова наукового редактора.....
Передмова.....
ВСТУП.....
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ПРО НЕЛІНІЙНІ ЯВИЩА. СТРУКТУРА, ЦІЛІ ТА ЗАДАЧІ КУРСУ.....
1.1. Основні етапи формування уявлень про нелінійний світ.....
1.2. Причини виникнення нелінійних явищ.....
1.3. Структура, цілі та задачі курсу.....
Питання для самоконтролю.....
РОЗДІЛ 2. НЕЛІНІЙНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА.....
2.1. Якісна картина нелінійних явищ.....
Питання для самоконтролю.....
2.2. Нелінійні рівняння електродинаміки.....
2.2.1. Точний розв'язок нелінійних рівнянь електродинаміки.....
2.2.2. Нелінійне хвильове рівняння.....
Питання для самоконтролю.....
Задачі.....
2.3. Методи нелінійної електродинаміки.....
2.3.1. Метод малих збурень.....
2.3.2. Метод повільних амплітуд.....
2.3.3. Метод нелінійної квазіоптики.....
2.3.4. Рівняння ейконалу та переносу.....
2.3.5. Метод нелінійної геометричної оптики.....
Питання для самоконтролю.....
2.4. Самовплив і взаємодія плоских електромагнітних хвиль.....
2.4.1. Амплітудний самовплив хвилі.....
2.4.2. Фазовий самовплив хвилі.....
2.4.3. Амплітудна взаємодія хвиль.....
2.4.4. Фазова взаємодія хвиль.....
2.4.5. Нестаціонарний процес самовпливу хвилі. Динаміка фронту просвітління (помутніння).....
Питання для самоконтролю.....
Задачі.....
2.5. Нелінійні стаціонарні хвилі.....
2.5.1. Лінійні стаціонарні хвилі.....
2.5.2. Укручення профілю хвилі.....

2.5.3. Вплив дисипації. Рівняння Бюргерса
та його точні розв'язки .....
2.5.4. Ударна хвиля .....
2.5.5. Коротка історія дослідження ударних хвиль.
Приклади ударних хвиль .....
2.5.6. Вплив дисперсії. Рівняння Кортевега – де Вріза
та його точні розв'язки .....
Питання для самоконтролю .....
Задачі .....
2.6. Солітони .....
2.6.1. Властивості класичного солітона .....
2.6.2. Коротка історія дослідження солітонів .....
2.6.3. Рівняння Бюргерса – Кортевега – де Вріза та його розв'язок .....
2.6.4. Дисипативний солітон .....
2.6.5. Електричні домени (солітони Ганна) .....
2.6.6. Нелінійна відокремлена хвиля в радіоелектронних
приладах .....
2.6.7. Нелінійна відокремлена хвиля в плазмі .....
2.6.8. Рівняння синус-Гордона. Солітон і антисолітон .....
2.6.9. Нелінійне рівняння Шрьодінгера. Солітон обвідної .....
2.6.10. Багатовимірний солітон .....
2.6.11. Приклади солітонів .....
2.6.12. Можливі застосування солітонів .....
Питання для самоконтролю .....
Задачі .....
2.7. Самовплив пучків електромагнітних хвиль .....
2.7.1. Оцінка величини ефекту .....
2.7.2. Критична інтенсивність пучка .....
2.7.3. Ефект самоканалювання .....
Питання для самоконтролю .....
2.8. Когерентна взаємодія хвиль. Нестійкості .....
2.8.1. Двохвильова взаємодія .....
2.8.2. Врахуванння згасання при двохвильовій взаємодії .....
2.8.3. Трихвильова взаємодія (несамоузгоджена постановка задачі) .....
2.8.4. Врахування згасання при трихвильовій взаємодії .....
2.8.5. Трихвильова взаємодія (самоузгоджена постановка задачі) .....
2.8.6. Вибухова нестійкість .....
2.9. Основні результати .....
Питання для самоконтролю .....
Задачі .....
РОЗДІЛ 3. НЕЛІНІЙНІ ЯВИЩА В КВАНТОВІЙ РАДІОФІЗИЦІ .....
3.1. Коротка історична довідка .....
Питання для самоконтролю .....
3.2. Механізми нелінійних явищ .....
3.2.1. Тепловий механізм .....

3.2.2. Стрикційний механізм .....
3.2.3. Керрівський механізм .....
3.2.4. Механізм нелінійности Поккельса .....
3.2.5. Атомний механізм .....
3.2.6. Релятивістський механізм .....
3.2.7. Вакуумний механізм .....
3.2.8. Порівняння механізмів .....
Питання для самоконтролю .....
3.3. Генерація другої гармоніки .....
3.3.1. Вихідні рівняння .....
3.3.2. Амплітуда другої гармоніки .....
Питання для самоконтролю .....
Задачі .....
3.4. Використання нелінійних явищ .....
3.4.1. Генерація оптичних гармонік .....
3.4.2. Параметричні генератори світла .....
3.4.3. Нелінійна спектроскопія .....
3.4.4. Адаптивна оптика .....
3.4.5. Лазерний керований термоядерний синтез .....
3.4.6. Інші застосування нелінійних явищ .....
Питання для самоконтролю .....
3.5. Основні результати .....
РОЗДІЛ 4. НЕЛІНІЙНІ ЯВИЩА В ПЛАЗМОВІЙ РАДІОФІЗИЦІ .....
4.1. Загальні відомості про плазму .....
4.1.1. Методи теоретичного опису плазми .....
4.1.2. Основні параметри плазми .....
4.1.3. Плазмова частота .....
4.1.4. Діелектрична проникність холодної ізотропної плазми .....
4.1.5. Показники заломлення та поглинання хвиль .....
4.1.6. Вплив зовнішнього магнітного поля .....
4.1.7. Подвійне променезаломлення .....
Питання для самоконтролю .....
4.2. Механізми нелінійних явищ у плазмі .....
4.2.1. Тепловий (нагрівний) механізм .....
4.2.2. Стрикційний механізм .....
4.2.3. Іонізаційний механізм .....
4.2.4. Релятивістський механізм .....
4.2.5. Порівняння механізмів .....
Питання для самоконтролю .....
4.3. Рівняння балансу енергії та концентрації частинок .....
Питання для самоконтролю .....
4.4. Збурення концентрації електронів .....
4.4.1. Прилипання та рекомбінація електронів .....
4.4.2. Іонізація газу електричним полем .....
4.4.3. Порушення гідростатичної рівноваги .....

Питання для самоконтролю .....
Задачі .....
4.5. Самовплив електромагнітних хвиль.....
4.5.1. Тепловий самовплив хвиль .....
4.5.2. Стрикційний самовплив хвиль .....
4.5.3. Самовплив іонізуючих хвиль.....
Питання для самоконтролю .....
Задачі .....
4.6. Інші нелінійні ефекти.....
4.6.1. Самофокусувальна нестійкість .....
4.6.2. Резонансні нестійкості .....
4.6.3. Параметричні нестійкості.....
Питання для самоконтролю .....
4.7. Особливості нелінійних явищ у напівпровідниках .....
4.7.1. Основні нелінійні явища .....
4.7.2. Використання нелінійних явищ.....
Питання для самоконтролю .....
4.8. Основні результати .....
РОЗДІЛ 5. НЕЛІНІЙНІ ЯВИЩА В КОСМІЧНІЙ РАДІОФІЗИЦІ.....
5.1. Короткі відомості про навколоземний космос .....
Питання для самоконтролю .....
5.2. Результати експериментів .....
Питання для самоконтролю .....
5.3. Механізми нелінійних явищ.....
Питання для самоконтролю .....
5.4. Крос-модуляція радіохвиль .....
5.4.1. Розрахунок величини збурень.....
5.4.2. Розрахунок величини крос-модуляції .....
5.4.3. Аналіз величини крос-модуляції .....
Питання для самоконтролю .....
Задачі .....
5.5. Самомодуляція радіохвиль.....
Питання для самоконтролю .....
Задачі .....
5.6. Нестійкості в іоносфері.....
5.6.1. Самофокусувальна нестійкість .....
5.6.2. Резонансні нестійкісті.....
5.6.3. Розпадні нестійкості.....
Питання для самоконтролю .....
5.7. Штучні іоносферні неоднорідності.
Ракурсне розсіяння радіохвиль .....
Питання для самоконтролю .....
Задачі .....
5.8. Штучне плазмове дзеркало в атмосфері .....
Питання для самоконтролю .....

Задачі.....
5.9. Ефект Г. Г. Гетманцева.....
Питання для самоконтролю.....
5.10. Сонячні енергетичні станції.....
Питання для самоконтролю.....
Задачі.....
5.11. Великомасштабні та глобальні збурення в іоносфері.
Вплив на магнітосферу.....
Питання для самоконтролю.....
5.12. Солітони в навколоземному просторі.....
Питання для самоконтролю.....
5.13. Основні результати .....
РОЗДІЛ 6. НЕЛІНІЙНІ ЯВИЩА В СТАТИСТИЧНІЙ РАДІОФІЗИЦІ.....
6.1. Постановка задачі .....
6.2. Методи розв’язання нелінійних стохастичних задач.....
6.2.1. Усереднення точного розв’язку .....
6.2.2. Методи лінеаризації .....
6.2.3. Метод статистичної лінеаризації .....
6.2.4. Рівняння Дайсона для середніх .....
6.2.5. Поняття про рівняння Фокера – Планка.....
Питання для самоконтролю.....
Задачі.....
6.3. Основні результати .....
РОЗДІЛ 7. АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ НЕЛІНІЙНОЇ РАДІОФІЗИКИ.....
7.1. Детермінований хаос в радіофізиці .....
7.1.1. Поняття хаосу. Математичний апарат хаосу .....
7.1.2. Поняття про геометрію фракталів.
Фрактали в математиці та природі.....
7.1.3. Формування ідеї динамічного хаосу. Модель Лоренца.....
7.1.4. Причини виникнення хаосу .....
7.1.5. Умови та сценарії виникнення хаосу.....
7.1.6. Приклади хаотичних радіофізичних систем .....
Питання для самоконтролю.....
7.2. Явище самоорганізації в радіофізиці .....
7.2.1. Поняття самоорганізації. Синергетика.....
7.2.2. Формування синергетичної ідеї .....
7.2.3. Властивості автохвиль .....
7.2.4. Застосування автохвиль у радіоелектроніці .....
7.2.5. Інші приклади самоорганізації.....
Питання для самоконтролю.....
Задачі.....
7.3. Основні результати .....
ВИСНОВКИ .....
ЛІТЕРАТУРА.....

Передмова наукового редактора

Книга за університетським курсом «Нелінійна радіофізика» являє собою першу й удалу спробу підготовки навчального посібника такого типу. Вона написана на основі лекцій, що читаються з ініціативи Л. Ф. Чорногора з 1980-х рр. на радіофізичному факультеті Харківського державного університету (тепер ХНУ імені В. Н. Каразіна). Наскільки мені відомо, курс «Нелінійна радіофізика» і на сьогоднішній день читається тільки в згаданому університеті. Безсумнівно, настане час, коли цей курс стане звичним (таким же, як математична або теоретична фізика) для студентів-радіофізиків і інших університетів. За задумом автора підручника, курс повинен завершувати радіофізичну освіту студентів, традиційно присвячену в основному лінійним процесам і ефектам.

Підручник охоплює основні розділи радіофізики – електродинаміку, теорії коливань і хвильових процесів, електроніку, квантову й статистичну радіофізику, поширення радіохвиль тощо. Перед автором стояла важка задача оптимального вибору матеріалу, що викладається, з настільки широкого кола питань. Як мені видається, Л. Ф. Чорногор із цією задачею впорався. Звичайно, не всі питання розкриті однаково повно, але найцікавіші з них описані детально.

Необхідно відзначити вдалу структуру підручника й кожного його розділу. Він, звичайно, починається з короткого екскурсу в історію, потім викладаються класичні нелінійні ефекти й сучасний стан питань. Розділи, як і вся книга, закінчуються основними результатами. Така структура виявляється дуже зручною для студентів.

Головною заслугою книги, на мій погляд, є те, що в ній уперше стверджується, що в цілому світ – нелінійний, що фізика (радіофізика) – нелінійна, а традиційні лінійні дисципліни – лише граничний випадок. Такий погляд на фізику, безумовно, нетривіальний. Додамо, що відомий фізик і радіофізик сучасності академік В. Л. Гінзбург дотримувався думки, що нелінійна фізика – лише частина, і досить мала, всієї фізики.

Коротко про автора. Л. Ф. Чорногор – заслужений професор Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, доктор фізико-математичних наук, професор, лауреат трьох престижних премій колишнього

СРСР, Державної премії УРСР у галузі науки та техніки. Він – відомий фахівець в області космічної фізики, нелінійної радіофізики, поширення радіохвиль дистанційного радіозондування геокосмосу та фізичної екології. Його публікації (а їх більше 1000 найменувань, із них 27 книг) присвячені дослідженню багатьох нелінійних явищ: взаємодії потужного радіо-випромінювання з геокосмічною плазмою, впливу землетрусів, потужних вибухів, стартів і польотів космічних апаратів на навколоземне середовище й т. п. Однак головною заслугою Л. Ф. Чорногора є виявлення й пояснення в 70–80 рр. XX ст. невідомого раніше явища – генерації стимульованих потужним радіовипромінюванням великомасштабних радіофізичних і геофізичних процесів в іоносферно-магнітосферній плазмі[1]. У колишньому СРСР виявлення таких явищ кваліфікувалося як відкриття.

Навчальний посібник доповнений збірником задач[2] , більшість із яких – оригінальні.

Книга написана на високому науковому й методичному рівні, без сумніву, буде сприяти підготовці нових поколінь фахівців-науковців.

---

[1] Див. про це, наприклад, роботу: Гармаш К. П. Эффекты в околоземной космической плазме, стимулированные воздействием мощного радиоизлучения / К. П. Гармаш, Л. Ф. Черногор // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. – 1998. – № 6. – С. 17–40.

[2] Див. : Лазоренко О. В. Нелинейные явления в радиофизике: Сборник задач / О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2015. – 164 с.

ПЕРЕДМОВА

Підручник являє собою допрацьований текст лекцій, що читаються студентам четвертого курсу радіофізичного факультету Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна з 1980 р. Невеликий об'єм лекцій (34 години) призвів до того, що низка питань залишилася «за кадром», а інші викладені досить конспективно.

Курс «Нелінійна радіофізика» завершує радіофізичну освіту студентів. Тому при читанні лекцій автор підручника опирався на знання студентами загальних фізико-математичних дисциплін, теоретичної фізики, а також інших радіофізичних курсів.

Перше видання навчального посібника з такою же назваю вийшло в 1998 р.

Задачі, які пропонувалися студентам на практичних заняттях і для самостійного розв'язування, увійшли в підготовлений раніше збірник (Лазоренко О. В. Нелинейные явления в радиофизике: Сборник задач / О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2015. – 64 с.).

Автор вдячний академіку В. М. Яковенку та професору С. М. Шульзі за рецензування навчального посібника.

Автор вдячний професору О. О. Третьякову, професору В. А. Свічу, а також доценту М. П. Перепечаю, без підтримки яких курс «Нелінійна радіофізика» не з'явився б на радіофізичному факультеті Харківського університету в 80-ті рр. минулого століття.

Автор вважає своїм приємним обов'язком висловити подяку колегам, які сприяли поліпшенню даного навчального посібника.

ВСТУП

Фізика була б нудна, а життя зовсім неможливим, якби всі фізичні явища навколо нас були лінійними. На щастя, ми живемо в нелінійному світі, і якщо лінеаризація прикрашає фізику, то нелінійність робить її захоплюючою[1] .

І. Р. Шен[2]

При вивченні фізики (радіофізики) спочатку обмежуються розглядом лінійних явищ, які описуються лінійними (диференціальними, інтегро-диференціальними або іншими) рівняннями. Методи розв'язання таких рівнянь досить добре розвинуті й тому більшість лінійних явищ вдається проаналізувати «до кінця». Однак при більш загальному підході виявляється, що явища природи найчастіше нелінійні, тобто описуються нелінійними рівняннями. Нелінійність є невід'ємною властивістю будь-якої системи, що еволюціонує в часі. Всякий перехід з одного рівноважного стану в інший, як правило, являє собою нелінійний процес. Прикладами таких процесів є народження й еволюція Всесвіту; утворення, існування й зникнення зірок; поява з вакууму, злиття й розпад елементарних частинок; спонтанне народження впорядкованих структур; виникнення органічного та розумного життя тощо.

До нелінійних наук належать механіка, аеро- і гідродинаміка, електродинаміка, нерівноважна термодинаміка, фізика високих енергій, фізика твердого тіла, фізика плазми, фізика атмосфери й океану, космологія та багато інших наук.

[1] Див. [5].

[2] Професор Каліфорнійського університету в Берклі, спеціаліст в області нелінійної оптики та квантової радіофізики.

Виявляється, що навколишній світ є нелінійним, при цьому багато процесів у різних науках подібні один одному. Нелінійні явища в фізиці – не виняток, а закономірність. Лінійна фізика являє собою своєрідну границю нелінійної фізики. Тому нелінійна фізика набагато «об'ємніша» за лінійну.

Патріарх російської фізики, Нобелівський лауреат із фізики 2003 р. академік В. Л. Гінзбург висловив іншу точку зору на нелінійну фізику[1] . В середині 1980-х рр. він сформулював 23 проблеми, які повинні були обумовити розвиток фізики наприкінці XX і в XXI ст. (цікаво, що їхнє число збіглося з числом знаменитих проблем Гільберта, що визначили розвиток математики в XX ст.). Серед інших проблем, наприклад, таких як проблема металевого водню, В. Л. Гінзбург назвав і нелінійну фізику, фактично розуміючи під нею тільки виникнення хаотичних коливань у простих детермінованих системах і турбулентність у гідродинаміці. Нам же такий підхід представляється занадто вузьким і невиправданим.

[1] Див. : Физика XX века. Развитие и перспективы / отв. ред. Е. П. Велихов. – М. : Наука, 1984. – С. 219–280.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ПРО НЕЛІНІЙНІ ЯВИЩА. СТРУКТУРА, ЦІЛІ ТА ЗАДАЧІ КУРСУ

Ми маємо щастя жити в складному
та дивному нелінійному світі.
Величезну, ймовірно, до цих пір не зовсім
усвідомлену, роль в його пізнанні зіграли комп'ютери,
які дозволили дослідити множену
нелінійних математичних моделей,
що описують нашу реальність.
Виник позитивний зворотній зв'язок.
Результати комп'ютерного аналізу призводять до
народження нових теорій, понять, моделей.
Вивчення цих моделей за допомогою
обчислювальних машин призводить до
народження теорій і моделей нового
покоління і т. д.[1]

У розділі коротко описано основні етапи формування уявлень про нелінійний світ, причини виникнення нелінійних явищ у науці та, зокрема, в радіофізиці. Наведена характеристика структури, цілей і задач курсу «Нелінійна радіофізика».

1.1. Основні етапи формування уявлень про нелінійний світ

Уявлення про нелінійний світ формувалося поступово. В античні часи й середньовіччя елементи нелінійності вивчалися в математиці, але були відсутні в науках про природу. У математиці були знайдені розв'язки

[1] Карица С. П. Синергетика / С. П. Капица, С. П. Хурдюмов, Г. Г. Малинецкий. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 288 с.

квадратних, кубічних, а потім і рівнянь більш високих степенів, формувалися також поняття про властивості нелінійних функцій.

Небесна механіка – перша із природничих наук, що зіткнулася ще в часи Кеплера з нелінійністю. Саме Кеплер установив, що період обертання планет залежить від їхньої кінетичної енергії орбітального руху. Проблема трьох тіл, що взаємодіють за законом всесвітнього тяжіння, – також приклад нелінійної задачі з області механіки.

У 1835 р. шотландський інженер-кораблебудівник Дж. С. Рассел виявив незвичайні, як потім стало відомо, нелінійні хвилі на воді, які він назвав *відокремленими*. До них, зокрема, належать хвилі, які генеруються на поверхні океану під час підводних землетрусів і вивержень вулканів, що одержали назву *цунамі*[1].

Математично відокремлена хвиля Рассела описана в 1895 р. Кортевегом і де Врізом.

Ще в середині XIX ст. фізики зіткнулися з іншим яскравим прикладом нелінійних хвиль – ударними хвилями в газах і рідинах.

Уже на початку XX ст. стало ясно, що багато задач гідродинаміки, акустики й аеродинаміки є *нелінійними*.

Приблизно в цей же час ставляться й розв'язуються задачі радіотехніки, що зароджується (такі як генерація, змішування, детектування коливань). Одним із піонерів *нелінійної радіотехніки* (та й теорії коливань) є Ван-Дер-Поль. В 20–30-ті рр. минулого століття з'являється радянська школа «нелінійних радіотехніків». Її виникнення пов'язане з діяльністю одного з перших радянських радіофізиків – Л. І. Мандельштама.

У 1930–1940-х рр. виявлені й вивчені явища крос-модуляції й само-модуляції в іоносфері Землі при поширенні в ній потужних радіохвиль середньохвильового й довгохвильового діапазонів.

До Другої світової війни нелінійні задачі в різних галузях науки представлялися специфічними й розв'язувалися кожна своїм методом. Після створення теорії нелінійних коливань почали проявлятися загальні закономірності в нелінійних процесах, поступово з'явилася «*нелінійна мова*», «*нелінійний досвід*» і стало формуватися «*нелінійне мислення*». Різні науки й задачі техніки почали збагачувати одна одну. Була встановлена спільність моделей нелінійних явищ і методів їхнього аналізу.

[1] Див. : Черногор Л. Ф. Физика и экология катастроф / Л. Ф. Черногор. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2012. – 556 с.

Значна розмаїтість нелінійних явищ була виявлена в 40-ві й 50-ті рр. XX ст. у зв'язку з роботами зі створення ядерної зброї, над- і гіперзвукової авіації, ракетно-космічної техніки.

Великий вплив на вивчення нелінійних явищ мала розробка електронно-обчислювальної техніки. Уже на рубежі 40–50-х рр. XX ст. у США було виявлено в числовому експерименті *явище Фермі – Пасти – Улама*, що зводиться до виникнення незгасаючих відокремлених хвиль у системі зв'язаних нелінійних маятників.

Інший фундаментальний результат числових експериментів належить до виявлення незвичайної поведінки нелінійних відокремлених хвиль. Ці хвилі після взаємодії розходилися, не змінивши своїх параметрів, що нагадувало пружні зіткнення куль або частинок. З цієї причини автори цього результату назвали таку відокремлену хвилю *солітоном* (Забуський, Крускал, 1965). Таким чином у науку було введене нове фундаментальне поняття. Солітон відіграє в нелінійній фізиці таку ж всеосяжну роль, як осцилятор у класичній фізиці. Його прикладами можуть слугувати чорні діри в астрофізиці, Велика Червона Пляма в атмосфері Юпітера, кульова блискавка, циклони, цунамі, електричні домени Ганна, монополь Дірака й ін.

У 1960-ті рр. з'явилися або отримали розвиток такі науки, як *нелінійна оптика* (*нелінійна квантова радіофізика*), *нелінійна акустика*, *нелінійна фізика плазми*, *нелінійна фізика напівпровідників*, *фізика високих енергій*, *нелінійна термодинаміка* й ін.

У 1960–2010-ті рр. інтенсивно вивчається вплив потужного радіо-випромінювання на навколоземну космічну плазму. Навколоземний космос перетворився у своєрідну *«нелінійну» лабораторію*.

З 60-х рр. минулого століття ведуть свій відлік такі напрямки в науці, як *детермінований хаос* і *синергетика*. Остання, будучи міждисциплінарною наукою, описує зародження порядку з хаосу.

У цей час нелінійна фізика (радіофізика) бурхливо розвивається. Незважаючи на це, ми ще дуже мало знаємо про нелінійні явища, але ще менше вміємо їх використовувати.

1.2. Причини виникнення нелінійних явищ

Механізми нелінійних явищ природно залежать від специфіки досліджуваного процесу. Однак в одному досить загальному випадку можна вказати *універсальну причину*. Нелінійність з'являється, якщо процес

характеризується порівняно великим *енерговмістом (енерговиділенням)*, відносно *високими швидкостями*, *температурами* й т. п. Звичайно, достатньо ввести в розгляд густину енергії вимушуючого джерела, w_s й густину енергії w_p досліджуваного процесу. Нелінійні явища стають істотними при $w_s \geq w_p$ і визначальними при $w_s \gg w_p$. Лінійним розглядом можна обмежитися при $w_s \ll w_p$.

У радіофізиці, в теорії коливань і хвиль зручніше використовувати амплітуду A збурюючої середовище хвилі (коливання) і характерну *амплітуду* A_c, що описує даний процес. Тоді лінійна теорія застосовується при $A \ll A_c$, якщо ж $A \geq A_c$, і тим більше $A \gg A_c$, необхідно розв'язувати нелінійну задачу.

Таким чином, лінійний розгляд можливий, якщо є малий параметр типу:

$$\mu = \frac{w_s}{w_p}, \qquad \mu = \frac{A}{A_c}\ .$$

У цьому випадку вихідні рівняння лінеаризуються за малим параметром (або їхньою сукупністю). Отже, лінійна теорія – це граничний випадок нелінійної теорії, коли $\mu \to 0$. Тому ясно, що фізика нелінійних процесів повинна бути значно «об'ємніша» за фізику лінійних явищ.

Точно кажучи, нелінійністю не можна нехтувати навіть при $A \ll A_c$ або $\mu \ll 1$. Наприклад, якщо слабка хвиля ($A \ll A_c$) поширюється в середовищі, яке можна розглядати як недисипативне недиспергуюче, то при проходженні досить великого шляху нелінійні ефекти накопичуються й стають визначальними. Тому недисипативне недиспергуюче середовище достатньої довжини в цілому має розглядатися як нелінійне. Дисперсія й дисипація перешкоджають нелінійним спотворенням. Дійсно, наявність дисипації може призвести до поглинання хвилі ще до того, як позначиться нелінійність. За рахунок дисперсії фазові співвідношення між гармоніками швидко змінюються в просторі, тому прогресивного збагачення спектра й помітного спотворення профілю хвилі в результаті нелінійності не відбувається.

Звідки з'являється нелінійність у радіофізиці? Справа в тому, що у вакуумі рівняння Максвелла й, як наслідок, хвильове рівняння – лінійні. При поширенні досить сильних ($A \geq A_c$) електромагнітних хвиль у середовищах

може виникнути залежність відносних тензорів діелектричної проникності $\hat{\varepsilon}$ й магнітної проникності $\hat{\mu}$, а також провідності середовища $\hat{\sigma}$ від амплітуди поля хвилі, тобто

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(E, H);$$
$$\hat{\mu} = \hat{\mu}(E, H);$$
$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(E, H).$$

У цьому курсі обмежимося випадком

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(E);$$
$$\hat{\mu} = 1;$$
$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(E).$$

1.3. Структура, мета й задачі курсу

Курс складається зі вступу, семи розділів і висновків.

У вступі визначається місце нелінійної радіофізики серед інших нелінійних наук.

Перший розділ присвячений опису основних етапів формування уявлень про нелінійний світ, причини виникнення нелінійних явищ, характеристиці структури, цілей і задач курсу.

У другому розділі вивчаються основи нелінійної електродинаміки, тобто методи розв'язання нелінійного хвильового рівняння, точні розв'язки рівнянь Максвелла, ефекти самовпливу й взаємодії електромагнітних хвиль, нестійкості, а також стаціонарні хвилі й солітони.

Третій розділ присвячений деяким нелінійним ефектам у квантовій радіофізиці.

У четвертому розділі розглядаються нелінійні явища в газорозрядній і твердотільній плазмі (плазмовій радіофізиці).

У п'ятому розділі вивчаються нелінійні процеси в навколоземній космічній плазмі.

У шостому розділі подаються основні поняття про методи розв'язання нелінійних задач статистичної радіофізики.

Сьомий розділ присвячений двом актуальним проблемам нелінійної радіофізики – можливості виникнення хаосу в детермінованих системах і самоорганізації.

У висновках підведено підсумки курсу.

Метою курсу є опис основних ефектів і процесів у нелінійній радіофізиці. Для з'ясування спільності явищ природи наводяться численні приклади із суміжних наук. Курс повинен сприяти *формуванню нелінійного мислення й нелінійного світогляду*.

Студент повинен знати:

– причини й механізми виникнення, методи опису нелінійних явищ;

– основні нелінійні явища, що виникають у різних розділах сучасної радіофізики;

– місце й роль нелінійних ефектів у радіофізиці, фізиці й інших науках, у техніці та технологіях.

Студент повинен уміти:

– оцінювати можливість виникнення нелінійних явищ у різних задачах радіофізики;

– якісно й кількісно описувати основні нелінійні явища, що виникають при поширенні сильних електромагнітних хвиль у середовищах.

Вивченню курсу повинні допомогти книги, перелік яких представлений у списку літератури.

Питання для самоконтролю

1. Поясніть, чому нелінійність – закономірність, а не виключення.
2. Опишіть основні етапи формування уявлень про нелінійний світ.
3. Чому важливе урахування нелінійності?
4. Опишіть причини виникнення нелінійності в радіофізиці.
5. Що повинен знати читач, який вивчив книгу «Нелінійна радіофізика»?
6. Що повинен уміти читач, який вивчив книгу «Нелінійна радіофізика»?

РОЗДІЛ 2. НЕЛІНІЙНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

... Не можна рухатися далі, не обговоривши попередньо деякі фізичні проблеми. Початковий розвиток теорії пов'язаний з нелінійними явищами в газах і утворенням ударних хвиль...

Дж. Уізем[1]

... Найцікавішим явищем, що описується лише нелінійною теорією, виявляються ударні хвилі, що представляють собою різкі стрибки тиску, густини і швидкості...

Дж. Уізем[2]

У цьому розділі розглядаються основні нелінійні ефекти, що виникають при поширенні сильних електромагнітних хвиль у середовищах. Приділено увагу методам нелінійної електродинаміки, самовпливу й взаємодії хвиль, нелінійним стаціонарним хвилям (ударним хвилям, відокремленим хвилям, солітонам), а також генерації нестійкостей [1, 4, 8, 10, 39, 41].

2.1. Якісна картина нелінійних явищ

Нелінійність матеріальних рівнянь призводить до нелінійності рівнянь теорії електромагнітного поля (хвильового рівняння). На відміну від лінійної електродинаміки, у нелінійній електродинаміці *несправедливий принцип суперпозиції*. Будь-які дві хвилі тепер поширюються не незалежно. Це ж відноситься й до більшого числа хвиль. Виникає *нелінійна взаємодія* хвиль за допомогою середовища, у якому вони поширюються. Зокрема, має місце перенесення модуляції від однієї хвилі до іншої (явище *перехресної модуляції*, або *крос-модуляції*).

[1] Див. [29].
[2] Див. [29].

Отже, в нелінійній теорії несправедливий принцип суперпозиції. А що маємо замість нього? Нічого. Говорять, що термін *нелінійний* позначає заперечення й не має конструктивізму[1]. Це ж можна сказати й про термін *нелінійність*.

Продовжимо опис якісної картини нелінійних явищ. Хвиля, що створює збурення в середовищі, зазнає їх на собі. Так виникає *самовплив* хвиль. Залежність показника поглинання хвилі κ від її амплітуди A спричиняє збільшення або зменшення поглинання порівняно з лінійною теорією. Ці ефекти називаються відповідно *помутнінням* або *просвітлінням середовища*.

Залежність показника заломлення n від A призводить до зміни фазової швидкості хвилі й до появи нелінійної добавки до фази $\Delta\varphi$. Якщо до того ж $n = n(A(t))$ змінюється в часі, то виникає доплерівський зсув частоти (*нелінійний ефект Доплера*):

$$\Delta\omega = -\frac{d\Delta\varphi}{dt}.$$

В анізотропних середовищах має місце подвійне променезаломлення, тому що показники заломлення нормальних хвиль (звичайної й незвичайної) нерівні, тобто $n_1 \neq n_2$. У нелінійній теорії також нерівні нелінійні добавки до них, тобто $\Delta n_1 \neq \Delta n_2$. Це призводить до додаткового повороту еліпса (площини) поляризації хвиль, що називається *нелінійним ефектом Фарадея*.

Залежність швидкості хвилі від її амплітуди стає причиною *нелінійного укручення* профілю хвилі.

Для потужних пучків хвиль залежність $n(A)$ призводить до того ж до *просторового фокусування* або *дефокусування пучка*.

Нелінійність середовища викликає генерацію хвиль на *комбінаційних частотах* ($n\omega_1 \pm m\omega_2; n, m \in \mathbb{N}$), а також *кратних частотах* $n\omega, n \in \mathbb{N}$).

При впливі сильних хвиль може виникнути експоненціальне зростання амплітуди коливань, що призводить до генерації *нестійкостей*.

Питання для самоконтролю

1. Опишіть якісну картину нелінійних явищ у радіофізиці.
2. Чому нелінійність не має властивості конструктивізму?

[1] Конструктивізм припускає умови для развитку наступних ідей (формулювання правил, теорем, створення теорій).

3. Що таке нелінійна взаємодія електромагнітних хвиль?
4. Що таке самовплив електромагнітних хвиль?
5. Чому виникає нелінійний ефект Доплера?
6. Чому виникає нелінійний ефект Фарадея?
7. Як виникає нелінійне фокусування (дефокусування) пучків електромагнітних хвиль?
8. Що відбувається з потужними радіоімпульсами в нелінійному середовищі?

2.2. Нелінійні рівняння електродинаміки

Пара роторних рівнянь Максвелла має вигляд:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \tag{2.2.1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{2.2.2}$$

де $\vec{D}=\hat{\varepsilon}_a(E)\vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$, $\hat{\varepsilon}_a = \hat{\varepsilon}\varepsilon_0$, ε_0 і μ_0 – електрична й магнітна сталі. Далі отримаємо з (2.2.1) і (2.2.2) нелінійне хвильове рівняння.

2.2.1. Точний розв'язок нелінійних рівнянь електродинаміки

Припустимо, що середовище ізотропне, недиспергуюче, недисипативне. Хвилю будемо вважати сильною. Нехай вона поширюється вздовж осі *x*, а електричне й магнітне поля спрямовані відповідно по осях *y* і *z* (рис. 2.1).

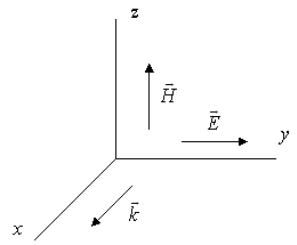


Рис. 2.1. Геометрія задачі

Тоді рівняння (2.2.1) і (2.2.2) зводяться до таких:

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial D}{\partial t}, \tag{2.2.3}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}. \qquad (2.2.4)$$

Це випливає з роторних рівнянь Максвелла в даній системі координат:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{i}\,\frac{\partial H}{\partial y} - \vec{j}\,\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\vec{i}\,\frac{\partial E}{\partial z} + \vec{k}\,\frac{\partial E}{\partial x},$$

де $\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial z} = 0$. Вектор $\vec{D}$ спрямований по осі y. Обчислимо спочатку

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{dD}{dE}\frac{\partial E}{\partial t} \equiv \varepsilon_a(E)\frac{\partial E}{\partial t}, \qquad (2.2.5)$$

де за визначенням

$$\varepsilon_a(E) = \varepsilon_0\varepsilon(E) = \frac{dD}{dE}.$$

У лінійній теорії поле H пропорційне E. Природно припустити, що для нелінійної хвилі $H = H(E)$. Тоді

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{dH}{dE}\frac{\partial E}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{dB}{dE}\frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0\frac{dH}{dE}\frac{\partial E}{\partial t}. \qquad (2.2.6)$$

Підставляючи (2.2.5) і (2.2.6) в (2.2.3) і (2.2.4), одержимо

$$-\frac{dH}{dE}\frac{\partial E}{\partial x} - \varepsilon_a\frac{\partial E}{\partial t} = 0, \qquad (2.2.7)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \mu_0\frac{dH}{dE}\frac{\partial E}{\partial t} = 0. \qquad (2.2.8)$$

Система лінійних рівнянь (2.2.7) і (2.2.8) для $\frac{\partial E}{\partial x}$ і $\frac{\partial E}{\partial t}$ – однорідна. Вона має нетривіальний розв'язок, якщо визначник системи дорівнює 0, тобто

$$\begin{vmatrix} -\frac{dH}{dE} & -\varepsilon_a \\ 1 & \mu_0\frac{dH}{dE} \end{vmatrix} = -\mu_0\left(\frac{dH}{dE}\right)^2 + \varepsilon_a = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{dH}{dE} = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon_a(E)}{\mu_0}}. \qquad (2.2.9)$$

Розв'язок (2.2.9) має вигляд

$$H(E) = \pm\int_0^E \sqrt{\frac{\varepsilon_a(E)}{\mu_0}}dE. \qquad (2.2.10)$$

Для знаходження $E(t,x)$ звернемося до рівняння (2.2.7). З урахуванням (2.2.9) воно прийме вигляд:

$$\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_0}}\frac{\partial E}{\partial x} + \varepsilon_a\frac{\partial E}{\partial t} = 0. \qquad (2.2.11)$$

Нелінійні рівняння в частинних похідних першого порядку доцільно розв'язувати методом характеристик. Коротко суть його полягає в такому. Для рівняння вигляду

$$f_1(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + f_2(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

рівняння характеристик, тобто сімейства ліній, що покривають поверхню $z = z(x,y)$, має вигляд

$$\frac{dx}{f_1(x,y)} = \frac{dy}{f_2(x,y)} = \frac{dz}{0}.$$

Тоді розв'язок (2.2.11) запишеться так:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{\pm\sqrt{\varepsilon_a\mu_0}} = \frac{dE}{0},$$

або ж

$$\frac{dx}{dt} = \pm\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}},$$

де $c = (\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})^{-1}$ – швидкість світла у вакуумі.

Звідси

$$x = \pm\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}t + C(E), \qquad (2.2.12)$$

де $C(E)$ – довільна функція, вид якої встановлюється з початкових і граничних умов. З (2.2.12) випливає, що

$$C(E) = x \mp \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}t, \quad \varepsilon = \varepsilon(E).$$

Уводячи зворотну функцію C^{-1}, розв'язок представимо у вигляді

$$E(t,x) = C^{-1}\left(x \mp \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(E(t,x))}}t\right) \equiv f\left(x \pm \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(E(t,x))}}t\right). \qquad (2.2.13)$$

Два знаки в розв'язку відповідають двом напрямкам поширення хвилі. Рівняння (2.2.13) описує поширення нелінійних хвиль. Хвиля поширюється з фазовою швидкістю

$$u(E) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(E)}}.$$

Важливо, що u залежить від E. Тому в міру поширення профіль хвилі спотворюється. Звичайно $\varepsilon(E)$ убуває з ростом E (залежність $\varepsilon(E)$ прагне до насичення). Тоді частини профілю з більшим значенням E біжать швидше,

у результаті чого збільшується крутість переднього фронту (рис. 2.2). Якщо ж $\varepsilon(E)$ зростає зі зростанням E, то деформується задній фронт.

$t = 0$ $t = t_1 > 0$ $t = t_2 > t_1$ $t = t_3 > t_2$

Рис. 2.2. Спотворення профілю нелінійної хвилі (наприклад, на поверхні води). Для електромагнітних хвиль ситуації, показані для $t = t_2$ і $t = t_3$, – неможливі

2.2.2. Нелінійне хвильове рівняння

Продиференцюємо (2.2.1) за часом і прийдемо до виразу:

$$\mathrm{rot}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}. \qquad (2.2.14)$$

Підставивши з (2.2.2) $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\vec{E}$ в (2.2.14), отримаємо

$$\mathrm{rot\ rot}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}. \qquad (2.2.15)$$

Оскільки

$$\mathrm{rot\ rot}\vec{E} = \mathrm{grad\ div}\vec{E} - \Delta\vec{E},$$

а $\mathrm{div}\vec{E} = 0$ для поперечних хвиль ($\vec{E} \perp \vec{k}$, $\vec{k}$– хвильовий вектор), то з (2.2.15) випливає

$$\Delta\vec{E} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}. \qquad (2.2.16)$$

Нехтуючи генерацією кратних частот, для монохроматичної хвилі замінимо $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ на $(i\omega)^2 = -\omega^2$ і з (2.2.16) отримаємо:

$$\Delta\vec{E} = -\omega^2\mu_0\vec{D}$$

або

$$\Delta\vec{E} = -\omega^2\mu_0\hat{\varepsilon}_a\vec{E}. \qquad (2.2.17)$$

Представимо $\hat{\varepsilon}_a(E)$ у вигляді

$$\hat{\varepsilon}_a = \hat{\varepsilon}(E)\varepsilon_0 = \varepsilon_0\big(\hat{\varepsilon}_L + \hat{\varepsilon}_{NL}(E)\big),$$

де $\hat{\varepsilon}_{NL}$ – нелінійна добавка до лінійного тензору $\hat{\varepsilon}_L$, і перепишемо (2.2.17) з врахуванням того, що $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$:

$$\Delta\vec{E} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon}_L\vec{E} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon}_{NL}(E)\vec{E}. \qquad (2.2.18)$$

Співвідношення (2.2.18) називається *нелінійним хвильовим рівнянням*. Воно переходить у лінійне хвильове рівняння при $\hat{\varepsilon}_{NL} = 0$.

Питання для самоконтролю

1. Отримайте та проаналізуйте точний розв'язок рівнянь нелінійної електродинаміки. За яких обмежень удається знайти точний розв'язок?
2. Поясніть, чому виникає ефект укручення профілю хвилі?
3. Отримайте нелінійне хвильове рівняння.

Задачі

1. Вважаючи середовище ізотропним, недиспергуючим і без дисипації, отримайте точний розв'язок рівнянь електродинаміки, розрахуйте u, E і H для

$$\varepsilon(E) = \varepsilon_0(1 + \alpha E)^2.$$

Вважати, що до падіння хвилі на середовище ($x < 0$, $t < 0$)

$$\vec{E}(0) = \vec{E}_0 \cos k_0(x - ct).$$

2. Вважаючи середовище ізотропним, недиспергуючим і без дисипації, отримайте точний розв'язок рівнянь електродинаміки, розрахуйте u, E і H для

$$\vec{D} = \int_0^E (1 + \alpha\vec{E}^2)^2 d\vec{E}.$$

Вважати, що до падіння хвилі на середовище ($x < 0$, $t < 0$)

$$\vec{E}(0) = \vec{E}_0 \cos k_0(x - ct).$$

2.3. Методи нелінійної електродинаміки

Найчастіше аналітичні методи нелінійної радіофізики базуються на використанні малого параметра. Вдалий вибір малого параметра дозволяє побудувати метод розв'язання нелінійної задачі.

Нижче описані найпоширеніші методи розв'язання таких задач в електродинаміці (див. також [6, 26]).

У якості вихідного візьмемо нелінійне хвильове рівняння (2.2.18):

$$\Delta\vec{E} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon}_L \vec{E} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon}_{NL}(E)\vec{E}\,. \qquad (2.3.1)$$

2.3.1. Метод малих збурень

Цей метод застосовується в тому разі, якщо нелінійність слабка, тобто поле незначно відрізняється від поля в лінійній теорії. В якості малого параметру можна прийняти

$$\mu = \left|\frac{\varepsilon_{NL}}{\varepsilon_L}\right|,$$

де під ε_{NL} і ε_L розуміють відповідні компоненти тензора. Тоді розв'язок (2.3.1) шукається у вигляді:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots, \qquad (2.3.2)$$

де $\vec{E}_i \sim \mu^i, i \in \mathrm{N}$. Підставляючи (2.3.2) в (2.3.1) і прирівнюючи члени однакового порядку малості, одержимо нескінченну систему рівнянь:

$$\Delta\vec{E}_0 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon}_L \vec{E}_0 = 0\,, \qquad (2.3.3)$$

$$\Delta\vec{E}_1 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon}_L \vec{E}_1 = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon}_{NL}(E_0)\vec{E}_0\,, \qquad (2.3.4)$$

$$\Delta\vec{E}_2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon}_L \vec{E}_2 = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon}_{NL}(E_1)\vec{E}_1\,, \qquad (2.3.5)$$

і т. д.

Особливості методу малих збурень полягають у такому:

– кожне вищерозташоване рівняння розв'язується незалежно від розташованих нижче; це означає, що рівняння (2.3.3) розв'язується незалежно від інших і дає поле в лінійній теорії; рівняння (2.3.4) використовує розв'язок рівняння (2.3.3), але розв'язується незалежно від (2.3.5) і т. д.;

– метод дозволяє знайти розв'язок з будь-якою наперед заданою точністю;

– всі рівняння вигляду (2.3.3), (2.3.4) і т. д. є лінійними, причому перше з них однорідне, а інші неоднорідні, тобто із джерелом або вимушуючою силою, в якості такої сили виступає поле попереднього порядку малості;

– метод застосовується при досить слабкому полі хвилі, що призводить до малої нелінійності.

2.3.2. Метод повільних амплітуд

Ідея методу запозичена з теорії нелінійних коливань. Розглянемо спочатку одновимірну задачу. Нехай хвиля поширюється вздовж осі x. Тоді (2.3.1) зводиться до рівняння:

$$\frac{d^2E}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_L E = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{NL}(E)E\,, \qquad (2.3.6)$$

де під E розуміють компонент електричного поля. Для простоти середовище далі будемо вважати ізотропним (тобто ε_L, ε_{NL} – скаляри). Розв'язок (2.3.6) шукаємо у вигляді

$$E(x) = A(x)e^{-i\Phi}\,, \qquad \Phi = \int_0^x k(x)dx\,, \qquad (2.3.7)$$

де $k = \Phi'$ – хвильове число, $A(x)$ – амплітуда, що повільно змінюється. Критерієм повільності є мала відносна зміна A на відстані порядку довжини хвилі λ:

$$\mu = \left|\frac{\lambda}{A}\frac{dA}{dx}\right| \ll 1.$$

Поле E (або A) вважаємо як завгодно великим, але $\left|\varepsilon_{NL}/\varepsilon_L\right| \sim \mu$. Підстановка (2.3.7) в (2.3.6) дає

$$\left(\frac{d^2A}{dx^2} - i\Phi''A - 2ik\frac{dA}{dx} - k^2A\right)e^{-i\Phi} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_L A e^{-i\Phi} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{NL} A e^{-i\Phi}\,.$$

Важливо, що ε_{NL} залежить лише від модуля поля, тому $\varepsilon_{NL} = \varepsilon_{NL}(|A|)$. Скорочуючи на експоненту, що відрізняється від нуля, і прирівнюючи члени однакового порядку малості, одержимо:

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_L\,, \qquad (2.3.8)$$

$$2ik\frac{dA}{dx} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{NL}\left(|A|\right)A - i\Phi''A\,, \qquad (2.3.9)$$

де $\Phi'' = k'$. (Член d^2A/dx^2 – другого порядку малості.)

Рівняння (2.3.8) являє собою дисперсійне співвідношення:

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_L}\,.$$

Тоді

$$k' = \frac{\omega}{c}\frac{\varepsilon'_L}{2\sqrt{\varepsilon_L}}\,.$$

Вираз (2.3.9), переписаний у вигляді

$$\frac{d\tilde{A}}{dx} = -i\frac{\omega}{c}\frac{\varepsilon_{NL}\left(|\,\tilde{A}\,|\right)}{2\sqrt{\varepsilon_0}}\tilde{A} - \frac{\varepsilon'_L}{4\varepsilon_L}\tilde{A}\,, \qquad (2.3.10)$$

називається *вкороченим рівнянням* для комплексної амплітуди. (Це диференціальне рівняння першого, а не другого порядку, як вихідне хвильове рівняння). Знак ~ введений для того, щоб підкреслити комплексний характер.

Якщо втрати в системі відсутні, то для

$$\tilde{A}(x) = A(x)e^{-ik\psi_{NL}(x)},$$

де $\psi_{NL}(x)$ – так званий *нелінійний ейконал* або нелінійний фазовий шлях ($k\psi$ – фазовий набіг), маємо:

$$\frac{dA}{dx} = 0\,, \qquad (2.3.11)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_{NL}(A)}{\varepsilon_0}\,. \qquad (2.3.12)$$

З (2.3.11) випливає, що

$$A(x) = A_0\,,$$

де $A(0) = A_0$. Якщо втрат немає, амплітуда хвилі не змінюється. Тоді з (2.3.12) маємо:

$$\psi_{NL} = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\varepsilon_{NL}(A)}{\varepsilon_L}dx\,,$$

або для однорідного середовища

$$\psi_{\mathrm{NL}}(x) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_{NL}}{\varepsilon_L}x\,.$$

У лінійній теорії $\varepsilon_{NL} = 0,\ \psi_{NL} = 0$.

Якщо ж слабко неоднорідне середовище з поглинанням, то з (2.3.10) можна одержати вкорочене рівняння для дійсної амплітуди у вигляді

$$\frac{dA}{dx} + \alpha(A)A = 0\,, \qquad (2.3.13)$$

справедливе подалі від області відбивання хвилі. Тут $\alpha(A)$ – нелінійний коефіцієнт поглинання хвилі, що залежить від ε_L і $\varepsilon_{NL}(A)$.

Зі співвідношення (2.3.10) знаходяться також рівняння для нелінійної добавки до фази

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \frac{\omega}{c}\int_0^x (\,n(A) - n_0\,)\,dx\,, \qquad (2.3.14)$$

де φ_0 і n_0 – фаза хвилі й показник заломлення в лінійній теорії, φ і n – те ж в нелінійній теорії. Якщо n_0 залежить тільки від ε_L, то n залежить і від ε_L, і від ε_{NL}.

2.3.3. Метод нелінійної квазіоптики

Будемо вважати, що тривимірний пучок хвиль поширюється вздовж осі x. Для ізотропного середовища хвильове рівняння має вигляд:

$$\Delta E + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_L E = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{NL}\left(\left|E\right|\right)E\,. \qquad (2.3.15)$$

Розв'язок (2.3.15) шукається у вигляді (див., наприклад, [1, 3, 14])

$$E(x,y,z) = A(x,y,z)e^{-i\Phi},$$

причому

$$\left|\frac{\lambda}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\right| \sim \mu\,, \qquad \left|\frac{\lambda}{A}\frac{\partial A}{\partial y}\right| \sim \left|\frac{\lambda}{A}\frac{\partial A}{\partial z}\right| \sim \mu^{\frac{1}{2}}.$$

Ці умови означають, що в поперечному (далі індекс $\perp$) відносно осі x напрямку амплітуда змінюється значно швидше, ніж у поздовжньому напрямку. Ця властивість зазвичай притаманна пучкам (лазерним пучкам, діаграмам спрямованості антен і т. д.). Як і для одновимірного випадку, в тривимірному випадку відносні зміни амплітуди A малі на довжині $\sim \lambda$. Оскільки

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_\perp\,,$$

то

$$\Delta E = \left(\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - i\Phi'' A - 2ik\frac{\partial A}{\partial x} - k^2 A\right) + \Delta_\perp A\right)e^{-i\Phi}.$$

Тоді рівняння (2.3.15) прийме вигляд:

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - i\Phi'' A - 2ik\frac{\partial A}{\partial x} - k^2 A + \Delta_\perp A + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_L A\right)e^{-i\Phi} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{NL}\left(|A|\right)A e^{-i\Phi}.$$

Звідси для величин нульового й першого порядку малості маємо:

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_L, \tag{2.3.16}$$

$$2ik\frac{\partial A}{\partial x} = \Delta_\perp A + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{NL}\left(|A|\right)A - i\Phi'' A. \tag{2.3.17}$$

Рівняння (2.3.16) є дисперсійним співвідношенням, а вираз (2.3.17) – основним рівнянням у нелінійній квазіоптиці. Термін «квазіоптика» припускає малість λ, що забезпечує малість μ.

При $\varepsilon_{NL} = 0$ рівняння (2.3.17) переходить у так зване *параболічне рівняння*, що описує дифракцію пучків.

2.3.4. Рівняння ейконалу й переносу

Рівняння (2.3.17) – комплексне. Часто при його розв'язанні зручно перейти до дійсних функцій

$$\tilde{A}(x,y,z) = A(x,y,z)e^{-ik\psi}, \tag{2.3.18}$$

де $\tilde{A}$ і A – комплексна й дійсна амплітуди, ψ – ейконал. Підставляючи (2.3.18) в (2.3.17) і розділяючи дійсну й уявну частини рівняння, одержимо:

$$2\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\nabla_\perp \psi\right)^2 = \frac{\varepsilon_{NL}}{\varepsilon_L} + \frac{\Delta_\perp A}{k^2 A}, \tag{2.3.19}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \nabla_\perp A \nabla_\perp \psi + \frac{1}{2}A_0 \Delta_\perp \psi = 0. \tag{2.3.20}$$

Співвідношення (2.3.19) і (2.3.20) називають відповідно *рівнянням ейконалу* й *рівнянням переносу*. Перше з них описує зміну фази, друге – амплітуди хвилі. У дійсності ці рівняння пов'язані між собою й відносяться до нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Розв'язок (2.3.19) і (2.3.20) пов'язаний із серйозними труднощами.

2.3.5. Метод нелінійної геометричної оптики

У цьому випадку $\lambda \to 0$, тобто $k \to \infty$. Тоді рівняння (2.3.19) трохи спроститься й прийме вигляд:

$$2\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\nabla_\perp \psi\right)^2 = \frac{\varepsilon_{NL}}{\varepsilon_L}. \tag{2.3.21}$$

Це рівняння справедливе, якщо можна знехтувати дифракційними ефектами.

Питання для самоконтролю

1. Перерахуйте методи нелінійної електродинаміки.
2. У чому суть методу малих збурень? В чому є його переваги та недоліки?
3. У чому суть методу повільних амплітуд? В чому є його переваги та недоліки?
4. У чому суть методу нелінійної квазіоптики? В чому є його переваги та недоліки?
5. У чому суть методу нелінійної геометричної оптики? В чому є його переваги та недоліки?

2.4. Самовплив і взаємодія плоских електромагнітних хвиль

При поширенні сильних електромагнітних хвиль діелектрична проникність починає залежати від амплітуди хвилі. Остання ніби сама собі формує умови поширення. У цьому складається суть явища самовпливу хвиль, у результаті якого змінюються їхні характеристики (амплітуда, фаза, частота, поляризація, спектральний склад і т. п.). (Докладніше про це див., наприклад, в [4, 8, 34, 41]).

Розглянемо спочатку ефект амплітудного самовпливу, що викликаний залежністю уявної частини ε (або коефіцієнта поглинання α) від A.

2.4.1. Амплітудний самовплив хвилі

Укорочене рівняння для дійсної амплітуди хвилі має вигляд (2.3.13):

$$\frac{dA}{dx} + \alpha(A)A = 0,\ A(0) = A_0. \tag{2.4.1}$$

До нього необхідно додати закон зміни $\alpha(A)$, що залежить від конкретного механізму нелінійності. Спочатку запишемо розв'язок (2.4.1) у загальному вигляді. Після розділення змінних маємо:

$$\frac{dA}{\alpha(A)A} = -dx \tag{2.4.2}$$

або

$$\frac{\alpha_0}{\alpha(A)}\frac{dA}{A} = -\alpha_0 dx.$$

Звідси, з урахуванням граничної умови, одержимо розв'язок задачі (2.4.1) у неявному вигляді:

$$\int\limits_{A_o}^{A(x)} \frac{\alpha_0}{\alpha(A)}\frac{dA}{A} = -k_0, \tag{2.4.3}$$

де $k_0 = \alpha_0 x$ – інтегральний коефіцієнт поглинання в лінійному середовищі з коефіцієнтом поглинання хвилі α_0.

Далі для визначеності покладемо

$$\alpha(A) = \alpha_0\left(1 + \frac{A^2}{A_c^2}\right)^{\delta}, \tag{2.4.4}$$

де A_c – характерна амплітуда поля хвилі, що є мірою нелінійності. Очевидно, що при $A^2 \ll A_c^2$ маємо $\alpha \approx \alpha_0$, тобто нелінійні ефекти несуттєві.

Модель (2.4.4) зручна й тим, що вона описує так звану квадратичну нелінійність, що часто зустрічається в різних електродинамічних задачах. Крім того, знак при δ відповідає випадкам $\alpha < \alpha_0$ і $\alpha > \alpha_0$ (при $\delta = 0$ має місце поширення лінійної хвилі з $\alpha = \alpha_0$).

Підстановка (2.4.4) в (2.4.3) дає:

$$\int\limits_{A_0}^{A} \frac{dA}{A\left(1 + A^2/A_c^2\right)^{\delta}} = -k_0. \tag{2.4.5}$$

Далі розглянемо два випадки.

Нехай $\alpha < \alpha_0$, тобто $\delta < 0$. Покладемо для простоти $\delta = -1$. Тоді (2.4.5) зводиться до виразу

$$\int\limits_{A_0}^{A}\left(\frac{1}{A} + \frac{A}{A_c^2}\right)dA = -k_0.$$

Виконуючи інтегрування, одержимо

$$\ln\frac{A}{A_0} + \frac{1}{2}\frac{A^2 - A_0^2}{A_c^2} = -k_0,$$

або ж

$$A\,e^{A^2/2A_c^2} = A_0 e^{A_0^2/2A_c^2} e^{-k_0}.$$

У глибині середовища $k_0 \gg 1$ і $A \to 0$. Тоді

$$A \approx A_0 e^{A_0^2/2A_c^2} e^{-k_0}. \tag{2.4.6}$$

У лінійній теорії

$$A_L = A_0 e^{-k_0}. \tag{2.4.7}$$

Для кількісної характеристики процесу амплітудного самовпливу введемо множник самовпливу

$$P_A = \frac{A}{A_L}.$$

Тоді з (2.4.6) і (2.4.7) випливає, що

$$P_A = e^{A_0^2/2A_c^2},\ k_0 \gg 1.$$

Якщо на границі середовища хвиля була дуже сильною ($A_0^2 \gg A_c^2$), то $P_A \gg 1$. Хоча в глибині середовища ($k_0 \gg 1$) хвиля уже слабка ($A^2 \ll A_c^2$), тут ефект самовпливу виражений найбільш помітно. Справа в тому, що хвиля ніби «пам'ятає», що на границі й поблизу неї ($k_0 \le 1$) вона була сильною.

Таким чином, на границі середовища ефект самовпливу відсутній ($P_A = 1$), а в глибині середовища він максимальний. Це пов'язано з інтегральною природою ефекту (рис. 2.3).

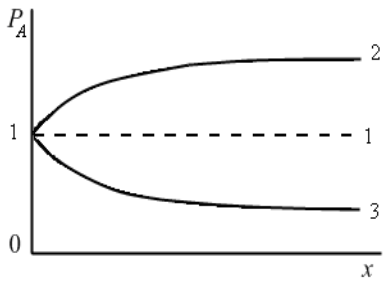


Рис. 2.3. Залежність множника самовпливу від пройденого хвилею шляху:
1 – лінійна теорія;
2 – ефект просвітління середовища;
3 – ефект помутніння середовища

Випадок, коли $A > A_L$ або $P_A > 1$, називається *ефектом просвітління* середовища. Просвітління настає під дією сильної хвилі, для якої $\alpha < \alpha_0$.

Залежність амплітуди хвилі в глибині середовища від амплітуди хвилі на її границі показана на рис. 2.4.

Будемо вважати тепер $\alpha > \alpha_0$, тобто $\delta > 0$. Покладемо для визначеності $\delta = 1$. Тоді з (2.4.5) випливає співвідношення

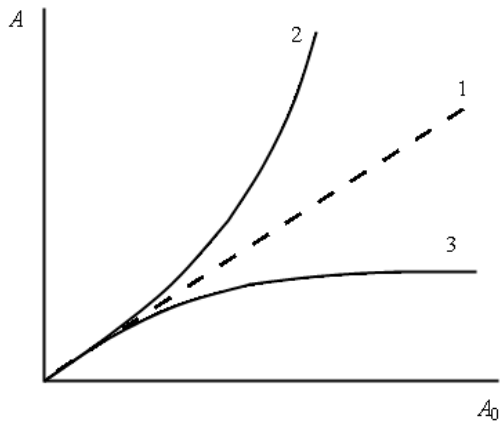


Рис. 2.4. Залежність амплітуди хвилі в середовищі від її значення на границі середовища:
1 – лінійна теорія;
2 – ефект просвітління середовища;
3 – ефект помутніння середовища

$$\int_{A_0}^{A} \frac{dA}{A\left(1 + A^2 \big/ A_c^2\right)} = -k_0$$

або ж

$$\int_{A_0}^{A} \left(\frac{1}{A} - \frac{A}{A_c^2\left(1 + A^2 \big/ A_c^2\right)} \right) dA = -k_0 .$$

Виконуючи інтегрування й потенціюючи, одержимо

$$\frac{A}{A_0} \left(\frac{1 + A^2 \big/ A_c^2}{1 + A_0^2 \big/ A_c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = e^{-k_0} . \qquad (2.4.8)$$

З (2.4.8) маємо такий розв'язок:

$$A = \frac{A_0 e^{-K_0}}{\sqrt{1 + \frac{A_0^2}{A_c^2}\left(1 - e^{-2K_0}\right)}} .$$

Тоді

$$P_A = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{A_0^2}{A_c^2}\left(1 - e^{-2K_0}\right)}} .$$

У глибині середовища $k_0 \gg 1$, тоді

$$P_A = \frac{1}{\sqrt{1 + A_0^2 \,/\, A_c^2}} .$$

Звідси

$$A \approx A_0 \left(1 + A_0^2 \big/ A_c^2\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-k_0} .$$

Важливо, що $P_A < 1$, тобто має місце *ефект помутніння*. Він є наслідком того, що $\alpha > \alpha_0$. При $A_0^2 \big/ A_c^2 \gg 1$

$$P_A \approx \frac{A_c}{A_0} ,$$

отже $P_A \ll 1$. В останньому випадку

$$A = A_0 , P_A e^{-k_0} \approx A_c e^{-k_0} ,$$

тобто $A(x)$ не залежить від A_0. Такий ефект називається *ефектом насичення поля*. Збільшення амплітуди хвилі на межі середовища не призводить до її збільшення в глибині середовища. Це означає, зокрема, що збільшення потужності передавача радіотехнічної системи (наприклад, радіостанції мовлення, космічного радара) не призведе до збільшення дальності її функціонування. Ефект насичення доцільно використовувати в нелінійних атенюаторах.

Залежності $P_A(x)$ і $A(A_0)$ для випадку *ефекту помутніння* середовища ($P_A < 1$) також наведені на рис. 2.3 і рис. 2.4 відповідно.

Далі розглянемо розв'язок задачі про амплітудний самовплив у загальному вигляді. Вважаючи, що $\alpha / \alpha_0 = f(A)$, з (2.4.3) отримаємо

$$\int_{A_0}^{A} \frac{dA}{f(A)A} = -k_0 .$$

Представимо підінтегральний вираз у вигляді

$$\frac{1}{f(A)A} = \frac{1}{A} + \frac{1 - f(A)}{f(A)A} .$$

Тоді, виконуючи інтегрування й потенціювання, маємо:

$$A e^{J(A)} = A_0 e^{J(A_0)} e^{-k_0}, \qquad (2.4.9)$$

де

$$J(A) = \int_{A_0}^{A} \frac{1 - f(A)}{f(A)A} dA.$$

У глибині середовища, де $k_0 \gg 1$, хвиля стає слабкою, тобто $A \to 0$. Тоді з (2.4.9) одержуємо

$$A \approx A_0 e^{J(A_0) - J(0)} e^{-k_0}.$$

Звідси випливає

$$P_A = \exp\left\{J(A_0) - J(0)\right\} = \exp\left\{\int_0^{A_0} \frac{1 - f(A)}{f(A)A} dA\right\}.$$

При $0 < f(A) < 1$ і $f(A) > 1$ маємо відповідно $P_A > 1$ і $P_A < 1$, тобто ефекти просвітління й помутніння середовища.

2.4.2. Фазовий самовплив хвилі

У процесі поширення хвилі від її амплітуди також залежить дійсна частина діелектричної проникності або показник заломлення середовища n. Це призводить до фазового самовпливу хвилі. Для його кількісної характеристики будемо використовувати нелінійну добавку до фази (2.3.14)

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} \int_0^x (n(A) - n_0)\, dx. \qquad (2.4.10)$$

Підставляючи (2.4.2) в (2.4.10), одержимо

$$\Delta\varphi = -\frac{\omega}{c} \int_{A_0}^{A(x)} \frac{n(A) - n_0}{\alpha(A)} \frac{dA}{A}. \qquad (2.4.11)$$

Видно, що на границі середовища $\Delta\varphi = 0$, а в міру проникнення хвилі в середовище $|\Delta\varphi|$ зростає (рис. 2.5). У лінійній теорії $n = n_0$ і $\Delta\varphi = 0$.

Якщо хвиля модульована по амплітуді, то $A = A(t)$. Це призводить до того, що $\Delta\varphi = \Delta\varphi(t)$. Таким чином, у результаті самовпливу амплітудно-модульована хвиля здобуває фазову модуляцію. Її можна інтерпретувати в термінах *нелінійного ефекту Доплера*. Дійсно,

$$\Delta\omega(t) = -\frac{d\Delta\varphi(t)}{dt}$$

являє собою *нелінійний зсув частоти* хвилі.

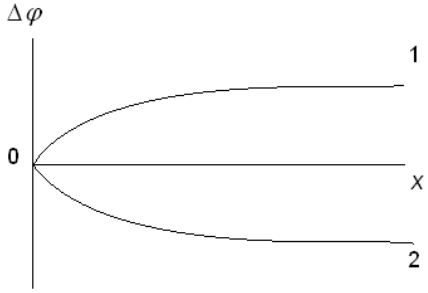


Рис. 2.5. Залежність ефекту фазового самовпливу від відстані, що пройшла хвиля:
1 – $n > n_0$;
2 – $n < n_0$.

2.4.3. Амплітудна взаємодія хвиль

Взаємодія хвиль виникає в результаті того, що хвилі змінюють параметри середовища, і, насамперед, коефіцієнт поглинання α і показник заломлення n. Ці зміни впливають на хвилі. Так, поряд із самовпливом виникає взаємодія хвиль за допомогою середовища, у якій вони поширюються. Збурення α і n призводять, відповідно, до амплітудної й фазової взаємодій.

Розглянемо спочатку амплітудну взаємодію хвиль із амплітудами $A_{1,2}$. Припустимо, що обидві хвилі поширюються вздовж осі x. Тоді вкорочені рівняння приймають вигляд:

$$\frac{dA_1}{dx} + \alpha_1(A_1, A_2) A_1 = 0, \qquad A_1(0) = A_{10}, \qquad (2.4.12)$$

$$\frac{dA_2}{dx} + \alpha_2(A_1, A_2) A_2 = 0, \qquad A_2(0) = A_{20}, \qquad (2.4.13)$$

де $\alpha_{1,2}$ – коефіцієнти поглинання хвиль. Рівняння (2.4.12) і (2.4.13) подібні. Завдяки цьому перший інтеграл системи знаходиться діленням цих рівнянь, тобто

$$\frac{dA_1}{dA_2} = \frac{\alpha_1(A_1, A_2)}{\alpha_2(A_1, A_2)} \frac{A_1}{A_2}. \qquad (2.4.14)$$

Якщо (2.4.14) вдається проінтегрувати, то розв'язок має вигляд:

$$F(A_1, A_2) = 0.$$

Припустимо, що останнє рівняння можна розв'язати відносно A_1 або A_2. Нехай, наприклад,

$$A_1 = F_1(A_2). \qquad (2.4.15)$$

Підставляючи (2.4.15) в (2.4.13), одержимо рівність:

$$\frac{dA_2}{dx} + \alpha_2\,(\,F_1(A_2), A_2\,)\,A_2 = 0\,,$$

розв'язок якої має вигляд:

$$\int\limits_{A_{20}}^{A_2} \frac{dA_2}{\alpha_2\,(\,F_1(A_2), A_2\,)\,A_2} = -x\,. \qquad (2.4.16)$$

Розв'язуючи (2.4.16) відносно A_2, одержимо:

$$A_2 = F_2(x)\,, \qquad (2.4.17)$$

а з врахуванням (2.4.15)

$$A_1 = F_1(A_2) = F_1\,[\,F_2(x)\,]. \qquad (2.4.18)$$

Співвідношення (2.4.17) і (2.4.18) є розв'язком поставленої задачі.

Ефекти спільної дії хвилі самої на себе й взаємодії хвиль можна описати за допомогою множників

$$P_{A1} = A_1 \,/\, A_{1L}$$

$$P_{A2} = A_2 \,/\, A_{2L}\,,$$

де $A_{1L}, {}_{2L}$ – амплітуди хвиль у лінійній теорії.

Розглянемо окремий випадок взаємодії хвиль, коли хвиля A_2 слабка, при цьому $\alpha_{1,2} = \alpha_{1,2}(A_1)$. Тоді з (2.4.14) маємо:

$$\int\limits_{A_{10}}^{A_1} \frac{\alpha_2(A_1)}{\alpha_1(A_1)} \frac{dA_1}{A_1} = \int\limits_{A_{20}}^{A_2} \frac{dA_2}{A_2}$$

або звідси

$$A_2 = A_{20} \exp\left\{ \int\limits_{A_{10}}^{A_1} \frac{\alpha_2(A_1)}{\alpha_1(A_1)} \frac{dA_1}{A_1} \right\} \equiv f(A_1)\,. \qquad (2.4.19)$$

Розв'язок $A_1(x)$ для $\alpha_1 = \alpha_1(A_1)$ знаходиться з (2.4.12) відразу:

$$\int\limits_{A_{10}}^{A_1} \frac{dA_1}{\alpha_1\,(\,A_1\,)\,A_1} = -x\,.$$

Звідси

$$A_1 = f_1(x)\,. \qquad (2.4.20)$$

Тоді з врахуванням (2.4.19)

$$A_2 = f(A_1) = f(f_1(x)) \equiv f_2(x)\,. \qquad (2.4.21)$$

Таким чином, залежності $A_1 = f_1(x)$ і $A_2 = f_2(x)$ – розв'язки поставленої задачі.

Для слабкої хвилі можна ввести множник взаємодії

$$P_{A12} = \frac{A_2}{A_{2L}} = \frac{A_2}{A_{20} e^{-k_{20}}}, \qquad k_{20} = \int\limits_0^x \alpha_{20} dx,$$

де α_{20} і k_{20} – коефіцієнт поглинання й інтегральний коефіцієнт поглинання хвилі в лінійній теорії.

2.4.4. Фазова взаємодія хвиль

Вихідна система рівнянь для хвиль, що поширюються вздовж осі x, має вигляд:

$$\frac{dA_1}{dx} + \alpha_1(A_1, A_2)A_1 = 0\,, \qquad A_1(0) = A_{10}\,,$$

$$\frac{dA_2}{dx} + \alpha_2(A_1, A_2)A_2 = 0\,, \qquad A_2(0) = A_{20}\,,$$

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\omega_1}{c} \int\limits_0^x (\,n_1\,(\,A_1, A_2\,) - n_{10}\,)\,dx, \;\; \Delta\varphi_1(0) = 0, \qquad (2.4.22)$$

$$\Delta\varphi_2 = \frac{\omega_2}{c} \int\limits_0^x (\,n_2\,(\,A_1, A_2\,) - n_{20}\,)\,dx, \;\; \Delta\varphi_2(0) = 0. \qquad (2.4.23)$$

У такому наближенні амплітудні ефекти не залежать від фазових, тобто перші два рівняння, що збігаються з (2.4.12) і (2.4.13), розв'язуються незалежно від (2.4.22) і (2.4.23). Оскільки $A_1 = f_1(x)$ и $A_2 = f_2(x)$, подальші обчислення $\Delta\varphi_{1,2}(x)$ виконуються на основі (2.4.22) і (2.4.23).

Залежності $P_{A1,2}(x)$ і $\Delta\varphi_{1,2}(x)$ схематично показані на рис. 2.6 і рис. 2.7.

Відзначимо, що в залежності від вигляду $\alpha_{1,2}$ і $n_{1,2}$ для однієї із хвиль може спостерігатися ефект просвітління середовища, для другої – помутніння середовища, для однієї хвилі $\Delta\varphi > 0$, для іншої – $\Delta\varphi < 0$. Зрозуміло, можлива ситуація, коли для обох хвиль ефекти подібні.

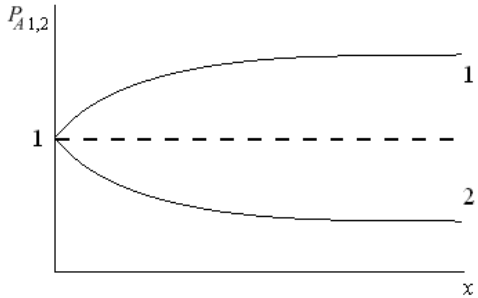


Рис. 2.6. Залежність множника взаємодії хвиль від пройденого шляху:
1 – ефект просвітління середовища;
2 – ефект помутніння середовища (у лінійній теорії $P_{A1,2} = 1$*)*

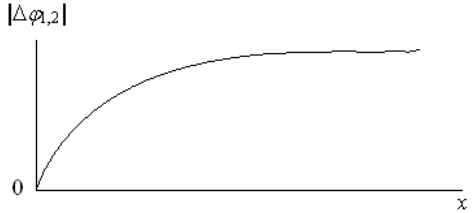


Рис. 2.7. Залежність ефекту (за модулем) фазової взаємодії хвиль від пройденого шляху

2.4.5. Нестаціонарний процес самовпливу хвилі. Динаміка фронту просвітління (помутніння)

При впливі потужного електромагнітного випромінювання поглинання середовища може істотно змінюватися. Наприклад, при поширенні потужного лазерного випромінювання в атмосфері, вода частково випаровується, вологість і розмір крапель зменшуються. Це призводить до ослаблення поглинання світла. Настає просвітління хмарної структури.

Ефект просвітління може мати місце в плазмі, напівпровідниках і інших середовищах. При інших співвідношеннях параметрів хвилі й середовища може настати помутніння середовища. Для опису динаміки цих ефектів скористаємося такою найпростішою моделлю закону зміни коефіцієнта поглинання хвилі в часі [6]:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\gamma \alpha A^2, \quad \alpha(0,x) = \alpha_0, \tag{2.4.24}$$

де $A^2(t,x) = I(t,x)$ – інтенсивність хвилі, γ – параметр нелінійної взаємодії хвилі із середовищем (при $\gamma > 0$ і $\gamma < 0$ мають місце відповідно ефекти просвітління й помутніння). З укороченого рівняння (2.4.1) випливає рівняння для інтенсивності хвилі:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -2\alpha(I)I, \quad I(t,0) = I_0. \tag{2.4.25}$$

Інтегруючи (2.4.24), одержимо

$$\alpha(t,x) = \alpha(0,x)\exp\left(-\gamma\int_0^t I(t,x)dt\right) = \alpha_0 e^{-y}, \tag{2.4.26}$$

де

$$y(t) = \gamma\int_0^t I(t,x)dt, \tag{2.4.27}$$

звідки

$$I = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{2.4.28}$$

Підставимо (2.4.28) в (2.4.25) і одержимо

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = -2\alpha\frac{\partial y}{\partial t},$$

або

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -2\alpha\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{2.4.29}$$

З урахуванням (2.4.26) вираз (2.4.29) набуває вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -2\alpha_0 e^{-y}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{2.4.30}$$

Інтегруючи (2.4.30) за часом, одержимо

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2\alpha_0 e^{-y} + C_1(x). \tag{2.4.31}$$

З'ясуємо початкові умови для y і для $\frac{\partial y}{\partial x}$. З (2.4.27) при $t = 0$ маємо

$$y(0,x) = 0. \tag{2.4.32}$$

Диференціювання (2.4.27) по *x* дає

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \gamma\int_0^t \frac{\partial I}{\partial x}dt,$$

звідки випливає, що

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{t=0} = 0. \tag{2.4.33}$$

З урахуванням (2.4.32) і (2.4.33) з (2.4.31) одержуємо $C_1 = -2\alpha_0$. Тоді (2.4.31) прийме вигляд:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2\alpha_0 (e^{-y} - 1).$$

Розділяючи змінні й інтегруючи, одержимо

$$e^y = 1 + C_2 e^{-2k_0}. \qquad (2.4.34)$$

При $x = 0$

$$I(t,0) = I_0, \qquad y(t,0) = \gamma \int_0^t I(t,0)dt = \gamma \int_0^t I_0 dt.$$

Введемо енергію хвилі на границі середовища

$$W_0 = \int_0^t I_0(t)dt$$

і перепишемо вираз для y_0:

$$y_0 = y(t,0) = \gamma W_0. \qquad (2.4.35)$$

З (2.4.34) з урахуванням (2.4.35) маємо:

$$C_2 = e^{y_0} - 1 = e^{\gamma W_0} - 1. \qquad (2.4.36)$$

Підставляючи (2.4.36) у вираз (2.4.34), з останнього одержимо

$$e^y = 1 + \left(e^{\gamma W_0} - 1\right) e^{-2k_0}. \qquad (2.4.37)$$

Звідси після диференціювання по t маємо:

$$e^y \frac{\partial y}{\partial t} = \gamma I_0 e^{\gamma W_0} e^{-2k_0}. \qquad (2.4.38)$$

Тоді з (2.4.28) з урахуванням (2.4.37) і (2.4.38) випливає, що

$$I = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial y}{\partial t} = I_0 \frac{e^{\gamma W_0 - 2k_0}}{1 + \left(e^{\gamma W_0} - 1\right) e^{-2k_0}},$$

або остаточно

$$I(t,x) = \frac{I_0(t)}{1 + \left(e^{2k_0} - 1\right) e^{-\gamma W_0}}. \qquad (2.4.39)$$

Підставляючи (2.4.37) в (2.4.26), одержимо

$$\alpha(t,x) = \frac{\alpha_0}{1 + \left(e^{\gamma W_0} - 1\right) e^{-2k_0}}. \qquad (2.4.40)$$

Проаналізуємо отримані розв'язки (2.4.39) і (2.4.40). Якщо хвиля досить слабка на границі середовища, то $\gamma W_0 \ll 1$, при цьому

$$e^{\gamma W_0} \approx 1,$$

$$I(t,x) \approx I_0(t) e^{-2k_0},$$

$$\alpha(t,x) \approx \alpha_0.$$

Поширення хвилі в цьому випадку, як і повинно бути, описується лінійною теорією.

Для сильної хвилі, тобто при $\gamma W_0 \gg 1$, не занадто далеко від границі середовища ($\gamma W_0 \gg 2k_0$) справедливі такі співвідношення:

$$I(t,x) \approx I_0, \qquad (2.4.41)$$

$$\alpha(t,x) \approx \alpha_0 e^{-\gamma W_0}. \qquad (2.4.42)$$

Видно, що α значно менше α_0, а інтенсивність хвилі практично така ж, як на границі середовища. Це і є ефект просвітління середовища. Вдалині від границі при $2k_0 \gg \gamma W_0 \gg 1$ маємо:

$$I(t,x) \approx I_0 e^{-2k_0} e^{\gamma W_0} = I_L e^{\gamma W_0},$$

$$\alpha(t,x) \approx \alpha_0,$$

тобто коефіцієнт поглинання дорівнює своєму значенню в лінійній теорії, а $I \gg I_L$, де I_L – інтенсивність хвилі в лінійній теорії. Множник самовпливу в глибині середовища

$$P_A \approx e^{\frac{1}{2}\gamma W_0} \gg 1.$$

Розглянемо випадок сильної хвилі ($|\gamma| W_0 \gg 1$) при $\gamma < 0$. Тоді при $|\gamma| W_0 \gg 2k_0$ розв'язок також дається виразами (2.4.41), (2.4.42), де $\gamma < 0$. При цьому $\alpha \gg \alpha_0$, а $I(t,x) \approx I_0$, тобто ефект помутніння тут ще не проявляється. Зате в глибині середовища ($2k_0 \gg 1$) він проявляється повною мірою:

$$I(t,x) \approx I_0 e^{-2k_0} e^{-|\gamma| W} \ll I_L, \qquad (2.4.43)$$

$$\alpha(t,x) \approx \alpha_0 \qquad (2.4.44)$$

Повернемося до співвідношень (2.4.41), (2.4.42). Оскільки W_0 залежить від часу, то при збільшенні t зросте W_0, і область, де $\gamma W_0 \gg 2k_0$, зрушується убік більших k_0, тобто в глибину середовища. Це призводить до переміщення фронту просвітління в глибину середовища (рис. 2.8).

Знайдемо швидкість руху фронту з умови $\gamma W_0 = 2k_0$, після диференціювання якого за часом приходимо до виразу:

$$\gamma I_0 = 2\alpha_0 \frac{dx}{dt}.$$

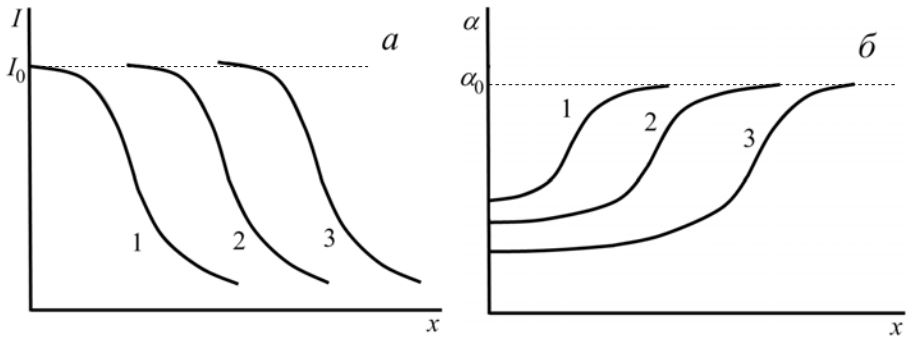


Рис. 2.8. Динаміка фронту інтенсивності хвилі (а) і коефіцієнта поглинання (б): 1 – $t = t_1$; 2 – $t = t_2 > t_1$; 3 – $t = t_3 > t_2 > t_1$

Звідси швидкість фронту

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma I_0}{2\alpha_0}. \qquad (2.4.45)$$

Швидкість $u \sim I_0 / \alpha_0$. Якщо $\gamma < 0$, то фронт помутніння рухається до границі середовища з такою ж за величиною швидкістю (2.4.45).

Питання для самоконтролю

1. Чому виникає самовплив електромагнітних хвиль?
2. Чому виникає взаємодія електромагнітних хвиль?
3. До чого призводить самовплив електромагнітних хвиль?
4. До чого призводить взаємодія електромагнітних хвиль?
5. Наведіть укорочене рівняння для амплітуди електромагнітного поля. Чому воно так називається?
6. Де сильніше за все проявляється ефект самовпливу хвиль? Чому?
7. Де сильніше за все проявляється ефект взаємодії хвиль? Чому?
8. У чому суть ефекту просвітління середовища?
9. У чому суть ефекту помутніння середовища?
10. У чому суть ефекту насичення поля?
11. Наведіть вихідні рівняння, що описують фазовий самовплив електромагнітних хвиль.
12. Наведіть вихідні рівняння, що описують амплітудну взаємодію електромагнітних хвиль.

13. Наведіть вихідні рівняння, що описують фазову взаємодію електромагнітних хвиль.
14. Що таке множник амплітудного самовпливу хвиль? Як він залежить від пройденого хвилею шляху?
15. Що таке множник амплітудної взаємодії хвиль? Як він залежить від пройденого хвилею шляху?
16. Наведіть вихідні рівняння, що описують нестаціонарний процес самовпливу електромагнітних хвиль.
17. Опишіть динаміку фронту інтенсивності електромагнітної хвилі та коефіцієнта поглинання у випадку просвітлених середовищ.
18. Опишіть динаміку фронту інтенсивності електромагнітної хвилі та коефіцієнта поглинання у випадку помутнених середовищ.

Задачі

1. Розв'язати задачу про амплітудний самовплив хвилі при вигляді коефіцієнта поглинання:

$$\text{а) } \alpha = \frac{\alpha_0}{1 + aA}; \text{ б) } \alpha = \alpha_0(1 + aA).$$

де A – амплітуда хвилі. Дослідити поведінку розв'язку в залежності від величини та знаку a. Зробити оцінки ефекту при $| a | = A_0^{-1}$, де A_0 – амплітуда хвилі на границі.

2. Розрахуйте множник амплітудної взаємодії сильної (1) і слабкої (2) хвиль у глибині середовища:

$$P_{12} = \frac{A_2}{A_{2L}} = \frac{A_2}{A_{20}} e^{k_{20}}.$$

Обмежитися поширенням обох хвиль в одному напрямку. Прийняти коефіцієнти поглинання середовища:

$$\text{а) } \alpha_{1,2} = \frac{\alpha_{10,20}}{1 + aA_1}; \text{ б) } \alpha_{1,2} = \alpha_{10,20}(1 + aA_1).$$

Дослідити поведінку розв'язку в залежності від величини та знаку a. Зробити оцінку ефекту при $|a| = A_0^{-1}$, де A_0 – амплітуда хвилі на границі.

3. Отримати формулу для нелінійної добавки до фази за рахунок фазового самовпливу. Прийняти, що:

а) $n(A) = 1 + a_1 A$; $\alpha(A) = \dfrac{\alpha_0}{1 + a_2 A}$;

б) $n(A) = 1 + a_1 A$; $\alpha(A) = \alpha_0(1 + a_2 A)$.

Оцінити величину ефекту при $|a_1| = A_0^{-1}$, $|a_2| = A_0^{-1}$, де A_0 – амплітуда хвилі на границі.

4. Отримати формулу для нелінійної добавки до фази слабкої хвилі (2) за рахунок її взаємодії з сильною хвилею (1) і проаналізувати результат. Обидві хвилі поширюються в одному напрямку. Прийняти наступні вирази для α_1 і n_2:

а) $\alpha_1 = \alpha_{10}(1 + aA_1)$; $n_2 = 1 + bA_1$;

б) $\alpha_1 = \alpha_{10}(1 + aA_1)^{-1}$; $n_2 = 1 + bA_1$.

Для оцінок використовувати $|a| = |b| = A_{10}^{-1}$.

Вказівка: ввести глибину затухання сильної хвилі в лінійній теорії $L_{10} = \alpha_{10}^{-1}$.

2.5. Нелінійні стаціонарні хвилі

Стаціонарними хвилями називають розв'язок рівнянь у частинних похідних із двома аргументами t і x, що залежать від однієї, так званої *біжучої змінної* $\xi = x \pm ut$. Ці хвилі добре вивчені, тому що вони описуються звичайними диференціальними рівняннями [10, 22–24, 29, 37, 39].

Нехай хвильове рівняння має вигляд

$$\hat{L}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}, \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v(t, x) = 0,$$

де $\hat{L}$ – деякий оператор, v – скалярне поле. Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \pm u \frac{d}{d\xi},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d}{d\xi},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} = \pm u \frac{d^2}{d\xi^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = u^2 \frac{d^2}{d\xi^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{d^2}{d\xi^2},$$

хвильове рівняння зводиться до такого:

$$\hat{L}\left(\pm u \frac{d}{d\xi}, \frac{d}{d\xi}, \pm u \frac{d^2}{d\xi^2}, u^2 \frac{d^2}{d\xi^2}, \frac{d^2}{d\xi^2}\right) v(\xi) = 0.$$

Цей вираз є звичайним диференціальним рівнянням для функції $v(\xi)$.

2.5.1. Лінійні стаціонарні хвилі

Найпоширенішим лінійним хвильовим рівнянням є гіперболічне рівняння вигляду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{2.5.1}$$

або

$$v_{tt} - u^2 v_{xx} = 0. \tag{2.5.2}$$

Оскільки (2.5.1) допускає таке представлення:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right) v = 0,$$

з нього можна одержати такі хвильові рівняння першого порядку

$$v_t - u v_x = 0, \tag{2.5.3}$$

$$v_t + u v_x = 0. \tag{2.5.4}$$

Загальні стаціонарні розв'язки (2.5.3) і (2.5.4) мають вигляд:

$$v = F_+(x + ut), \tag{2.5.5}$$

$$v = F_-(x - ut), \tag{2.5.6}$$

де $F_\pm$ – довільні функції, що визначаються з початкових і граничних умов.

Важливо, що розв'язки (2.5.5), (2.5.6) рівнянь (2.5.3), (2.5.4) можуть бути періодичними й аперіодичними, у тому числі й такі, що описують лінійні відокремлені хвилі. Найпростішим представником хвилі такого типу є одногорба самітна хвиля, що нагадує відеоімпульс.

Стаціонарні хвилі мають ту чудову властивість, що вони в процесі поширення не змінюють свого профілю. У лінійній теорії це можливо через відсутність дисперсії й дисипації.

2.5.2. Укручення профілю хвилі

У пункті 2.2.1. отримано точний розв'язок нелінійних рівнянь електродинаміки. Він має вигляд:

$$v(t,x) = v(x \pm u(v)t), \tag{2.5.7}$$

де $u(v)$ – швидкість хвилі, що залежить від значення поля в цей момент часу й у цій точці. Нелінійна хвиля (2.5.7) деформується в процесі поширення через вплив нелінійності середовища (див. рис. 2.2). Деформацію профілю хвилі, обумовлену різною швидкістю руху його різних частин, називають *укрученням профілю хвилі*. Крутість профілю хвилі, поступово збільшуючись, досягає свого максимального значення, після чого настає *перекидання фронту хвилі*.

Одержимо умову перекидання [3]. Нехай хвиля рухається зліва направо, тоді

$$v(t,x) = v(x - u(v)t) = v(\xi). \tag{2.5.8}$$

Диференціюючи (2.5.8) по t і x, одержимо

$$v_t = \frac{dv}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{dv}{d\xi}\left(-u - \frac{du}{dv}\frac{\partial v}{\partial t}t\right) = v'\left(-u - u'v_t t\right),$$

$$v_x = \frac{dv}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dv}{d\xi}\left(1 - \frac{du}{dv}\frac{\partial v}{\partial x}t\right) = v'\left(1 - u'v_x t\right).$$

Звідси

$$v_t = -\frac{v'u}{1 + v'u't}, \quad v_x = \frac{v'}{1 + v'u't}. \tag{2.5.9}$$

Розглянемо (2.5.9) детальніше. Умова $v' \neq 0$ свідчить про неоднорідність початкового профілю, нерівність $u' \neq 0$ припускає наявність нелінійності. Перекидання профілю хвилі наступає при v_t, $v_x \to \infty$, тобто за умови

$$1 + v'u't_0 = 0,$$

звідки

$$t_0 = -\frac{1}{v'u'}.$$

Щоб наступило укручення переднього фронту (див. рис. 2.2), де $v' < 0$, для забезпечення умови $t_0 > 0$ необхідно поставити вимогу $u' > 0$. Остання нерівність означає, що більшим значенням v відповідають більші значення u, тобто вершина профілю обганяє його основу.

2.5.3. Вплив дисипації. Рівняння Бюргерса і його точні розв'язки

Виникнення класичних нелінійних ефектів розглянемо на прикладі руху нестисливої рідини. При відсутності зовнішніх сил рівняння руху $dv/dt = 0$ має вигляд:

$$v_t + vv_x = 0, \tag{2.5.10}$$

де $v(t,x)$ – швидкість руху елемента рідини. Співвідношення (2.5.10) є окремим випадком рівняння

$$v_t + u(v)v_x = 0, \tag{2.5.11}$$

яке при $u = \mathrm{const}$ переходить у лінійне рівняння (2.5.4).

Співвідношення (2.5.10), що іноді називають *рівнянням Римана*, є найпростішим *еталонним*[1] рівнянням із квадратичною нелінійністю. Воно, так само, як і більш складні рівняння (2.2.11), (2.5.11), описує укручення профілю хвилі і його перекидання. Останнє настає при v_t, $v_x \to \infty$. Але при великих градієнтах необхідно враховувати процеси переносу й, зокрема, в'язкість, що являє собою просторову дифузію механічного імпульсу. З урахуванням в'язкості рівняння руху прийме вигляд:

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx}, \tag{2.5.12}$$

де $\nu > 0$ – коефіцієнт в'язкості. Співвідношення (2.5.12), уперше отримане в 1940 р., називається *рівнянням Бюргерса*. Воно також відноситься до еталонних рівнянь теорії нелінійних хвиль.

Рівняння Бюргерса допускає точні розв'язки. Щоб переконатися в цьому, варто скористатися *підстановкою Коула – Хопфа* [10, 39].

$$v = -2\nu\frac{w_x}{w}.$$

При цьому з рівняння (2.5.12) для допоміжної функції w випливає класичне лінійне рівняння дифузії (теплопровідності):

$$w_t = \nu w_{xx}. \tag{2.5.13}$$

Розв'язання (2.5.13) не викликає труднощів. Далі ми будемо цікавитися лише розв'язками, що мають вигляд стаціонарних хвиль.

2.5.4. Ударна хвиля

Ударною хвилею називається *біжучий стрибок* якого-небудь параметра хвилі або середовища (густини, тиску й т.п.). У лініях передачі можуть формуватися й поширюватися ударні електромагнітні хвилі. При цьому компоненти поля зазнають стрибок.

[1] Під еталонними рівняннями розуміють рівняння, що допускають точний аналітичний розв'язок. При цьому останні описують вплив того чи іншого фізичного процесу (наприклад, квадратичної нелінійності). Вид розв'язку еталонного рівняння часто «підказує» метод наближеного аналітичного розв'язку більш складних, ніж еталонні, рівняння.

Розв'язок рівняння (2.5.12) шукаємо у вигляді стаціонарної хвилі [10, 29]:

$$v = v(x - ut). \tag{2.5.14}$$

Підставляючи (2.5.14) в (2.5.12), одержимо

$$-uv' + vv' = \nu v'', \tag{2.5.15}$$

де штрих означає диференціювання по ξ. У якості граничних умов виберемо такі:

$$v(-\infty) = v_1, \qquad v(+\infty) = v_2, \qquad v'(\pm\infty) = 0, \tag{2.5.16}$$

причому $v_1 > v_2$. Перший інтеграл (2.5.15) має вигляд

$$-uv + v^2 / 2 = \nu v' + C_1. \qquad . \tag{2.5.17}$$

З урахуванням (2.5.16) з рівняння (2.5.17) одержимо

$$-uv_1 + v_1^2 / 2 = C_1, \tag{2.5.18}$$

$$-uv_2 + v_2^2 / 2 = C_1. \tag{2.5.19}$$

Віднімаючи з (2.5.18) вираз (2.5.19), маємо:

$$-u(v_1 - v_2) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = 0,$$

звідки при $v_1 \neq v_2$ швидкість ударної хвилі

$$u = \frac{v_1 + v_2}{2}. \tag{2.5.20}$$

Тоді з (2.5.18), (2.5.20) випливає

$$C_1 = -\frac{v_1 + v_2}{2} v_1 + \frac{v_1^2}{2} = -\frac{v_1 v_2}{2}. \tag{2.5.21}$$

З урахуванням (2.5.21) рівняння (2.5.17) прийме вигляд:

$$-\frac{v_1 + v_2}{2} v + \frac{v^2}{2} = \nu v' - \frac{v_1 v_2}{2}$$

або

$$2\nu v' = v^2 - (v_1 + v_2)v + v_1 v_2. \tag{2.5.22}$$

Для подальшого співвідношення (2.5.22) зручно записати так:

$$2\nu v' = (v - v_1)(v - v_2). \tag{2.5.23}$$

Помічаючи, що $v_1 > v > v_2$, (2.5.23) перетворимо до вигляду

$$2\nu v' = -(v_1 - v)(v - v_2).$$

Розділяючи змінні, одержимо

$$\frac{dv}{(v_1 - v)(v - v_2)} = -\frac{d\xi}{2\nu}.$$

Інтегрування цього виразу дає

$$-\ln(v_1 - v) + \ln(v - v_2) = -\frac{v_1 - v_2}{2\nu}\xi + C_2.$$

Виберемо систему відліку ξ так, щоб $C_2 = 0$. Звідси

$$v(\xi) = \frac{v_1 + v_2 e^{\xi/\xi_0}}{1 + e^{\xi/\xi_0}}, \tag{2.5.24}$$

де

$$v(0) = u, \qquad \xi_0 = \frac{2\nu}{v_1 - v_2}. \tag{2.5.25}$$

Тут ξ_0 – ширина фронту хвилі. Вираз (2.5.24) описує поширення ударної хвилі. Важливо, що при коефіцієнті в'язкості $\nu \to 0$ ширина фронту $\xi_0 \to 0$, і ударна хвиля здобуває вигляд *біжучої сходинки* (рис. 2.9).

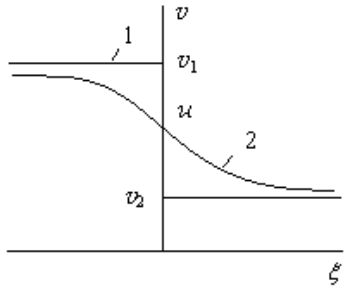


Рис. 2.9. Профіль ударної хвилі:
1 – при $\xi_0 \to 0$;
2 – при кінцевому значенні ξ_0

Далі на прикладі рівняння Бюргерса (2.5.12) або його стаціонарного аналога (2.5.15) розглянемо *метод оцінки* розв'язку диференціальних рівнянь. Ідея розв'язання заснована на оцінці похідних. За визначенням

$$v = \lim_{\Delta\xi \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta \xi}.$$

За аналогією *оцінкою похідної* назвемо величину

$$|v'| \sim \left|\frac{\Delta v}{\Delta \xi}\right|,$$

де $\Delta\xi$, Δv – характерний масштаб зміни аргументу й функції. В нашій задачі

$$|\Delta\xi| \sim \xi_0, \qquad \Delta v \sim |v_1 - v_2|,$$

$$|v'| \sim \frac{v_1 - v_2}{\xi_0}, \qquad |v''| \sim \frac{v_1 - v_2}{\xi_0^2}.$$

Порівнюючи перший і другий члени в (2.5.15), одержимо

$$\left|uv'\right| \sim \left|vv'\right|$$

або

$$u\frac{v_1 - v_2}{\xi_0} \sim \frac{(v_1 - v_2)^2}{\xi_0}.$$

Звідси швидкість ударної хвилі

$$u \sim v_1 - v_2 .$$

Зазначимо, що точне значення u (див. (2.5.20)) відрізняється від отриманої оцінки. Розходження малоістотне, якщо $v_1 \gg v_2$, при $v_1 \sim v_2$ воно значне.

Далі прирівняємо нелінійний член vv' і в'язкий член $\nu v''$ у рівнянні (2.5.15) і отримаємо

$$\frac{(v_1 - v_2)^2}{\xi_0} \sim \nu\frac{v_1 - v_2}{\xi_0^2}.$$

Звідси

$$\xi_0 \sim \frac{\nu}{v_1 - v_2}.$$

Наведене значення ξ_0 відрізняється від точного (див. (2.5.25)) множником 2.

На відміну від синусоїдальних хвиль, ударні хвилі мають такі *особливості*:

– на фронті хвилі має місце стрибкоподібна зміна параметрів стану й руху середовища;

– швидкість ударної хвилі залежить від її амплітуди;

– швидкість ударних хвиль завжди більше швидкості відповідної лінійної хвилі;

– ударні хвилі супроводжуються переміщенням середовища в напрямку поширення фронту збурення;

– ударна хвиля не періодична, а поширюється у вигляді *самітного стрибка* густини.

Таким чином, метод оцінки похідних, не розв'язуючи рівняння, дозволяє знайти основні закономірності в поводженні його розв'язків. Природно, що одержувані оцінки справедливі лише за порядком величини.

Зазначимо, що відношення нелінійного й в'язкого членів є *число Рейнольдса*

$$\mathrm{Re} = \left|\frac{vv'}{\nu v''}\right| = \frac{(v_1 - v_2)\xi_0}{\nu}.$$

При $\mathrm{Re} \ll 1$ можна знехтувати нелінійністю, а при $\mathrm{Re} \gg 1$ – в'язкістю. При $\mathrm{Re} \sim 1$ обидва процеси рівноправні. Більше того, саме існування ударної

стаціонарної хвилі зобов'язане *компенсації ефектів нелінійного укручення профілю хвилі процесом в'язкості*, що приводить до «дифузії» профілю хвилі, або, що те ж саме, *процесу дисипації* механічного імпульсу.

Таким чином, відокремлена хвиля є нелінійною стаціонарною хвилею, що біжить, з незмінним сходинкоподібним профілем.

На закінчення додамо, що природними узагальненнями рівнянь Римана (2.5.10) і Бюргерса (2.5.12) є такі рівняння:

$$v_t + u(v)v_x = 0, \qquad v_t + u(v)v_x = \nu v_{xx}.$$

Ударні хвилі відіграють важливу роль у природі, науці й техніці. Тому далі розглянемо приклади ударних хвиль докладніше.

2.5.5. Коротка історія дослідження ударних хвиль. Приклади ударних хвиль

Вивчення ударних хвиль почалося після їхнього відкриття в 1860 р. Риманом. Великий внесок у їхнє дослідження внесли фізики й математики, такі як Стокс, Риман, Ренкін, Гюгоніо, Вьєль, Чепмен, Жуге й ін.

Після Другої світової війни у зв'язку зі створенням ядерної зброї, розвитком практичної космонавтики, надзвукової й гіперзвукової авіації, а також завдяки появі комп'ютерів знову спостерігається сплеск інтересу до дослідження ударних хвиль.

Чудові результати отримані в СРСР Я. Б. Зельдовичем, Ю. П. Райзером, Л. І. Сєдовим, а також за кордоном Тейлором, Нейманом, Бете, Теллером.

Ударні хвилі спостерігаються в газах, рідинах, плазмі, а також в інших середовищах. Існують не тільки ударні звукові, але й *ударні електромагнітні хвилі*.

Інтерес до нелінійних хвиль в електродинаміці виник в 50-х роках XX ст. у зв'язку із широким застосуванням феритів і сегнетоелектриків. Ударні хвилі в 50–60 рр. минулого століття досліджувалися А. В. Гапоновим-Греховим, В. Л. Германом, І. Г. Катаєвим і ін. Вивчено ударні хвилі в лініях передачі, що містять ферити й сегнетоелектрики, розроблені методи одержання імпульсів наносекундної тривалості та ін.

На можливість виникнення *ударної хвилі обвідної* лазерного випромінювання вказав в 1963 р. Л. О. Островський. Ці питання детально вивчені в 1970–1980-ті рр.

Таким чином, у цей час теорія ударних хвиль досить добре розроблена.

Джерелами ударних хвиль у *природних умовах* є блискавки, землетруси, виверження вулканів, падіння метеоритів. При цьому генеруються ударні хвилі акустичного, сейсмічного і, мабуть, електромагнітного типів.

Зовсім інші ударні хвилі *магнітогідродинамічного* (МГД) типу виникають при обтіканні сонячним вітром магнітосфер Землі й планет, при сонячних спалахах, вибухах зірок і галактик.

Ударна хвиля неуявних масштабів виникла в результаті Великого вибуху, що дав життя нашому Всесвіту.

Ударними хвилями є скидання води у водоспадах, біжучі по гірській річці грязьові потоки – *селі*, *сніжні лавини*, рухома по річці хвиля, що прийшла з моря, – *бор* і ін.

Ударні хвилі генеруються *штучними джерелами*: батогом пастуха, пострілами вогнепальної зброї й гармат, лазерними імпульсами, вибухами хімічних і ядерних бомб, літаками й ракетами, космічними апаратами, що вторгаються в атмосфери Землі й планет. Поряд з акустичними генеруються й МГД ударні хвилі.

Потоки машин у світлофорів також моделюються ударними хвилями.

2.5.6. Вплив дисперсії. Рівняння Кортевега – де Вріза і його точні розв'язки

Крім дисипації, укрученню фронту хвилі *перешкоджає дисперсія*. Нелінійне хвильове рівняння у випадку недисипативного диспергуючого середовища має вигляд [10, 21–24, 26, 27, 29, 39, 42]:

$$v_t + vv_x + \beta v_{xxx} = 0, \quad \beta > 0. \tag{2.5.26}$$

Рівняння такого виду отримане в 1895 р. Кортевегом і де Врізом для опису хвиль на воді й має їх ім'я.

Рівняння Кортевега – де Вріза (КдВ) є еталонним. Зокрема, воно описує зміну струму I і електричного поля в ланці нелінійної лінії передачі електромагнітних хвиль, схема однієї ланки якої показана на рис. 2.10. У цій схемі нелінійність викликана нелінійною ємністю C. Можна показати [26], що струм $I(t,x)$ задовольняє рівнянню вигляду

$$I_t + II_x + \beta I_{xxx} = 0,$$

де α і β – деякі коефіцієнти.

Покажемо спочатку, що рівняння (2.5.26) допускає опис стаціонарних хвиль, що виникають у результаті *компенсації нелінійного укручення профілю хвилі його дисперсійним розпливанням*. Нехай u – швидкість хвилі, ξ_0 –

ширина її профілю. За аналогією з числом Рейнольдса введемо число Урселла $\underline{\mathrm{Ur}} = \left|\dfrac{vv_x}{\beta v_{xxx}}\right|$. Тоді для нелінійного та дисперсійного членів маємо:

$$|vv_x| \sim \frac{u^2}{\xi_0}, \qquad |\beta v_{xxx}| \sim \frac{\beta u}{\xi_0^3}.$$

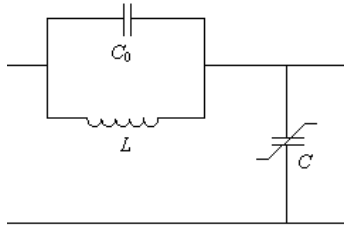


Рис. 2.10. Електрична схема ланки нелінійної лінії передачі. Тут C – нелінійна ємність

При цьому $\underline{\mathrm{Ur}} = \dfrac{u\xi_0^{\,2}}{\beta}$. Стаціонарна хвиля існує, якщо $\underline{\mathrm{Ur}} \sim 1$ й її швидкість і ширина профілю пов'язані співвідношенням

$$\xi_0 \sim \sqrt{\frac{\beta}{u}}. \tag{2.5.27}$$

При малих амплітудах хвилі рівняння (2.5.26) переходить у наступне лінійне рівняння:

$$v_t + v_0 v_x + \beta v_{xxx} = 0, \tag{2.5.28}$$

де $v_0 = \mathrm{const}$. Воно має, зокрема, гармонійний розв'язок вигляду

$$v = V_0 \cos(kx - \omega t). \tag{2.5.29}$$

Підставляючи (2.5.29) в (2.5.28), одержимо таке дисперсійне співвідношення:

$$\omega = kv_0 - \beta k^3.$$

У міру збільшення амплітуди хвилі лінеаризоване рівняння (2.5.28) стає непридатним і виникає необхідність розв'язувати рівняння КдВ (2.5.26). При кінцевих v, як і його лінійний аналог (2.5.28), воно також має періодичний розв'язок. Однак розв'язок не є гармонійним (рис. 2.11). Амплітуда негативної напівхвилі помітно менше амплітуди позитивної напівхвилі. При подальшому збільшенні v хвиля, залишаючись періодичною, має тільки позитивні напівхвилі. Такі періодичні, але не гармонійні розв'язки рівняння КдВ представляються у вигляді спеціальних еліптичних функцій, позначуваних як $\mathrm{Cn}(x)$, а хвилі тому називаються *кноїдальними* [26, 39].

Важливою особливістю рівняння КдВ є те, що воно допускає розв'язок у вигляді *відокремлених* хвиль. Дійсно, якщо період кноїдальних хвиль

спрямувати до нескінченності, то розв'язок рівняння КдВ буде описувати поширення відокремленої хвилі у вигляді самітного пагорба.

Одержимо далі неперіодичний розв'язок рівняння КдВ. З (2.5.26) для $v = v(x - ut)$ випливає співвідношення:

$$-uv' + vv' + \beta v''' = 0.$$

Його інтегрування дає

$$-uv + \frac{1}{2}v^2 + \beta v'' = C_1.$$

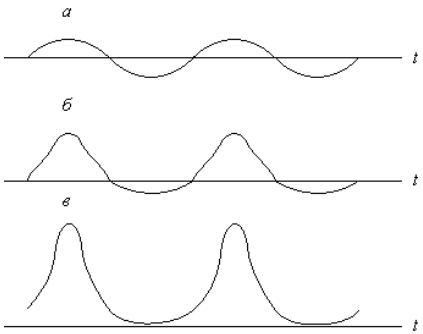


Рис. 2.11. Профіль хвилі, що описується рівнянням КдВ:
а – $v \to 0$;
б – v – кінцеве;
в – v – досить велике

Будемо вважати, що для відокремленої хвилі

$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = v''(\pm\infty) = 0.$$

Тоді $C_1 = 0$ і рівняння

$$-uv + \frac{1}{2}v^2 + \beta v'' = 0 \qquad (2.5.30)$$

можна ще раз проінтегрувати, якщо його попередньо помножити на $v' \neq 0$. Інтегрування (2.5.30) дає

$$-\frac{u}{2}v^2 + \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{2}\beta\left(v'\right)^2 = C_2.$$

Із граничних умов випливає, що $C_2 = 0$, тоді

$$\beta\left(v'\right)^2 = uv^2 - \frac{v^3}{3}.$$

Звідси

$$\sqrt{\beta}v' = \pm\sqrt{u}v\sqrt{1 - \frac{v}{3u}}.$$

Розділяючи змінні, маємо

$$\frac{dv}{v\sqrt{1 - \frac{v}{3u}}} = \pm\sqrt{\frac{u}{\beta}}d\xi. \qquad (2.5.31)$$

Позначаючи

$$\frac{v}{3u} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 z}, \qquad (2.5.32)$$

з (2.5.31) одержимо

$$dz = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{\beta}}d\xi$$

або

$$z = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{\beta}}\xi + C_3. \qquad (2.5.33)$$

Оскільки z – допоміжна змінна, виберемо в (2.5.33) знак «плюс» і покладемо $C_3 = 0$. Підставляючи (2.5.33) в (2.5.32), одержимо шуканий розв'язок:

$$v(\xi) = \frac{v_m}{\mathrm{ch}^2\left(\xi/\xi_0\right)}, \qquad (2.5.34)$$

де $v_m = 3u$, $\xi_0 = 2\sqrt{\beta/u}$. Залежність $v = v(\xi)$ показана на рис. 2.12.

Важливо, що ширина відокремленої хвилі $\xi_0 \sim u^{-1/2}$, тобто чим більше амплітуда хвилі, тим менше ширина її профілю. Розв'язок (2.5.34) уперше був отриманий Кортевегом і де Врізом в 1895 р.

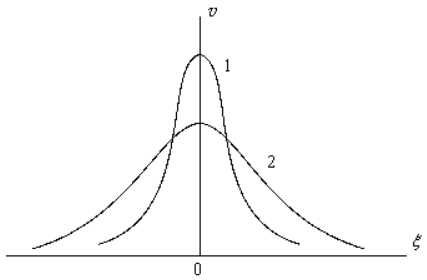


Рис. 2.12. Профіль відокремленої хвилі:
1 – швидкість u_1;
2 – швидкість u_2 ($u_2 < u_1$)

Відокремлену хвилю (2.5.34) будемо називати *класичним солітоном*. Як виявилося, солітони в сучасній науці відіграють велику роль. Тому їх варто розглянути докладніше.

Питання для самоконтролю

1. Що являє собою нелінійна стаціонарна хвиля?
2. Опишіть причини й отримайте умови виникнення ефекту укручення профілю хвилі.
3. Наведіть рівняння Римана й опишіть фізичний зміст його членів.
4. Які рівняння називаються еталонними?
5. Як зміниться рівняння Римана при врахуванні дисипації?
6. Наведіть рівняння Бюргерса й опишіть фізичний зміст його членів.
7. Що таке ударна хвиля?
8. Опишіть основні властивості ударних хвиль.
9. Що відбувається з ударною хвилею при збільшенні (зменшенні) дисипації в середовищі?
10. У чому суть оцінки похідних?
11. Отримайте вираз для числа Рейнольдса. За яких значень числа Рейнольдса виникає ударна хвиля?
12. За яких умов генерується ударна хвиля?
13. Які Ви знаєте узагальнення рівняння Римана?
14. Які Ви знаєте узагальнення рівняння Бюргерса?
15. Опишіть історію дослідження ударних хвиль.
16. Наведіть приклади ударних хвиль.
17. Перерахуйте природні джерела ударних хвиль.
18. Перерахуйте штучні джерела ударних хвиль.

Задачі

1. Ударна хвиля описується рівнянням Бюргерса:

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx}.$$

Знайти та проаналізувати розв'язок, якщо граничні умови мають вигляд:

а) $v(-\infty) = v_0$, $v(+\infty) = 0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$;

б) $v(-\infty) = v_0$, $v(+\infty) = \frac{1}{2}v_0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$.

2. Ударна хвиля описується рівнянням:

$$v_t + 3\alpha v^2 v_x = \nu v_{xx}.$$

Знайти та проаналізувати розв'язок, якщо граничні умови мають вигляд:

а) $v(-\infty) = 2v_0$, $v(+\infty) = 0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$;

б) $v(-\infty) = v_0$, $v(+\infty) = 0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$.

3. Не розв'язуючи рівняння Бюргерса

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx},$$

оцінити швидкість і ширину фронту ударної хвилі, використовуючи метод оцінки похідних. Граничні умови мають вигляд:

а) $v(-\infty) = v_0$, $v(+\infty) = 0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$;

б) $v(-\infty) = v_0$, $v(+\infty) = \frac{1}{2}v_0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$.

4. Не розв'язуючи рівняння для ударних хвиль із загасанням:

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx} + \gamma v^2,\ \gamma > 0,$$

оцінити глибину загасання хвилі L і порівняти L з шириною фронту ξ_0, якщо $v = v(\xi), v(\xi = -\infty) = v_0, v(\xi = +\infty) = 0$.

5. Знайти та проаналізувати розв'язок рівняння Бюргерса

$$v_t + \left(C_0 + v\right)v_x = \nu v_{xx},$$

де $C_0 = \text{const}$ при

а) $v(-\infty) = v_0$, $v(+\infty) = 0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$;

б) $v(-\infty) = v_0$, $v(+\infty) = \frac{1}{2}v_0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$.

6. Не розв'язуючи рівняння

$$v_t + 3\alpha v^2 v_x = \nu v_{xx},$$

оцінити швидкість і ширину фронту ударної хвилі. Граничні умови мають вигляд

а) $v(-\infty) = v_0$, $v(+\infty) = 0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$;

б) $v(-\infty) = 2v_0$, $v(+\infty) = 0$, $v'(\pm\infty) = 0$, $\xi = x - ut$.

2.6. Солітони

Поняття солітона введено в підрозділі 2.5. Розглянемо властивості солітона більш детально [1, 3, 10, 21–24, 26, 27, 29, 39, 42].

2.6.1. Властивості класичного солітона

Солітоном називається *нелінійна відокремлена біжуча хвиля*, що зберігає профіль і швидкість при русі в диспергуючому середовищі, а також після взаємодії з подібними до неї хвилями.

Отже, по-перше, солітон – це нелінійна хвиля. По-друге, солітон – стаціонарна хвиля, по-третє, солітон – хвиля не періодична, а локалізована в просторі й у часі.

Головною властивістю солітона є його *незмінність* після взаємодії з іншими солітонами. У результаті взаємодії може настати тільки *зсув* його положення у просторі порівняно з тим, яке б він мав без взаємодії. Ця властивість є зовсім несподіваною, оскільки нелінійні хвилі повинні взаємодіяти між собою, змінюючи свої характеристики.

Завдяки властивостям незмінності й локалізації в просторі й у часі, *солітон має ознаки частинок.* Саме частинки після пружних зіткнень розлітаються, не змінивши певні свої параметри руху. Щоб підкреслити споріднення з частинками, терміну солітон дали закінчення, яке характерне для назв частинок (протон, нейтрон і т. д.). Початкова частина слова (solus (лат.) – «один») свідчить про те, що солітон – хвиля відокремлена.

2.6.2. Коротка історія дослідження солітонів

Уперше солітони на воді описав у 1834 р. шотландський інженер і кораблебудівник Дж. С. Рассел. У його спостереженнях висота відокремленої хвилі в каналі склала близько 0,3 м, ширина – 0,5 м, швидкість хвилі $u \approx 13$–14 км/год. Без помітного згасання хвиля пройшла шлях близько 3–4 км. Дж. С. Рассел назвав хвилю відокремленою й уже після перших дослідів сформулював її основні властивості. Потім про хвилю Дж. С. Рассела надовго забули.

У 1895 р. датчани Д. І. Кортевег і Г. де Вріз (або Вріс, Фріз) одержали рівняння і його розв'язок, що називається тепер рівнянням КдВ. У цій роботі були закладені основи аналітичного дослідження солітонів.

Цікавість до солітонів різко зросла у 60-ті рр. XX ст. Цей період справедливо називається другим народженням солітона. Н. Забуський і М. Крускал у 1965 р. у результаті числових експериментів установили факт збереження форми й швидкості відокремлених хвиль типу (2.5.34) при їх зіткненні. Вони ж ввели термін солітон.

У 1967 р. запропоновано потужний аналітичний метод розв'язання нелінійних хвильових рівнянь – *метод зворотної задачі розсіяння.* У розвиток аналітичних методів великий внесок зробили В. Є. Захаров, Л. Д. Фадєєв, В. О. Марченко, А. Б. Шабат та ін.

У цей час міждисциплінарна наука про солітони – *солітоника* – бурхливо розвивається. Про це свідчать велика кількість публікацій про солітони, яка постійно збільшується. Солітони знайдені у фізиці, астрофізиці, біології й т. д. Тепер під солітоном часто розуміють *відокремлену структуру,* що має певну властивість незмінності.

2.6.3. Рівняння Бюргерса – Кортевега – де Вріза та його розв'язок

Рівняння Бюргерса і КдВ є граничними випадками рівняння *Бюргерса – Кортевега – де Вріза (БКдВ)* вигляду

$$v_t + vv_x + \beta v_{xxx} = \nu v_{xx}, \qquad \beta, \nu > 0. \tag{2.6.1}$$

Це рівняння враховує нелінійність, дисипацію й дисперсію. Для стаціонарних хвиль маємо:

$$uv' + vv' + \beta v''' = \nu v''. \tag{2.6.2}$$

Якщо $v(-\infty) = v_1$, $v(+\infty) = v'(\pm\infty) = v''(\pm\infty) = 0$, то розв'язок рівняння БКдВ має вигляд, представлений на рис. 2.13 [26].

Рівняння БКдВ є комбінацією рівнянь Бюргерса і КдВ, тому його можна назвати «рівнянням-кентавр». Його розв'язок є «розв'язок-кентавр». Воно складається з двох частин. Ліва частина описує в основному ударну хвилю, профіль якої збурений згасаючими коливаннями, а права частина – в основному солітон.

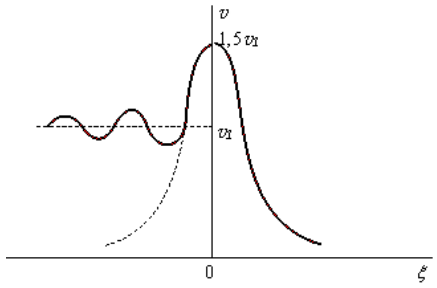


Рис. 2.13. Вигляд розв'язку рівняння БКдВ

У цілому ж розв'язок рівняння (2.6.1) із зазначеними вище граничними умовами описує ударну хвилю в середовищі з дисперсією.

Основні параметри ударної хвилі можна отримати з (2.6.2) методом оцінки похідних. Дійсно, із порівняння першого й другого членів рівняння отримуємо оцінку швидкості руху фронту ударної хвилі $u \sim v_1$ (точний розв'язок дає $u = v_1/2$). З порівняння першого й третього членів вихідного рівняння маємо ширину солітона (інтервал розмиття фронту ударної хвилі) $\xi_0 \sim (\beta/u)^{1/2}$. Нарешті, порівняння третього й четвертого членів дає глибину затухання осциляцій $\xi_1 \sim \beta/\nu$.

У підсумку зазначимо, що, окрім розглянутого рівняння БКдВ, другим узагальненням рівняння КдВ є співвідношення вигляду:

$$v_t + V(v)v_x + \beta v_{xxx} = 0, \qquad \beta > 0.$$

Зокрема, рівняння

$$v_t + \alpha v^2 v_x + \beta v_{xxx} = 0, \qquad \alpha, \beta > 0$$

називають *модифікованим рівнянням* КдВ або коротко – *мКдВ*. Його розв'язок має вигляд:

$$v(\xi) = \frac{v_m}{\operatorname{ch} \xi/\xi_0},$$

де $v_m = \sqrt{6u/\alpha}$, $\xi_0 = \sqrt{\beta/u}$.

2.6.4. Дисипативний солітон

Дисипативний солітон описується рівнянням вигляду [1, 26]:

$$v_t + v_0 v_x = \nu v_{xx} + \alpha v^2 - \beta v, \tag{2.6.3}$$

де

$$v_0, \alpha, \beta > 0, \qquad v_0 = \text{const}.$$

Тут замість нелінійного члена vv_x присутній член αv^2 (джерело), член $(-\beta v)$ описує втрати. Для стаціонарної хвилі з (2.6.3) маємо:

$$-uv' + v_0 v' = \nu v'' + \alpha v^2 - \beta v. \tag{2.6.4}$$

Покладемо

$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0. \tag{2.6.5}$$

Щоб хвиля була стаціонарною, зажадаємо рівності нулю коефіцієнта при v', тобто $u = v_0$. Тоді рівняння (2.6.2) прийме вигляд:

$$\nu v'' = -\alpha v^2 + \beta v. \tag{2.6.6}$$

Помножуючи рівняння (2.6.6) на v', після інтегрування одержимо

$$\frac{\nu}{2}\left(v'\right)^2 = -\frac{\alpha}{3}v^3 + \frac{\beta}{2}v^2 + C_1. \tag{2.6.7}$$

З урахуванням (2.6.5) $C_1 = 0$. Тоді (2.6.7) перепишеться у вигляді

$$\left(v'\right)^2 = \frac{\beta}{\nu}v^2\left(1 - \frac{2\alpha}{3\beta}v\right).$$

Звідси, знаходячи корінь квадратний і розділивши змінні, приходимо до виразу

$$\frac{dv}{v\sqrt{1 - v/v_m}} = \pm\sqrt{\frac{\beta}{\nu}}d\xi,$$

де $v_m = 3\beta/2\alpha$.

Підставляючи

$$\frac{v}{v_m} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z},$$

одержимо

$$-2z = \pm\sqrt{\frac{\beta}{\nu}}\xi + C_2.$$

Виберемо перед радикалом знак «мінус» і покладемо $C_2 = 0$. Тоді

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\nu}}\xi, \tag{2.6.8}$$

а шуканий розв'язок відповідно до (2.6.8) має вигляд:

$$v(\xi) = \frac{v_m}{\operatorname{ch}^2 \xi/\xi_0}, \quad \xi_0 = 2\sqrt{\frac{\nu}{\beta}}. \tag{2.6.9}$$

Отже, рівняння (2.6.3) допускає розв'язок у вигляді стаціонарної відокремленої хвилі. Це відбувається тому, що *нелінійні ефекти компенсуються впливом дисипації*. Вигляд розв'язку (2.6.9) показаний на рис. 2.14.

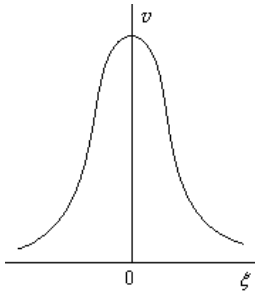


Рис. 2.14. Профіль дисипативного солітона

З виразу (2.6.9) видно, що дисипативний солітон схожий із класичним солітоном (2.5.34), однак є істотне розходження: висота й ширина дисипативного солітона *не пов'язані* між собою й *не залежать* від його швидкості руху.

Чому розв'язки для класичного солітона (2.5.34) і дисипативного солітона (2.6.9) подібні? Тому що подібні рівняння (2.5.30) і (2.6.6).Інакше кажучи, рівняння (2.6.6) можна реконструювати в рівняння КдВ вигляду (2.5.26).

Існування дисипативного солітона зумовлене *припливом енергії* ззовні за рахунок хімічних реакцій, випаровування води, вітрів і т. п. Більш правильно дисипативний солітон варто було б назвати споживаючим солітоном.

2.6.5. Електричні домени (солітони Ганна)

Ефект Ганна, відкритий у 1963 р., відноситься до твердотільної радіофізики. Його суть полягає в генерації когерентних НВЧ коливань струму I у кристалі арсеніду галію (GaAs) під дією зовнішнього поля $E_0 \sim 300$ кВ/м. Частота коливань $f = v/l$, де $v \sim 10^5$ м/с – швидкість дрейфу електронів, $l \sim 1$–100 мкм – довжина зразка. При цьому $f \sim 10^9$–10^{11} Гц. Коливання пов'язані з проходженням від «катода» до «анода» області сильного електричного поля (електричних доменів). Кожному коливанню відповідає один домен. Форма коливань струму й електричного поля показані на рис. 2.15.

Як видно з рисунку, профіль $E(t)$ дуже нагадує профіль нелінійної відокремленої хвилі (солітона). Покажемо це. У якості вихідних виберемо рівняння для густини струму $\vec{j}$ і рівняння Максвелла для індукції $\vec{D}$.

Для одновимірного руху зарядів уздовж осі x повний струм у колі дорівнює

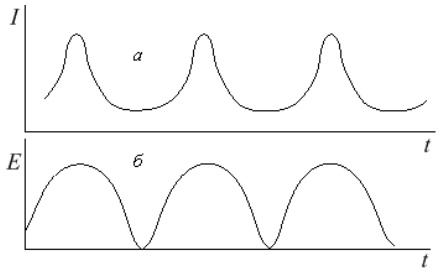


Рис. 2.15. Профіль коливань струму (а) й електричного поля (б)

$$j_0 = j + \frac{\partial D}{\partial t} = \text{const}, \tag{2.6.10}$$

де

$$j = eNv - eD_e \frac{\partial N}{\partial x}$$

або

$$j = eN\mu(E)E - eD_e \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.6.11}$$

Тут N – концентрація електронів , $\mu(E)$ – їхня рухливість, D_e – коефіцієнт дифузії електронів. У рівнянні (2.6.11) враховано, що струм пов'язаний як з дрейфом електронів, так і з їх переносом за рахунок градієнта N. З рівняння Максвелла

$$\text{div}\vec{D} = \rho$$

маємо:

$$\varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial x} = e(N - N_0), \tag{2.6.12}$$

де $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$, ε – абсолютна й відносна діелектричні проникності напівпровідникового кристала (ε_0 – електрична стала), N_0 – концентрація донорів.

Розв'язок системи рівнянь (2.6.10), (2.6.11) і (2.6.12) шукаємо у вигляді

$$E(t,x) = E(\xi), \quad \xi = x - ut.$$

Тоді ці рівняння приймуть вигляд:

$$j_0 = j - \varepsilon_a u E', \tag{2.6.13}$$

$$j = eN\mu E - eD_e N', \tag{2.6.14}$$

$$\varepsilon_a E' = e(N - N_0). \tag{2.6.15}$$

(Штрихом, зазвичай, позначається похідна по ξ.) Перепишемо (2.6.13), (2.6.15) у вигляді

$$j = j_0 + \varepsilon_a u E', \tag{2.6.16}$$

$$N = N_0 + \frac{\varepsilon_a}{e} E'. \tag{2.6.17}$$

Диференціюючи (2.6.17) по ξ, одержимо

$$N' = \frac{\varepsilon_a}{e} E''.$$

Звідси

$$E'' = \frac{e}{\varepsilon_a} N'. \tag{2.6.18}$$

Підстановка (2.6.14), (2.6.16) в (2.6.18) дає:

$$E'' = \frac{1}{\varepsilon_a D_e}\left(eN\mu E - j_0 - \varepsilon_a u E'\right). \qquad (2.6.19)$$

Якщо до того ж виключити N в (2.6.19) за допомогою (2.6.17), то прийдемо до рівняння

$$\varepsilon_a D_e E'' = eN_0\mu E + \varepsilon_a \mu E E' - j_0 - \varepsilon_a u E'$$

або

$$D_e E'' + (u - \mu E)E' = \frac{eN_0}{\varepsilon_a}\mu E - \frac{j_0}{\varepsilon_a}. \qquad (2.6.20)$$

Розкладемо $\mu(E)$ у ряд і обмежимося двома членами:

$$\mu(E) = \mu(0) + \mu'(0)E. \qquad (2.6.21)$$

Після підстановки (2.6.21) в (2.6.20) маємо:

$$D_e E'' + \left(u - \mu(0)E - \mu'(0)E^2\right)E' = \frac{eN_0}{\varepsilon_a}\left(\mu(0)E + \mu'(0)E^2\right) - \frac{j_0}{\varepsilon_a}. \qquad (2.6.22)$$

Порівняємо (2.6.22) з рівнянням (2.6.4) для дисипативного солітна:

$$\nu v'' + (u - v_0)v' = \beta v - \alpha v^2.$$

Ці рівняння подібні. Тому так само, як і для дисипативного солітна, коефіцієнт при E' повинен дорівнювати нулю, тобто

$$u - \mu(0)E - \mu'(0)E^2 \approx u - \mu(E)E = 0.$$

Це означає, що швидкість відокремленої хвилі й дрейфової швидкості приблизно дорівнює μE. З урахуванням цього (2.6.22) приймає вигляд:

$$D_e E'' = \tilde{\alpha}E^2 + \tilde{\beta}E + \tilde{\gamma}, \qquad (2.6.23)$$

де $\tilde{\alpha} = \frac{eN_0}{\varepsilon_a}\mu'(0)$, $\tilde{\beta} = \frac{eN_0}{\varepsilon_a}\mu(0)$, $\tilde{\gamma} = -\frac{j_0}{\varepsilon_a}$. Рівняння (2.6.23), (2.6.6) аналогічні, тому (2.6.23) допускає розв'язок у вигляді дисипативного солітона. Для його виникнення необхідно, щоб вольт-амперна характеристика мала відрізок з негативним опором (рис. 2.16). При $E_1 < E < E_2$ можлива генерація електричних доменів (солітонів Ганна).

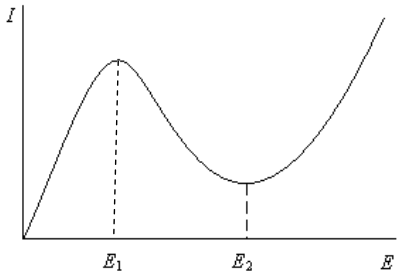


Рис. 2.16. Вольт-амперна характеристика діода Ганна. Генерація солітонів можлива на відрізку кривої від E_1 до E_2

2.6.6. Нелінійна відокремлена хвиля в радіоелектронних приладах

Розглянемо одновимірний електронний потік, що рухається уздовж осі x з незбуреною швидкістю v_0. Потік вважається повністю іонно-скомпенсованим. Поперечний рух відсутній. Розподілом частинок за швидкостями й релятивістськими ефектами нехтуємо.

В якості вихідних рівнянь виберемо рівняння руху електронів

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}, \qquad (2.6.24)$$

Рівняння безперервності для частинок

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0, \quad \vec{j} = N\vec{v} \qquad (2.6.25)$$

і рівняння Максвелла з $\varepsilon = 1$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad (2.6.26)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0. \qquad (2.6.27)$$

Із (2.6.27) маємо, що поле потенційне, тобто

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\varphi_x\vec{i}, \qquad (2.6.28)$$

де φ – потенціал. Тоді (2.6.26) прийме вигляд:

$$\varphi_{xx} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{e}{\varepsilon_0}(N - N_0), \qquad (2.6.29)$$

де $\rho = e(N - N_0)$; N, N_0 – концентрація електронів у збуреному і незбуреному пучках.

З (2.6.24), (2.6.28) маємо:

$$v_t + vv_x = (e/m)\varphi_x. \qquad (2.6.30)$$

Співвідношення (2.6.25) зводиться до такого:

$$N_t + (Nv)_x = 0. \qquad (2.6.31)$$

Рівняння (2.6.29), (2.6.30), (2.6.31) становлять замкнуту систему для невідомих функцій v, N і φ. Її розв'язок шукаємо у вигляді стаціонарних хвиль із $\xi = x - ut$, де $u = \text{const}$. Тоді з (2.6.29), (2.6.30), (2.6.31) одержуємо

$$\varphi'' = -\frac{eN_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{N}{N_0} - 1\right), \qquad (2.6.32)$$

$$-uv' + vv' = (e/m)\varphi', \qquad (2.6.33)$$

$$-uN' + (Nv)' = 0. \qquad (2.6.34)$$

Покладемо, що при $\xi = \infty$: $N = N_0$, $v = v_0$, $\varphi = 0$. Тоді перші інтеграли рівнянь (2.6.33), (2.6.34) мають вигляд:

$$-uv + v^2 / 2 = (e / m)\varphi + C_1, \tag{2.6.35}$$

$$-uN + (Nv) = C_2. \tag{2.6.36}$$

Звідси з урахуванням граничних умов

$$C_1 = -uv_0 + \frac{v_0^2}{2}, \tag{2.6.37}$$

$$C_2 = -uN_0 + N_0 v_0. \tag{2.6.38}$$

Підставляючи (2.6.37), (2.6.38) в (2.6.35), (2.6.36), одержимо

$$\frac{e}{m}\varphi = \frac{v^2 - 2vu - (v_0^2 - 2v_0 u)}{2} = \frac{(v-u)^2 - (v_0 - u)^2}{2}, \tag{2.6.39}$$

$$\frac{N}{N_0} = \frac{v_0 - u}{v - u}. \tag{2.6.40}$$

Розв'язавши (2.6.39) відносно $(v - u)$ і підставивши його в (2.6.40), маємо:

$$\frac{N}{N_0} = (v_0 - u)\left(2\frac{e}{m}\varphi + (v_0 - u)^2\right)^{-1/2}. \tag{2.6.41}$$

З урахуванням (2.6.41) рівняння (2.6.32) приймає вигляд:

$$\varphi'' = F(\varphi), \tag{2.6.42}$$

де

$$F(\varphi) = -\frac{eN_0}{\varepsilon_0}\left[(v_0 - u)\left(2\frac{e}{m}\varphi + (v_0 - u)^2\right)^{-1/2} - 1\right].$$

Можна показати, що рівняння (2.6.42) має розв'язок як у вигляді періодичних, так і відокремлених хвиль. Зокрема, при відносно слабкій нелінійності функцію $F(\varphi)$ можна розкласти в ряд і обмежитися першими трьома членами:

$$F(\varphi) \approx F(\varphi_0) + F_\varphi{}'(\varphi_0)(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2}F_\varphi{}''(\varphi_0)(\varphi - \varphi_0)^2 \equiv$$

$$\equiv \alpha + \beta\varphi + \gamma\varphi^2. \tag{2.6.43}$$

З урахуванням (2.6.43) співвідношення (2.6.42) здобуває вигляд:

$$\varphi'' = \alpha + \beta\varphi + \gamma\varphi^2. \tag{2.6.44}$$

Рівняння (2.6.44), як відомо, описує дисипативний солітон (див. вираз (2.6.6)).

2.6.7. Нелінійна відокремлена хвиля в плазмі

Процеси в плазмі докладніше обговорюються в розділі 4. Тут розглянемо лише поширення нелінійної відокремленої хвилі.

В ізотропній плазмі з $T_e \gg T_i$(T_e, T_i – температура електронів і іонів) можуть поширюватися так звані іонно-звукові хвилі Рівняння руху й безперервності для іонів аналогічні (2.6.24), (2.6.25). Із них за тих самих умов на границі випливає співвідношення (2.6.41). Замість рівняння Пуассона (2.6.29) необхідно записати таке:

$$\varphi_{xx} = -\frac{e}{\varepsilon_0}(N_e - N_i),$$

де $N_{e,i}$ – концентрація електронів і іонів, причому N_e описується розподілом Больцмана:

$$N_e = N_0 e^{-e\varphi/kT_e},$$

де k – стала Больцмана. При цьому замість (2.6.32) маємо рівняння:

$$\varphi'' = -\frac{eN_0}{\varepsilon_0}\left(e^{-\frac{e\varphi}{kT_e}} - \frac{N_i}{N_0}\right), \tag{2.6.45}$$

де, як і в співвідношенні (2.6.41),

$$\frac{N_i}{N_0} = (v_0 - u)\left(2\frac{e}{m_i}\varphi + (v_0 - u)^2\right)^{-1/2}. \tag{2.6.46}$$

Тут m_i – маса іона. Підставляючи (2.6.46) в (2.6.45), одержимо

$$\varphi'' = F_1(\varphi), \tag{2.6.47}$$

де

$$F_1(\varphi) = -\frac{eN_0}{\varepsilon_0}\left(e^{-\frac{e\varphi}{kT_e}} - \frac{v_0 - u}{\sqrt{2\frac{e}{m_i}\varphi + (v_0 - u)^2}}\right).$$

Рівняння (2.6.47) аналогічне (2.6.42), тому й висновки у відношенні двох рівнянь подібні.

2.6.8. Рівняння синус-Гордона. Солітон і антисолітон

Продовжуємо вивчати *«родичів» солітонів.* Деякі з них описуються рівнянням для безрозмірної функції v вигляду [3, 21, 27, 29]:

$$v_{tt} + v_{xx} = f(v),$$

де $f(v)$ – нелінійна функція. Якщо $f(v) = \sin v$, рівняння називається рівнянням *синус-Гордона* (це невдалий переклад з англійської, українською

мовою варто було б писати «рівняння Гордона синусоїдального типу») і має вигляд:

$$v_{tt} + v_{xx} = \sin v. \qquad (2.6.48)$$

Рівняння такого типу виникають, наприклад, у фізиці твердого тіла й напівпровідниковій електроніці. Періодичність правої частини співвідношення (2.6.48) зумовлена періодичністю кристалічної решітки.

Оскільки метод розв'язання рівняння (2.6.48) однаковий для знаків $\pm$, надалі розглянемо рівняння

$$v_{tt} + v_{xx} = \sin v. \qquad (2.6.49)$$

Розв'язок шукаємо у вигляді $v = v(x - ut)$, тоді з (2.6.49) випливає

$$u^2 v'' + v'' = \sin v, \qquad v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0. \qquad (2.6.50)$$

Множачи рівняння на $v' \neq 0$ й інтегруючи, одержимо

$$\frac{1+u^2}{2}(v')^2 = -\cos v + C_1. \qquad (2.6.51)$$

З урахуванням граничних умов $C_1 = 1$. Тоді (2.6.51) прийме вигляд:

$$\frac{1+u^2}{2}(v')^2 = 1 - \cos v$$

або

$$v' = \pm\frac{2}{\sqrt{1+u^2}}\sin\frac{v}{2}.$$

Розділяючи змінні, одержимо

$$\frac{dv}{\sin\frac{v}{2}} = \pm 2a d\xi,$$

де $a = (1+u^2)^{-1/2}$. Після інтегрування маємо:

$$2\ln\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}v\right) = \pm 2a\xi + C_2.$$

Вибором системи відліку ξ покладемо $C_2 = 0$. Тоді розв'язок задачі прийме вигляд:

$$v_\pm = 4\operatorname{arctg} e^{\pm a\xi}, \qquad (2.6.52)$$

де знаки $\pm$ відповідають знакам при a. Залежності $v_\pm(\xi)$ показані на рис. 2.17.

Із (2.6.52) випливає, що розв'язок є періодичною функцією з періодом 2π, це зумовлено періодичністю нелінійної сили $f(v) = \sin v$. Окрім того, кожному

періоду відповідають два розв'язки $v_+(\xi)$, $v_-(\xi)$, які названі, відповідно, *солітоном* і *антисолітоном*, іноді їх називають *кінком*[1] і *антикінком*, а також у теорії ефекту Джозефсона – *флуксоном* і *антифлуксоном* (від англ. слова flux – потік).

Додамо, що на солітон больше схожа функція $v_\pm{}'(\xi)$, ніж $v_\pm(\xi)$. Покажемо це.

Обчислюючи $v_\pm{}'(\xi)$, маємо:

$$v'_\pm = \pm 4a\frac{e^{\pm a\xi}}{1+\left(e^{\pm a\xi}\right)^2} = \pm\frac{4a}{e^{\pm a\xi} + e^{\mp a\xi}} = \pm\frac{2a}{\operatorname{ch} a\xi}. \qquad (2.6.53)$$

Залежність $v_\pm{}'(\xi)$ представляє одногорбу відокремлену хвилю (див. рис. 2.17).

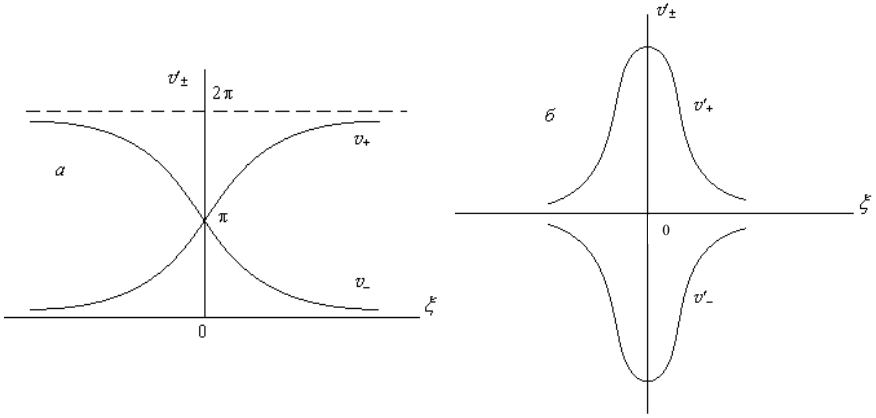


Рис. 2.17. Профіль відокремленої хвилі: а – $v_\pm(\xi)$; б – $v_\pm{}'(\xi)$

2.6.9. Нелінійне рівняння Шрьодінгера. Солітон обвідної

У задачах нелінійної радіофізики часто доводиться зустрічатися з рівнянням, що одержало назву *нелінійного рівняння Шрьодінгера* (НрШ). Воно має вигляд [1, 26, 39]:

$$iv_t + v_{xx} + \beta v|v|^2 = 0, \qquad \beta > 0, \qquad (2.6.54)$$

де i – уявна одиниця.

[1] Англійською kink – петля

Рівняння (2.6.54) відрізняється від розглянутих вище тим, що шукана функція (зазвичай це електромагнітне поле хвилі) – *комплексна.* Тому його розв'язок шукається у вигляді

$$v(t,x) = w(x - u_1 t)e^{i\varphi(x-u_2 t)}, \qquad (2.6.55)$$

де w і φ – обвідна й фаза електромагнітного сигналу. Зауважимо, що обвідна й фаза поширюються з різними швидкостями u_1 и u_2.

Підставляючи (2.6.55) в (2.6.54) і прирівнюючи окремо дійсні й уявні частини, одержимо систему рівнянь для w і φ:

$$u_2 w\varphi' + w'' - w\left(\varphi'\right)^2 + \beta w^3 = 0, \qquad (2.6.56)$$

$$-u_1 w' + 2w'\varphi' + w\varphi'' = 0. \qquad (2.6.57)$$

Помноживши (2.6.57) на $2w \neq 0$, одержимо рівняння

$$\left(w^2\left(2\varphi' - u_1\right)\right)' = 0, \qquad (2.6.58)$$

з якого випливає, що

$$w^2\left(2\varphi' - u_1\right) = C_1.$$

Через *довільність* у виборі w і φ (див. (2.6.55)) покладемо $C_1 = 0$. Тоді при $w \neq 0$ маємо:

$$2\varphi' - u_1 = 0. \qquad (2.6.59)$$

Звідси

$$\varphi = \frac{1}{2}u_1\xi_\varphi + C_2,$$

де $\xi_\varphi = x - u_2 t$. З тієї ж причини $C_2 = 0$,

$$\varphi = \frac{1}{2}u_1\xi_\varphi. \qquad (2.6.60)$$

Підставляючи φ' з (2.6.59) в (2.6.56), одержимо

$$\frac{1}{2}u_1 u_2 w + w'' - w\left(\frac{u_1}{2}\right)^2 + \beta w^3 = 0.$$

Тоді

$$w'' = w\frac{(u_1 - 2u_2)u_1}{4} - \beta w^3. \qquad (2.6.61)$$

Доповнимо (2.6.61) граничними умовами

$$w(\pm\infty) = w'(\pm\infty) = 0. \qquad (2.6.62)$$

Множення (2.6.61) на $w' \neq 0$ з подальшим інтегруванням дає

$$\frac{1}{2}(w')^2 = \frac{(u_1 - 2u_2)u_1}{8}w^2 - \frac{\beta}{4}w^4 + C_3, \qquad (2.6.63)$$

де в силу (2.6.62) $C_3 = 0$. Позначаючи

$$b^2 = (u_1 - 2u_2)u_1 > 0,$$

перепишемо (2.6.63) у вигляді

$$w' = \pm\frac{b}{2}w\sqrt{1 - \frac{2\beta}{b^2}w^2}.$$

Після цього, розділяючи змінні, одержимо

$$\frac{dw}{w\sqrt{1 - \frac{2\beta}{b^2}w^2}} = \pm\frac{b}{2}d\xi_w, \qquad (2.6.64)$$

де $\xi_w = x - u_1 t$. Вводячи

$$\frac{2\beta}{b^2}w^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 z}, \qquad (2.6.65)$$

з (2.6.64) одержимо

$$dz = \mp\frac{b}{2}d\xi_w,$$

звідки

$$z = \mp\frac{b}{2}\xi_w + C_4. \qquad (2.6.66)$$

Обмежимося знаком «плюс» и покладемо $C_4 = 0$. Тоді з (2.6.65), (2.6.66) маємо:

$$w = \frac{b}{\sqrt{2\beta}\,\mathrm{ch}\left(\frac{b}{2}\xi_w\right)}. \qquad (2.6.67)$$

З урахуванням (2.6.60), (2.6.67) шуканий розв'язок НрШ прийме виглад:

$$v(t,x) = \frac{v_m}{\mathrm{ch}\left(\frac{b}{2}(x - u_1 t)\right)}e^{i\frac{u_1}{2}(x-u_2 t)}, \qquad (2.6.68)$$

де $v_m = b/\sqrt{2\beta}$. Вигляд розв'язку (2.6.68) показаний на рис. 2.18.

Як видно з рис. 2.18, солітоном є обвідна процесу. Він так і називається – *солітон обвідної.* Зауважимо, що останній зустрічається не тільки в радіофізиці. Наприклад, солітон обвідної спостерігається на воді. Так, знаменитий *дев'ятий вал* під час шторму на морі (згадаємо картину І. К. Айвазовського «Дев'ятий вал») являє собою найбільший по рахунку дев'ятий горб, праворуч і ліворуч від нього розташовані по вісім горбів з поступово убуваючою висотою. Обвідною цих хвиль є солітон. Зауважимо,

що обговорюваний солітон відрізняється від класичного (порівняйте вирази (2.5.34), (2.6.68)).

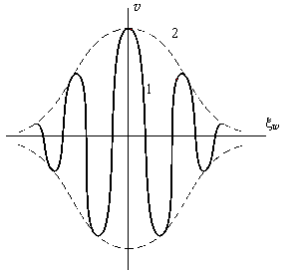


Рис. 2.18. Розв'язок НрШ:
1 – сам розв'язок;
2 – обвідна.

2.6.10. Багатовимірний солітон

Із багатовимірних солітонів найкраще вивчений *двовимірний солітон.* Він описується рівнянням Кадомцева – Петвіашвіші (КП), яке отримане в 1970 р. [26]:

$$(v_t + vv_x + \beta v_{xxx})_x = \alpha v_{yy}, \qquad \alpha, \beta = \text{const}. \qquad (2.6.69)$$

При $\alpha = 0$ рівняння КП переходить у рівняння КдВ. Співвідношення (2.6.69) описує, наприклад, *вихори* в атмосферах планет (*циклон*, *юпітеріанська Велика Червона Пляма, плазмові вихори й ін.*).

Прикладом чотиривимірного солітона є *інстантон,* за допомогою якого здійснюється трансформація елементарних частинок.

2.6.11. Приклади солітонів

«Родичами» солітонів є багато *локалізованих утворень* або *нелінійних структур* у природі. Наведемо низку прикладів.

В астрофізиці й космології до солітоноподібних об'єктів відносяться *спіральні галактичні структури* й *чорні діри.*

Спіральні галактичні структури *(спіральні рукави)* являють собою спіралеподібні хвилі густини, що поширюються в речовині галактики та зберігають практично незмінною свою форму. Вважається, що такі хвилі генеруються обертовим баром (з англ. bar – смужка, брусок) або в результаті розвитку нестійкості.

Чорною дірою, як відомо, називають астрофізичний об'єкт, у якому поле тяжіння настільки сильне, що друга космічна швидкість, такого об'єкта перевищує швидкість світла *c*. Оскільки в природі ніщо не може рухатися зі швидкістю, більшою за *c*, чорну діру не може покинути ні речовина, ні

випромінювання. Через свою незмінність чорна діра також відноситься до солітонів.

Прикладом солітона в Сонячній системі є великомасштабний вихор в атмосфері Юпітера – *Велика Червона Пляма.* Це, ймовірно, найбільший циклон в нашій системі, його розмір – 40 тис. км × 13 тис. км (радіус планети – приблизно 71 тис. км).

Передбачається існування солітонів при конвекції гарячих *згустків плазми* з надр Сонця.

На Землі солітони спостерігаються в різних середовищах – в літосфері (твердій оболонці Землі), в атмосфері, в океані, в іоносфері й магнітосфері. У земній корі й океані солітони генеруються при землетрусах, причому солітони в океані називають *цунамі* (японською мовою – велика хвиля). Зазвичай висота цунамі біля берега не перевищує 50 м, у осередку землетрусу – не більше 10 м. Найбільша зареєстрована висота цунамі (сплеску води) склала 524 м. Цей гігантський водяний «солітон» виник 10.07.1958 р. у результаті сходу лавини породи об'ємом близько $3{\cdot}10^8$ м^3 зі схилів гори Фейруезер з висоти 900 м у бухту Літуя (Аляска, США). Енергія цунамі при цьому склала величину $\sim 4{\cdot}10^{14}$ Дж, що еквівалентна енергії 100-кілотонної ядерної бомби.

Зареєстрована рекордна дальність поширення цунамі – приблизно 120 тис. км. Це трапилося при падінні частини острова Кракатау в результаті вибуху однойменного вулкана в 1883 р. Солітон при цьому тричі обігнув земну кулю.

Типовий представник атмосферного солітона – це *циклон.* Його діаметр досягає приблизно 1000 км. Солітони в атмосфері, іоносфері й магнітосфері генеруються при значних енерговиділеннях: землетрусах, виверженнях вулканів, потужних вибухах, польотах великих ракет, спалахах на Сонці.

Чимало прикладів виникнення солітонів у мікросвіті. Так, у твердотільній електроніці спостерігаються *солітони Ганна* (див. пункт 2.6.5). У квантовій радіофізиці солітони мають місце в так званому явищі *самонаведеної прозорості.* При цьому енергія, передана дворівневому резонансному середовищу передньою частиною потужного лазерного імпульсу тривалістю $\sim$ 10–100 пс, відбирається його задньою частиною. При дотриманні певних умов форма імпульсів на виході й вході квантової системи не відрізняється, що й дозволяє говорити про солітон. Цікаво, що швидкість поширення такого солітона в кілька сотень разів менша, ніж швидкість світла. Даний ефект був виявлений і вивчений у середині 1960-х рр.

Уже давно сформувалася ідея про те, що елементарні частинки – це солітоноподібні об'єкти або *солітони квантових полів*. Зокрема, солітонами, очевидно, є *монополь Дірака* (гіпотетичний елементарний магніт з одним полюсом, передбачений П. Діраком на початку 1930-х рр.), так званий *флуксон* (квант магнітного потоку в ефекті Джозефсона). Величина флуксона й розподіл у ньому магнітного поля не змінюються при переміщенні в «довгому» джозефсонівському контакті.

У біофізиці властивості солітона притаманні *нервовим імпульсам*, які мають електричну природу. Для людини їхня амплітуда ~ 50 мВ, швидкість ~ 100 м/с. Важливо, що нервовим волокнам поширюється не електричний струм, а фронт електрохімічної реакції, що і породжує біжучий імпульс напруги. У цьому випадку укручення фронту хвилі зумовлене нелінійною залежністю проникності мембрани від амплітуди електричного імпульсу. Нелінійність урівноважується дифузією, що й призводить до виникнення солітоноподібного імпульсу дисипативного типу (див. пункт 2.6.4).

Дуже багата на солітони радіофізика й, зокрема, плазмова радіофізика. Сюди належать вже згадані домени Ганна, явище самонаведеної прозорості, солітони в лініях передач, відокремлені хвилі в потоках заряджених частинок радіоелектронних приладів (див. пункт 2.6.6), солітони в плазмових пристроях (див. пункт 2.6.7) та ін.

Солітони, наприклад, отримані при розв'язанні деяких рівнянь математичної економіки.

Таким чином, солітон – це не екзотичне утворення, як уважалося раніше. Солітон – це *фундаментальне поняття* в нелінійному світі й у фізиці зокрема. Воно має не менше значення, ніж поняття лінійного осцилятора в лінійному світі (фізиці).

2.6.12. Можливі застосування солітонів

Природа подарувала нам досить велике розмаїття солітонів. Набагато складнішою є справа з їх застосуванням. Унікальну властивість солітона – його незмінність у процесі поширення – дуже заманливо використовувати для телекомунікацій. Поки не ясно, як це можна реалізувати в радіодіапазоні, використовуючи атмосферні канали зв'язку. Що стосується нелінійних ліній передачі з дисперсією, то тут принципових труднощів, схоже, немає. Не дуже ясно тільки, як компенсувати неминучі втрати.

Досить перспективним є використання солітонів в оптичних волокнах. Ще в середині 1980-х рр. в лабораторії Белла (США) А. Хасегава виконав докладні числові розрахунки й показав можливість практичного використання оптичних солітонів для передачі значних об'ємів інформації.

У 1988 р. його висновки були підтверджені співробітниками тієї ж лабораторії Л. Молленауером і К. Смітом. Їм вдалося вперше реалізувати солітонний телеграф, прийнявши сигнал, що пройшов шлях близько 4 тис. км. У кращих світловодах втрати становлять ~ 5 % на кілометр. Тому для компенсації втрат необхідно здійснювати підживлення солітонів (згадаємо дисипативний солітон, див. пункт 2.6.4) Для цього можна використовувати лазерне підсвічування. Механізм посилення солітонів пов'язаний з ефектом комбінаційного розсіяння Рамана, відкритим у 1928 р.

Оптичні солітони – майже ідеальні імпульси для телекомунікацій. Через відсутність розширення їх можна розташовувати один до одного. Тривалість кожного солітона ~ 1 пс. Один біт інформації кодується наявністю або відсутністю солітона. При цьому пропускна здатність системи телекомунікацій не більше 10^3 Гбіт/с. При цьому її можна збільшити, наприклад, в 5 разів застосуванням мультиплексування по частоті (тобто багатоканальності). Кількість каналів обмежена частотною залежністю волоконних підсилювачів. Подвоєння числа каналів є можливим за рахунок використання різних поляризацій. Таким чином, названий вище параметр зростає до 10^4 Гбіт/с.

При використанні фемтосекундних солітонів пропускна здатність може збільшитися ще на 2–3 порядки. Для порівняння зазначимо, що традиційні оптоволоконні телекомунікаційні системи забезпечують пропускну здатність близько 1 Гбіт/с.

Можливо також застосування солітонів в ЕОМ з оптичними елементами пам'яті і оптичними лініями зв'язку.

Питання для самоконтролю

1. Як зміниться рівняння Римана з урахуванням дисперсії?

2. Наведіть рівняння Кортевега – де Вріза (КдВ) і опишіть фізичний зміст його членів.

3. Наведіть приклади рівнянь КдВ, які зустрічаються в радіофізиці.

4. Опишіть, як відбувається еволюція профілю гармонічної хвилі при збільшенні її амплітуди в диспергуючому середовищі.

5. Що таке класичний солітон?

6. Що відбувається з класичним солітоном при збільшенні його амплітуди?

7. Опишіть історію дослідження солітонів.

8. Наведіть рівняння Бюргерса – Кортевега – де Вріза (БКдВ) і опишіть фізичний зміст його членів.

9. Чим відрізняється дисипативний солітон від класичного? За яких умов поширюється дисипативний солітон?

10. За яких умов генеруються солітони Ганна?

11. Чи є солітон Ганна дисипативним солітоном?

12. Опишіть нелінійну відокремлену хвилю в радіоелектронних пристоях.

13. Опишіть нелінійну відокремлену хвилю в плазмі.

14. Що таке солітон і антисолітон?

15. Що таке кінк і антикінк?

16. Наведіть нелінійне рівняння Шрьодінгера й опишіть фізичний зміст його членів.

17. Що таке солітон обвідної?

18. Наведіть нелінійне рівняння Кадомцева – Петвіашвілі й опишіть фізичний зміст його членів.

19. Наведіть приклади солітонів.

20. Чим відрізняється солітон від класичного солітона?

21. Опишіть можливі застосування солітонів.

Задачі

1. Знайти солітоноподібний розв'язок модифікованого рівняння КдВ (мКдВ)

$$v_t + 6\alpha v^2 v_x + \beta v_{xxx} = 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,$$
$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = v''(\pm\infty) = 0.$$

2. Оцінити амплітуду v_0 й ширину ξ_0 солітона, не розв'язуючи рівняння мКдВ

$$v_t + 6\alpha v^2 v_x + \beta v_{xxx} = 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,$$
$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = v''(\pm\infty) = 0.$$

Порівняти з точним розв'язком.

3. Знайти солітоноподібний розв'язок рівняння Гордона типу:

$$v_{tt} + v_{xx} = 2v^3,$$
$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0.$$

4. Знайти й проаналізувати розв'язок нелінійного рівняння Шрьодингера виду:

$$iv_t + v_{xx} + \beta v\left|v\right|^2 = 0,$$
$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0,\ \beta > 0,$$
$$\xi_1 = x + u_1 t,\ \xi_2 = x + u_2 t.$$

5. Показати, що рівняння

$$v_t + v_0 v_x = D v_{xx} + 2\alpha v^3 - \beta v,$$
$$v_0, \alpha, \beta, D = \text{const},\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ D > 0.$$

з граничними умовами $v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0$ описує дисипативний солітон.

6. Знайти солітоноподібний розв'язок рівняння з нульовими умовами на функцію $v(\xi)$ і її перші дві похідні при $\xi = \pm\infty$:

а) $v_t + vv_x + \beta v_{xxt} = 0,\ \beta < 0,$

б) $v_t + vv_x + \beta v_{xtt} = 0,\ \beta > 0,$

в) $v_t + vv_x + \beta v_{ttt} = 0,\ \beta < 0,$

г) $v_x + vv_t + \beta v_{ttt} = 0,\ \beta > 0.$

7. Знайти солітоноподібний розв'язок рівняння з нульовими умовами на функцію $v(\xi)$ і її перші три похідні при $\xi = \pm\infty$:

а) $-v_{tt} + \frac{\alpha}{2}\left(v^2\right)_{xx} + \beta v_{xxxx} = 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,$

б) $v_{tt} + \frac{\alpha}{2}\left(v^2\right)_{xt} + \beta v_{xxxx} = 0,\ \alpha > 0,\ \beta < 0,$

в) $v_{xx} + \frac{\alpha}{2}\left(v^2\right)_{tt} + \beta v_{xxxx} = 0,\ \alpha < 0,\ \beta < 0,$

г) $v_{xt} + \frac{\alpha}{2}\left(v^2\right)_{tt} + \beta v_{xxxx} = 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

8. Знайти солітоноподібний розв'язок рівняння з нульовими умовами на функцію $v(\xi)$ і її перші три похідні при $\xi = \pm\infty$:

а) $v_{tt} + \frac{\alpha}{2}\left(v^2\right)_{xx} + \beta v_{xxxt} = 0,\ \alpha < 0,\ \beta > 0,$

б) $v_{tt} + \frac{\alpha}{2}\left(v^2\right)_{xx} + \beta v_{xxtt} = 0$, $\alpha < 0$, $\beta < 0$,

в) $v_{tt} + \frac{\alpha}{2}\left(v^2\right)_{xx} + \beta v_{xttt} = 0$, $\alpha < 0$, $\beta > 0$,

г) $v_{tt} + \frac{\alpha}{2}\left(v^2\right)_{xx} + \beta v_{tttt} = 0$, $\alpha < 0$, $\beta < 0$.

9. Вияснити, чи має солітоноподібний розв'язок рівняння КдВ з нульовими умовами на функцію $v(\xi)$ і її перші дві похідні при $\xi = \pm\infty$, якщо $\beta < 0$:

а) $v_t + vv_x + \beta v_{xxx} = 0$,

б) $v_t + \alpha v^2 v_x + \beta v_{xxx} = 0$.

Порівняти отриманий розв'язок з розв'язком для $\beta > 0$.

10. Показати, що рівняння

а) $v_t + \alpha v_x + vv_x + \beta v_{xxx} = 0$, $\beta > 0$,

б) $v_t + \alpha v_t + vv_x + \beta v_{xxx} = 0$, $\beta > 0$

зводяться до рівняння КдВ. Знайти їх розв'язок. Які умови накладаються на α?

2.7. Самовплив пучків електромагнітних хвиль

Особливістю самовпливу пучків хвиль є їхній стиск (фокусування) або розширення (дефокусування) у напрямку, перпендикулярному напрямку поширення хвилі.

Самовплив пучків електромагнітних хвиль описується рівняннями (2.3.19) і (2.3.20). Розглянемо детальніше перше з них [6]:

$$2\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\nabla_\perp \psi\right)^2 = \frac{\varepsilon_{NL}}{\varepsilon_L} + \frac{\Delta_\perp A}{k^2 A}. \qquad (2.7.1)$$

Зручно ввести в розгляд кут відхилення променів від осі пучка. Він дорівнює

$$\theta = |\nabla_\perp \psi|.$$

Тоді (2.7.1) прийме вигляд:

$$2\frac{\partial \psi}{\partial x} + \theta^2 = \frac{\varepsilon_{NL}}{\varepsilon_L} + \frac{\Delta_\perp A}{k^2 A}. \qquad (2.7.2)$$

2.7.1. Оцінка величини ефекту

Розв'язання рівнянь ейконалу й переносу (2.3.19) і (2.3.20) – задача досить складна і громіздка (див., наприклад, [6, 35]). Тому нижче обмежимося оцінкою розв'язку, використовуючи, як і в пункті 2.5.4, оцінку похідної. Для цього зазначимо, що в рівнянні (2.7.2) член

$$\frac{\Delta_\perp A}{k^2 A}$$

описує дифракцію пучка. Вона, як відомо, призводить до його розширення. Вважаючи, що на осі пучка амплітуда хвилі дорівнює $A(0)$, а радіус пучка r_0, маємо:

$$|\nabla_\perp A| \sim \frac{A(0)}{r_0}, \quad |\Delta_\perp A| = \left|\nabla_\perp^2 A\right| \sim \frac{A(0)}{r_0^2}.$$

При цьому дифракційний член має порядок

$$\left|\frac{\Delta_\perp A}{k^2 A}\right| \sim \frac{1}{(kr_0)^2} \sim \left(\frac{\lambda}{r_0}\right)^2, \qquad (2.7.3)$$

де λ – довжина хвилі випромінювання.

Член $\varepsilon_{NL} / \varepsilon_L$ описує нелінійну рефракцію, тобто викривлення променів у нелінійному середовищі. Рефракція може призводити як до розширення пучка (при $\varepsilon_{NL} < 0$), так і до його фокусування (при $\varepsilon_{NL} > 0$). Для оцінки кута дифракційного розширення зажадаємо, щоб величина θ^2 була порядку дифракційного члена (2.7.3). Тоді

$$\theta_d \sim \frac{1}{kr_0}. \qquad (2.7.4)$$

Для оцінки кута рефракції зажадаємо, щоб

$$\theta_r^2 \sim \frac{\varepsilon_{NL}}{\varepsilon_L}.$$

Звідси

$$\theta_d \sim \left|\frac{\varepsilon_{NL}}{\varepsilon_L}\right|^{1/2}. \qquad (2.7.5)$$

2.7.2. Критична інтенсивність пучка

Оскільки нелінійна рефракція може призводити до фокусування пучка, особливий інтерес представляє ситуація, коли *дифракційне розширення пучка*

точно скомпенсоване рефракційним стиском, тобто $\theta_d = \left|\theta_r\right|$. При цьому, як випливає з (2.7.4), (2.7.5),

$$\frac{1}{kr_0} \sim \left|\frac{\varepsilon_{NL}}{\varepsilon_L}\right|^{1/2}. \qquad (2.7.6)$$

Наприклад, для квадратичної нелінійності

$$\varepsilon_{NL} = \gamma \frac{A^2}{A_c^2}, \qquad (2.7.7)$$

де A_c – характерна амплітуда поля, γ – коефіцієнт (стискання пучка має місце при $\gamma > 0$). Тоді умова (2.7.6) зводиться до такої:

$$A_{cr}^2 \sim A_c^2 \frac{\varepsilon_L}{\gamma k^2 r_0^2}.$$

Тут A_{cr}^2 – критична інтенсивність поля хвилі, при якій $\theta_d = \left|\theta_r\right|$, а значить настає *ефект самоканалювання.* Пучок при цьому не має розходження, тобто не змінює своєї ширини в процесі поширення. Такий ефект мав би велике практичне значення. Всі труднощі зводяться до дотримання умов *точної компенсації* зазначених вище спотворень пучка. Нижче розглянемо ефект самоканалювання докладніше.

2.7.3. Ефект самоканалювання

Для двовимірного пучка рівняння (2.3.17) має вигляд:

$$2ik\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{NL}\left(\left|A\right|\right)A, \qquad (2.7.8)$$

де $A(x,y)$ – комплексна амплітуда. Розв'язок (2.7.8) шукаємо у вигляді [6]:

$$A(x,y) = A_g(y)e^{-i\Gamma x}, \qquad (2.7.9)$$

де $A_g(y)$ – дійсна амплітуда поля у хвилеводі, Γ – стала поширення. Підстановка (2.7.9) в (2.7.8) дає:

$$2k\Gamma A_g = A_g'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{NL}(A_g)A_g, \qquad (2.7.10)$$

де $A_g'' = d^2A_g\big/dy^2$. Вважаючи, що

$$\varepsilon_{NL} = \gamma \frac{A_g^2}{A_c^2},$$

з (2.7.10) одержимо

$$2k\Gamma A_g = A_g'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \gamma \frac{A_g^3}{A_c^2}$$

або

$$A_g'' = bA_g - aA_g^3, \qquad (2.7.11)$$

де $a = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\gamma}{A_c^2}$, $b = 2k\Gamma$. Граничні умови для рівняння (2.7.11) мають вигляд:

$$A_g\left(\pm\infty\right) = A_g'\left(\pm\infty\right) = 0. \qquad (2.7.12)$$

Множачи (2.7.11) на $A_g' \neq 0$ й інтегруючи, одержимо

$$\left(A_g'\right)^2 = bA_g^2 - \frac{a}{2}A_g^4 + C_1,$$

де в силу граничних умов (2.7.12) $C_1 = 0$. Тоді

$$A_g' = \pm\sqrt{b}A_g\sqrt{1 - \frac{a}{2b}A_g^2}, \qquad (2.7.13)$$

де $1 - \frac{a}{2b}A_g^2 \geq 0$. Розділяючи змінні (2.7.13) і інтегруючи, одержимо

$$A_g(y) = \frac{A_{gm}}{\operatorname{ch} y/y_0}, \qquad (2.7.14)$$

де $A_{gm} = (2b\ /\ a)^{1/2}$, $y_0 = b^{-1/2}$.

Отриманий розв'язок (2.7.14) нагадує солітон обвідної (2.6.67). Зрозуміло, в цьому випадку йдеться не про солітон як про стаціонарну хвилю, а про розподіл поля хвилі в поперечному напрямку відносно напрямку поширення. Необхідно відповісти на запитання: чому математичні вирази виявилися подібними?

Повернемося до рівняння (2.7.11) і продиференціюємо його по y, після чого одержимо

$$A_g''' = bA_g' - 3aA_g^2A_g'$$

або

$$-bA_g' + 3aA_g^2A_g' + A_g''' = 0.$$

Якщо ввести $\tilde{\xi} = \tilde{x} - b\tilde{t}$, то останнє співвідношення може бути реконструйоване до вигляду

$$A_{gt} + 3aA_g^2A_{gx} + A_{gxxx} = 0.$$

Такий вигляд має модифіковане рівняння КдВ, що описує, зокрема, солітон обвідної (див. пункти 2.6.3, 2.6.9).

Питання для самоконтролю

1.Як виникає самовплив пучків електромагнітних хвиль?
2. У чому особливість взаємодії пучків електромагнітних хвиль?
3. Що таке нелінійна рефракція?
4. За яких умов виникає ефект самоканалювання?

2.8. Когерентна взаємодія хвиль. Нестійкості

Під дією потужної хвилі, що називається *хвилею накачки,* за певних умов може виникнути *розгойдування* інших хвиль із іншими параметрами, наприклад, з іншою частотою. Такі хвилі завжди існують, хоча їхня амплітуда вкрай незначна й визначається *рівнем електромагнітних шумів.* Так, у нелінійних середовищах відбувається генерація 2-ї, 3-ї і більш високих гармонік, а також комбінаційних частот.

2.8.1. Двохвильова взаємодія

Розглянемо середовище без втрат. Нехай хвиля накачки з амплітудою A_0 збуджує хвилю з амплітудою A_1. Система вкорочених рівнянь (цікавимося розвитком процесу в часі[1]) має вигляд:

$$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_1, \qquad A_1(0) = A_{10}, \tag{2.8.1}$$

$$\frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1 A_0, \qquad A_0(0) = A_{00}, \tag{2.8.2}$$

[1] Взаємодія хвиль може проходити як у просторі, так і в часі. Оскільки час поширення фронту хвилі й шлях, що вона проходить, пов'язані між собою, то можна обмежитися розглядом взаємодії в часі.

де γ_0, γ_1 – коефіцієнти взаємодії. Оскільки хвиля накачки віддає свою енергію, то $\frac{dA_0}{dt} < 0$ і $\gamma_0 < 0$. При цьому $\frac{dA_1}{dt} > 0$ й $\gamma_1 > 0$.

Несамоузгоджена постановка задачі. Будемо вважати, що $A_0(t) \gg A_1(t)$. При цьому зменшенням енергії хвилі накачки можна знехтувати і вважати, що $dA_0/dt \approx 0$ у рівнянні (2.8.2) і $A_0(t) \approx A_{00}$ у рівнянні (2.8.1). Тоді з (2.8.1) випливає

$$\frac{dA_1}{dt} \approx \gamma_1 A_{00} A_1.$$

Звідси

$$A_1(t) = A_{10} e^{\gamma_1 A_{00} t},$$

тобто амплітуда збудженої хвилі наростає в часі за експоненціальним законом з постійною часу $\tau_i = \left(\gamma_1 A_{00}\right)^{-1}$. Такі процеси пов'язані з нестійкостями.

Нестійкістю будемо називати коливальний або хвильовий процес, що супроводжується швидким (часто експоненціальним) зростанням амплітуди.

Величина $\lambda_0 = \tau_i^{-1} = \gamma_1 A_{00}$ називається *інкрементом нестійкості.* Важливо, що $\lambda_0 \sim A_{00}$.

Нестійкість виникає в результаті когерентної взаємодії хвиль. З радіотехнічної точки зору нестійкість – результат дії *позитивного зворотного зв'язку.*

Самоузгоджена постановка задачі. Врахуємо зменшення амплітуди хвилі накачки. При цьому система рівнянь (2.8.1), (2.8.2) розв'язується спільно. Беручи до уваги подібність цих рівнянь, розділимо (2.8.1) на (2.8.2) і знайдемо перший інтеграл системи рівнянь:

$$\frac{dA_1}{dA_0} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}.$$

Звідси маємо *співвідношення Менлі – Роу*, які є різновидом закону збереження енергії:

$$\frac{A_1 - A_{10}}{\gamma_1} = \frac{A_0 - A_{00}}{\gamma_0}.$$

Тоді

$$A_0 = A_{00} + \frac{\gamma_0}{\gamma_1}(A_1 - A_{10}). \tag{2.8.3}$$

Підставляючи (2.8.3) в (2.8.1), одержимо

$$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_1 \left(A_{00} + \frac{\gamma_0}{\gamma_1}(A_1 - A_{10}) \right)$$

або

$$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_0 A_1 \left(A_1 - A_{10} + \frac{\gamma_1}{\gamma_0} A_{00} \right). \qquad (2.8.4)$$

Нехай при $\frac{dA_1}{dt} = 0$ амплітуда $A_1 = A_{1\infty}$. Тоді з (2.8.4) маємо:

$$A_{1\infty} = A_{10} - \frac{\gamma_1}{\gamma_0} A_{00}. \qquad (2.8.5)$$

Важливо, що $A_{1\infty} \geq A_1(t) \geq A_{10}$. Перепишемо (2.8.4) у вигляді

$$\frac{dA_1}{dt} = -\gamma_0 A_1 \left(A_{1\infty} - A_1 \right).$$

Звідси

$$\frac{dA_1}{A_1(A_{1\infty} - A_1)} = -\gamma_0 dt.$$

Інтегрування цього виразу й подальше потенціювання дає

$$\frac{A_1}{A_{10}} \frac{A_{1\infty} - A_{10}}{A_{1\infty} - A_1} = e^{-\gamma_0 A_{1\infty} t}. \qquad (2.8.6)$$

При $t = 0$ значення $A_1(0) = A_{10}$. Розв'язуючи (2.8.6) відносно A_1, одержимо

$$\begin{aligned} A_1(t) &= A_{10} \frac{A_{1\infty} e^{-\gamma_0 A_{1\infty} t}}{A_{1\infty} + A_{10}\left(e^{-\gamma_0 A_{1\infty} t} - 1\right)}, \\ A_0(t) &= A_{00} \frac{A_{1\infty}}{A_{1\infty} + A_{10}\left(e^{-\gamma_0 A_{1\infty} t} - 1\right)}. \end{aligned} \qquad (2.8.7)$$

Оскільки $A_{10} \to 0$ та $\gamma_0 < 0$, з (2.8.5) маємо:

$$-\gamma_0 A_{1\infty} \approx \gamma_1 A_{00} = \lambda > 0.$$

Тоді (2.8.7) прийме вигляд:

$$\begin{aligned} A_1(t) &\approx A_{10} \frac{A_{1\infty} e^{\lambda t}}{A_{1\infty} + A_{10}\left(e^{\lambda t} - 1\right)}, \\ A_0(t) &\approx A_{00} \frac{A_{1\infty}}{A_{1\infty} + A_{10}\left(e^{\lambda t} - 1\right)}. \end{aligned} \qquad (2.8.8)$$

Співвідношення для $A_1(t)$ описує *розвиток нестійкості* в часі. При малих часах (*лінійна стадія нестійкості*) $\lambda t < 1$, а

$$A_1(t) \approx A_{10} e^{\lambda t},$$

тобто амплітуда $A_1(t)$ наростає експоненціально зі зростанням часу. Якщо ж $\lambda t \gg 1$ (*нелінійна стадія нестійкості*), то $A_1(t) \approx A_{1\infty}$ (рис. 2.19). На нелі-

нійній стадії відбувається насичення рівня нестійкості, що пов'язано з кінцевим значенням енергії хвилі накачки.

2.8.2. Врахування згасання при двохвильовій взаємодії

У цьому випадку рівняння (2.8.1) і (2.8.2) перетворяться до вигляду

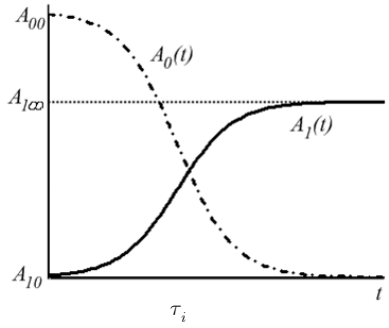


Рис. 2.19. Залежність амплітуд хвиль A_1 (а) і A_0 (б) від часу в самоузгодженій постановці задачі

$$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_1 - \nu_1 A_1, \qquad (2.8.9)$$

$$\frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1 A_0 - \nu_0 A_0, \qquad (2.8.10)$$

де ν_1, ν_0 – позитивні коефіцієнти, що описують втрати в системі. Оскільки $\gamma_1 > 0$, то рівняння (2.8.9) має стаціонарний розв'язок. Для його знаходження покладемо $d/dt = 0$. При цьому

$$\gamma_1 A_0 A_1 - \nu_1 A_1 = 0.$$

Оскільки $A_1 \neq 0$,

$$\gamma_1 A_0 - \nu_1 = 0.$$

Звідси

$$A_0 = \frac{\nu_1}{\gamma_1} \equiv A_0^{(0)},$$

де $A_0^{(0)}$ – *порогове значення амплітуди* хвилі накачки (коротко – *поріг*). З'ясуємо зміст величини $A_0^{(0)}$. Для цього знову повернемося до несамоузгодженої постановки задачі. Нехай у рівнянні (2.8.9) $A_0(t) \approx A_{00}$. Тоді

$$\frac{dA_1}{dt} = \left(\gamma_1 A_0 - \nu_1 \right) A_1, \qquad A_1(0) = A_{10},$$

звідки

$$A_1(t) = A_{10}e^{(\gamma_1 A_{00} - \nu_1)t}.$$

Якщо $\nu_1 = 0$, то

$$A_1(t) = A_{10}e^{\gamma_1 A_{00} t}.$$

Таким чином, наявність втрат призводить до зменшення інкременту нестійкості на величину ν_1. Тепер нестійкість виникає, якщо

$$\gamma_1 A_{00} - \nu_1 > 0$$

або ж при $A_{00} > A_0^{(0)}$. Отже, в системі зі згасанням нестійкість має *пороговий характер*. В іншому ж якісна картина нестійкості не змінюється (рис. 2.20).

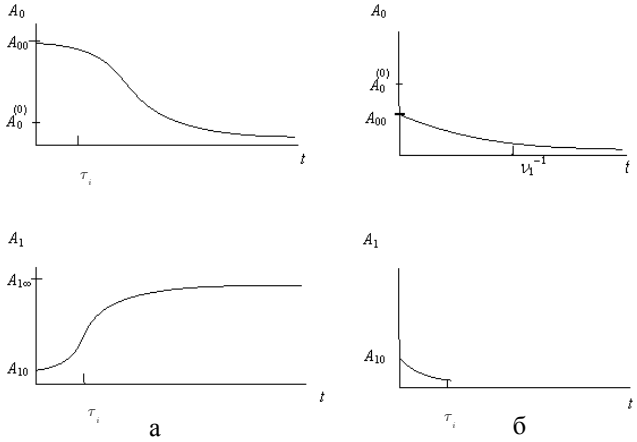


Рис. 2.20. Розвиток нестійкості: а) при $A_{00} > A_0^{(0)}$; б) згасання процесу при $A_{00} < A_0^{(0)}$

2.8.3. Трихвильова взаємодія (несамоузгоджена постановка задачі)

Трихвильова взаємодія виникає, наприклад, при розпаді хвилі із частотою ω_0 і хвильовим вектором $\vec{k}_0$ (хвилі накачки) на дві хвилі із частотами $\omega_{1,2}$ і хвильовими векторами $\vec{k}_{1,2}$. При цьому повинні виконуватися закони збереження енергії й імпульсу квантів електромагнітного поля:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \qquad \vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2. \tag{2.8.11}$$

Нестійкість, для якої виконуються умови розпаду (2.8.11), іменують *розпадною*. У загальному випадку нестійкості, які виникають у результаті когерентної нелінійної взаємодії хвиль, називаються *параметричними*.

У несамоузгодженій постановці задачі $A_0 = \mathrm{const}$, а рівняння для $A_{1,2}$ мають вигляд:

$$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2, \qquad A_1(0) = A_{10}, \tag{2.8.12}$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1, \qquad A_2(0) = A_{20}, \tag{2.8.13}$$

де $\gamma_{1,2}$ – коефіцієнти взаємодії. Інтеграл системи (2.8.12), (2.8.13) має вигляд:

$$\frac{A_1^2 - A_{10}^2}{\gamma_1} = \frac{A_2^2 - A_{20}^2}{\gamma_2}.$$

Вивчимо еволюцію амплітуд хвиль у часі. Для цього (2.8.12) продиференціюємо за часом і одержимо

$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} = \gamma_1 A_0 \frac{dA_2}{dt}. \tag{2.8.14}$$

Підстановка (2.8.13) в (2.8.14) дає

$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} = \gamma_1 \gamma_2 A_0^2 A_1. \tag{2.8.15}$$

Для $A_1 \sim e^{\lambda t}$ маємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 = \gamma_1 \gamma_2 A_0^2,$$

звідки

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} A_0.$$

Розв'язок (2.8.15) має вигляд:

$$A_1(t) = \mathrm{C}_1 e^{\lambda_1 t} + \mathrm{C}_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{2.8.16}$$

де $\mathrm{C}_{1,2}$ – постійні інтегрування. Тоді з (2.8.12) з урахуванням (2.8.16) одержуємо

$$A_2(t) = \frac{1}{\gamma_1 A_0}\frac{dA_1}{dt} = \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}\left(\mathrm{C}_1 e^{\lambda_1 t} - \mathrm{C}_2 e^{\lambda_2 t}\right). \tag{2.8.17}$$

Із (2.8.16), (2.8.17) випливає, що при $\gamma_1\gamma_2 > 0$ амплітуди $A_{1,2}$ наростають у часі за експоненціальним законом, тобто генерується нестійкість. Якщо ж $\gamma_1\gamma_2 < 0$, то процес має коливальний характер.

2.8.4. Врахування згасання при трихвильовій взаємодії

Більш реальної моделлю взаємодії трьох хвиль є система рівнянь, що враховує згасання хвиль:

$$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2 - \nu_1 A_1, \tag{2.8.18}$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1 - \nu_2 A_2, \qquad (2.8.19)$$

$$\frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1 A_2 - \nu_0 A_0. \qquad (2.8.20)$$

Для хвилі накачки $\gamma_0 < 0$. Рівняння (2.8.18), (2.8.19) мають стаціонарні розв'язки при $\frac{d}{dt} = 0$:

$$\gamma_1 A_0 A_2 - \nu_1 A_1 = 0,$$
$$\gamma_2 A_0 A_1 - \nu_2 A_2 = 0.$$

Визначник цієї системи

$$\nu_1 \nu_2 - \gamma_1 \gamma_2 A_0^2 = 0.$$

Звідси випливає вираз для порога хвилі накачки

$$A_0^{(0)} = \left(\frac{\nu_1 \nu_2}{\gamma_1 \gamma_2}\right)^{1/2}. \qquad (2.8.21)$$

При $A_0 = A_0^{(0)}$ приплив енергії до хвиль $A_{1,2}$ дорівнює втраті енергії.

У несамоузгодженій постановці задачі в рівняннях (2.8.18), (2.8.19) можна вважати $A_0 \approx \mathrm{const}$. Тоді, диференціюючи (2.8.18) за часом, одержимо

$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} = \gamma_1 A_0 \frac{dA_2}{dt} - \nu_1 \frac{dA_1}{dt}. \qquad (2.8.22)$$

Врахуємо, що

$$A_2 = \frac{1}{\gamma_1 A_0}\left(\frac{dA_1}{dt} + \nu_1 A_1\right), \qquad (2.8.23)$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1 - \frac{\nu_2}{\gamma_1 A_0}\left(\frac{dA_1}{dt} + \nu_1 A_1\right). \qquad (2.8.24)$$

Підставляючи (2.8.23), (2.8.24) в (2.8.22), маємо:

$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} + (\nu_1 + \nu_2)\frac{dA_1}{dt} + \left(\nu_1 \nu_2 - \gamma_1 \gamma_2 A_0^2\right) A_1 = 0.$$

Для розв'язку $A_1 \sim e^{\lambda t}$ характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda^2 + (\nu_1 + \nu_2)\lambda + \left(\nu_1 \nu_2 - \gamma_1 \gamma_2 A_0^2\right) = 0.$$

Звідси

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)^2 - \left(\nu_1 \nu_2 - \gamma_1 \gamma_2 A_0^2\right)}.$$

Корінь λ_2 завжди негативний, а $\lambda_1 > 0$ при

$$\nu_1 \nu_2 - \gamma_1 \gamma_2 A_0^2 < 0$$

або, відповідно до (2.8.21),

$$1 - \left(\frac{A_0}{A_0^{(0)}}\right)^2 < 0.$$

Таким чином, нестійкість ($A_1 \sim e^{\lambda_1 t}$, $\lambda_1 > 0$) виникає при $A_0 > A_0^{(0)}$. Якщо ж $A_0 < A_0^{(0)}$, то процес має згасаючий характер.

Загальний розв'язок (2.8.18), (2.8.19) має вигляд:

$$A_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad (2.8.25)$$

$$A_2(t) = \frac{1}{\gamma_1 A_0}\left(\frac{dA_1}{dt} + \nu_1 A_1\right) = C_1 \frac{\lambda_1 + \nu_1}{\gamma_1 A_0} e^{\lambda_1 t} + C_2 \frac{\lambda_2 + \nu_1}{\gamma_1 A_0} e^{\lambda_2 t}. \qquad (2.8.26)$$

2.8.5. Трихвильова взаємодія (самоузгоджена постановка задачі)

Як випливає з системи рівнянь (2.8.18), (2.8.19) і (2.8.20), величина порога в самоузгодженій постановці задачі також задається виразом (2.8.21).

Точний аналітичний розв'язок зазначеної системи рівнянь знайти не вдається, тому нижче будемо нехтувати втратами, тобто. вважати $\nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = 0$. При цьому

$$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2, \qquad \gamma_1 > 0, \qquad (2.8.27)$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1, \qquad \gamma_2 > 0, \qquad (2.8.28)$$

$$\frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1 A_2, \qquad \gamma_0 < 0, \qquad (2.8.29)$$

де $A_0(0) = A_{00}$, $A_{1,2}(0) = A_{10,20}$.

Роблячи так само, які в пункті 2.8.1, одержимо інтеграл системи (2.8.27), (2.8.28), (2.8.29):

$$\frac{A_1^2 - A_{10}^2}{\gamma_1} = \frac{A_2^2 - A_{20}^2}{\gamma_2} = \frac{A_0^2 - A_{00}^2}{\gamma_0} = \mathrm{const}. \qquad (2.8.30)$$

Рівняння (2.8.30) також називаються *співвідношеннями Менлі – Роу* [6, 31]. Вони являють собою різновид *закону збереження енергії*. Дійсно, розв'язуючи (2.8.30) відносно A_0^2, A_1^2 і A_2^2 і додаючи їх, одержимо

$$\frac{A_1^2(t)}{\gamma_1} + \frac{A_2^2(t)}{\gamma_2} + \frac{A_0^2(t)}{\gamma_0} = \mathrm{const}_1.$$

Розв'язок для несамоузгодженої задачі (2.8.25), (2.8.26) і співвідношення Менлі – Роу (2.8.30) дозволяють якісно уявити процес генерації нестійкостей у самоузгодженій постановці задачі (рис. 2.21). При $\lambda_1 t \le 1$ справедливий несамоузгоджений підхід, у цьому випадку $A_0(t) \approx \mathrm{const}$, а $A_{1,2}(t)$ наростають за експоненціальним законом. Це лінійна стадія нестійкості. При $\lambda_1 t > 1$ амплітуда хвилі накачки помітно зменшується, і зростання $A_{1,2}$ поступово припиняється (нелінійна стадія нестійкості).

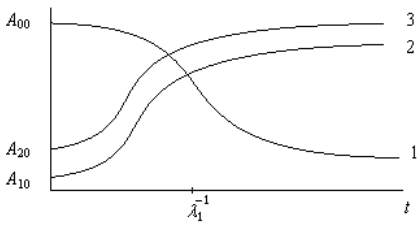


Рис. 2.21. Залежність амплітуд хвиль від часу при три хвильовій взаємодії:
1 – хвиля накачки;
2 – хвиля A_1;
3 – хвиля A_2

2.8.6. Вибухова нестійкість

Вибухова нестійкість виникає, якщо *приплив енергії перевищує втрати*. При цьому амплітуда нестійкості необмежено зростає за *кінцевий проміжок часу* t_0. Найпростіша модель, що описує таку нестійкість, дається рівнянням типу

$$\frac{dA}{dt} = \gamma A^2 - \nu A, \quad \gamma, \nu > 0, \tag{2.8.31}$$

де $A(t=0) = A(0)$. Важливо, щоб приплив енергії $\sim A^2$, а втрати $\sim A$. Порогове значення знаходиться з рівняння (2.8.31) при $\frac{d}{dt} = 0$ і має вигляд:

$$A^{(0)} = \frac{\nu}{\gamma}. \tag{2.8.32}$$

(Тривіальне значення $A^{(0)} = 0$ не береться до уваги). З урахуванням (2.8.32) рівняння (2.8.31) перепишеться в такому вигляді:

$$\frac{dA}{dt} = -\nu A\left(1 - \frac{A}{A^{(0)}}\right).$$

Його розв'язком є

$$A(t) = \frac{A(0)A^{(0)}}{A(0) + \left(A^{(0)} - A(0)\right)e^{\nu t}}. \tag{2.8.33}$$

Якщо $A(0) < A^{(0)}$, то при $\nu t \gg 1$ маємо: $A(t) \to 0$ (рис. 2.22). Якщо ж $A(0) > A^{(0)}$, то при $t = t_0$ знаменник в (2.8.33) перетворюється на нуль, а $A(t_0) \to \infty$. Значення t_0 знаходиться з виразу

$$t_0 = \frac{1}{\nu}\ln\frac{A(0)}{A(0) - A^{(0)}}.$$

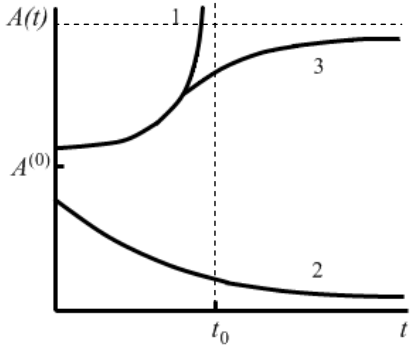


Рис. 2.22. Залежність амплітуди хвилі при вибуховій нестійкості:
1 – $A(0) > A^{(0)}$, $\beta = 0$;
2 – $A(0) < A^{(0)}$, $\beta = 0$;
3 – $A(0) > A^{(0)}$, $\beta \ne 0$

Реально необмежене зростання $A(t)$ неможливе, оскільки, починаючи з деяких величин A, втрати будуть зростати швидше, ніж приплив енергії. Модель такого процесу зводиться до вигляду

$$\frac{dA}{dt} = \gamma A^2 - \nu A - \beta A^3, \tag{2.8.34}$$

де $\beta > 0$ – досить «мала» величина в розумінні $\beta A^3(0) \ll \gamma A^2(0)$. Рівняння (2.8.34) має стаціонарний розв'язок, що знаходиться зі співвідношення

$$\gamma A^2 - \nu A - \beta A^3 = 0.$$

Вважаючи, що $A \ne 0$, отримаємо

$$A_{1,2} = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\beta\nu}}{2\beta}.$$

Якщо $4\beta\nu \ll \gamma^2$, то

$$A_1 \approx \gamma / \beta \equiv A_\infty,$$
$$A_2 \approx \nu / \gamma \equiv A^{(0)}.$$

Таким чином, $A_1 = A_\infty$ є стаціонарний розв'язок (2.8.34) при $t \to \infty$, а $A_2 = A^{(0)}$ є пороговим значенням амплітуди хвилі.

Якісно розв'язок (2.8.34) уявити неважко. При $t < t_0$ має місце різке зростання амплітуди (лінійна стадія нестійкості), а при $t \gg t_0$ настає її

стабілізація (нелінійна стадія нестійкості). *Час «виходу»* на значення $A \approx A_\infty$ можна отримати з рівняння (2.8.34) методом оцінки похідних:

$$t_\infty \approx \frac{1}{\beta A_\infty^2}.$$

Питання для самоконтролю

1. Що таке нестійкість?
2. Як виникає нестійкість?
3. Якими характеристиками описується нестійкість?
4. Опишіть двохвильову взаємодію.
4. Які стадії нестійкостей розрізнюють?
5. Чим відрізняються несамоузгоджена й самоузгоджена постановки задач?
6. До чого призводить урахування загасання при двохвильовій взаємодії?
7. Опишіть трихвильову взаємодію.
8. Що таке розпадна нестійкість?
9. Що таке параметрична нестійкість?
10. Наведіть співвідношення Менлі – Роу. Що вони являють собою?
11. Що таке вибухова нестійкість?
12. Як виникає вибухова нестійкість?
13. У результаті чого настає стабілізація вибухової нестійкості?

Задачі

1. Розв'язати задачу про двохвильову взаємодію, якщо вона описується системою вигляду:

а) $$\frac{dA_1}{dt} = -\gamma_1 A_1 A_2, \qquad A_1\big|_{t=0} = A_1\big(0\big),$$
$$\frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1, \qquad A_2\big|_{t=0} = 0,$$

б) $$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_2^2, \qquad A_1\big|_{t=0} = 0,$$
$$\frac{dA_2}{dt} = -\gamma_2 A_1 A_2, \quad A_2\big|_{t=0} = A_2\big(0\big).$$

Врахувати, що $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

2. Обчислити порогове значення амплітуди хвилі накачки в задачі про трихвильову когерентну взаємодію ($\gamma_{1,2} > 0$; $\gamma_0 < 0$):

а) $$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0^2 A_2 - \nu_1 A_1,$$
$$\frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0^2 A_1 - \nu_2 A_2,$$
$$\frac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1^2 A_2 - \nu_0 A_0,$$

б) $$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0^2 A_2 - \nu_1 A_1 A_0,$$
$$\frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_1 A_0^2 - \nu_2 A_2 A_0,$$
$$\frac{dA_0}{dt} = -\gamma_0 A_1^2 A_2 - \nu_0 A_0^2.$$

Початкові умови мають вигляд:

$$A_1\big|_{t=0} = 0, \quad A_2\big|_{t=0} = 0, \quad A_0\big|_{t=0} = A_{00}.$$

3. Дослідити вибухову нестійкість, що описується рівнянням

а) $$\frac{dA}{dt} = \gamma A^3 - \nu A,$$

б) $$\frac{dA}{dt} = \gamma A^3 - \nu A^2,$$

де $\nu, \gamma > 0$, $A(0) > A^{(0)}$, $A^{(0)}$ – порогове значення.

4. У результаті трихвильової взаємодії можуть виникнути солітони обвідних. Вони описуються такою моделлю:

$$\begin{cases} \dfrac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_0 A_2, \\ \dfrac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_0 A_1, \\ \dfrac{dA_0}{dt} = \gamma_0 A_1 A_2, \end{cases}$$

де $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, $\gamma_0 < 0$, $A_{1,2}(\pm\infty) = 0$, $t = t' - \dfrac{x}{v_g}$, $A_0(\pm\infty) = A_{00}$, v_g – групова швидкість. Відшукати $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$.

Вказівка. Використати співвідношення Менлі – Роу.

5. Відомо, що дитина інтенсивно росте до 12–13 років: її маса на початку життя збільшується в e разів приблизно за 2,6 роки. Вважаючи, що відносна швидкість збільшення маси дитини зменшується за експоненціальним законом з характерним часом, що дорівнює 8 рокам, скласти рівняння, яке описує закон зміни маси людини протягом життя. Знайти його розв'язок і побудувати залежність $m(t)$. Чи відноситься таке поводження $m(t)$ до нестійкості? Якщо так, то до якого типу? Прийняти $m(0) = 3,5$ кг.

6. Швидкість росту чисельності N найпростіших організмів у біосфері пропорційна їх кількості. Це ж можна сказати і про швидкість їх гибелі. Скласти диференціальне рівняння, що описує зміну N у часі. Отримати його розв'язок. Чи описує воно нестійкість? За яких умов? Навести приклади.

7. Швидкість росту чисельності N складних організмів у біосфері пропорційна квадрату їх кількості, а швидкість гибелі – N. Скласти диференціальне рівняння, що описує зміну N у часі. Отримати його розв'язок. Чи описує воно нестійкість? Яку? За яких умов? Навести приклади.

8. Чисельність N багатьох організмів у біосфері описується логістичним законом, відповідно до якого відносна швидкість зміни N у часі зменшується з ростом N за лінійним законом. Скласти диференціальне рівняння, що описує зміну N у часі. Отримати його розв'язок. Чи описує воно нестійкість? Яку? За яких умов? Навести приклади.

9. У певну історичну епоху, яка включає в себе і теперішній час, ріст чисельності населення на Земній кулі добре описується найпростішою моделлю С. П. Капіци:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^2}{C},$$

де $C \approx 1,86 \cdot 10^{11}$ осіб·рік.

Чи є такий ріст стійким? Знайдіть та проаналізуйте залежність $N(t)$. В якому році настане «вибух» чисельності населення, якщо в 1999 р. $N = 6$ млрд осіб? Чи реальна модель С. П. Капіци? Чого вона не враховує? Спробуйте вдосконалити цю модель.

10. У певну історичну епоху, яка включає в себе і теперішній час, ріст чисельності населення на Земній кулі добре описується удосконаленою моделлю С. П. Капіци:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{C}{(\tau_0 - t)^2 + \tau^2},$$

де $C \approx 1,86 \cdot 10^{11}$ осіб·рік, $\tau \approx 42$ роки – характерний для людини час, $\tau_0 \approx 2007$ рік.

Чи є такий ріст стійким? Знайдіть і проаналізуйте залежність $N(t)$. В якому році настане стабілізація чисельності населення, якщо в 1999 р. $N = 6$ млрд осіб? Чи реальна ця модель С. П. Капіци? Обчисліть N у поточному році й порівняйте його з результатами перепису населення. Чи істотні відхилення від моделі?

11. Ріст споживаючої людством потужності описується моделлю вигляду:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(P)P, \qquad P\Big|_{t=0} = P_0,$$

де $P_0 = 20$ ТВт, $\alpha = \alpha_0(1 + \beta P)$, $\alpha \approx 0,03$ рік$^{-1}$, $\left|\beta\right| \approx 10^{-14}$ Вт$^{-1}$. Знайдіть і проаналізуйте розв'язок модельного рівняння. Чи описує воно нестійкість? Яку? За яких умов?

12. Ріст потужності електромагнітного випромінювання, «забруднюючого» радіоефір описується моделлю вигляду:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(1 + \beta P + \gamma P^2), \qquad P\Big|_{t=0} = P_0,$$

де $P_0 = 10$ ГВт, $\alpha = 0,1$ рік$^{-1}$, $\left|\beta\right| \approx 10^{-12}$ Вт$^{-1}$, $|\gamma| \approx 10^{-21}$ Вт$^{-2}$. Знайдіть і проаналізуйте розв'язок модельного рівняння. Чи описує воно нестійкість? Яку? За яких умов?

13. Ріст чисельності фрагментів космічного «сміття» на навколоземних орбітах описується моделлю вигляду:

$$\frac{dn}{dt} = \alpha(n)n - \beta n, \qquad n\Big|_{t=2000} = n_0,$$

де, $n_0 = 10^4$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 n$, $\alpha_0 \approx 0,05$ рік$^{-1}$, $\alpha_1 \approx 10^{-7}$ рік$^{-1}$, $\beta = 0,02$ рік$^{-1}$. Знайдіть і проаналізуйте розв'язок модельного рівняння. Чи описує воно нестійкість? Яку? За яких умов? Через скільки років польоти в навколоземному космосі стануть неможливими?

2.9. Основні результати

1. При поширенні сильних електромагнітних хвиль у середовищах порушується принцип суперпозиції, виникає самовплив і взаємодія хвиль.

2. Точний розв’язок нелінійних рівнянь електродинаміки вдається знайти у вкрай невеликому числі випадків.

Для наближеного розв’язання нелінійних хвильових рівнянь розроблено низку методів: малих збурень, повільних амплітуд, нелінійної квазіоптики, нелінійної геометричної оптики й ін.

3. При самовпливі хвиль виникають ефекти просвітління й помутніння середовища, фазові спотворення, нелінійний ефект Доплера й ін.

Самовплив пучків хвиль призводить до ефекту самофокусування, що настає при компенсації дифракційного розширення нелінійним стиском пучка.

Аналогічні ефекти спостерігаються при взаємодії хвиль.

4. При поширенні нелінійних хвиль у недиспергуючих недисипативних середовищах відбувається укручення профілю хвилі.

Урахування дисипації може призвести до компенсації нелінійних ефектів розмиттям профілю хвилі й виникненню стаціонарної хвилі (наприклад, ударної).

При компенсації нелінійного укручення дисперсійним розпливанням виникають також стаціонарні хвилі й, зокрема, солітони.

Солітон – фундаментальне міждисциплінарне поняття.

5. При нелінійній взаємодії когерентних хвиль амплітуда однієї з них може швидко наростати (зокрема, за експоненціальним законом), тобто може збуджуватися нестійкість.

Нестійкість виникає за рахунок передачі енергії від джерела й при наявності позитивного зворотного зв’язка. Врахування згасання призводить до того, що цей процес стає пороговим.

Необмежене зростання амплітуди хвилі за обмежений час являє собою вибухову нестійкість.

Лінійна стадія будь-якої нестійкості змінюється нелінійною, що пов’язано з обмеженістю енергії джерела нестійкості.

РОЗДІЛ 3. НЕЛІНІЙНІ ЯВИЩА В КВАНТОВІЙ РАДІОФІЗИЦІ

Екстремальні стани речовини особливо привабливі для фізики, оскільки в них найбільш ясно виявляються закони природи[1].

Нелінійні явища виникають у результаті взаємодії випромінювання потужних квантових генераторів з речовиною (твердими тілами, рідинами, газами й плазмою) [11, 35].

Перші нелінійні ефекти при поширенні світла в речовині були виявлені ще в *долазерну* епоху. Тому відповідний розділ фізики одержав назву *нелінійної оптики*.

Оскільки оптика традиційно досліджує видиме світло (довжина хвилі $\lambda \sim 4\cdot10^{-7}$–$8\cdot10^{-7}$ м), а квантові генератори випромінюють у діапазонах від субміліметрового ($\lambda \sim 10^{-4}$ м) до рентгенівського ($\lambda \sim 10^{-10}$ м), доцільно говорити про *нелінійну квантову радіофізику.*

3.1. Коротка історична довідка

Перші передумови до існування нелінійних ефектів, викликаних взаємодією оптичного випромінювання з речовиною, з'явилися в 20-х рр. минулого століття.

У 1923 р. С. І. Вавилов і В. Л. Льовшин виявили ефект самопросвітління при проходженні світла через уранове скло. У якості джерела світла використовувалися потужні електромагнітні іскри. Зменшення коефіцієнта поглинання склало $1{,}5 \pm 0{,}3\%$. С. І. Вавилов розумів, що виявлений ефект – є одним із багатьох, здатних скласти новий напрямок. Він назвав цей напрямок нелінійною оптикою.

---

[1] Великович А. Л. Физика ударных волн в газах и плазме / А. Л. Великович, М. А. Либерман. – М. : Наука, 1987. – С. 4.

У 50-х рр. XX ст. Г. С. Горелик теоретично обґрунтував можливість спостереження певних нелінійних ефектів за допомогою фотоелектричних помножувачів.

Народження нелінійної квантової радіофізики зобов'язане створенню *потужних когерентних джерел світла – лазерів.*

У 1961 р. фізик із США П. Франкен уперше спостерігав *генерацію другої гармоніки.* У 1962 р. виявлено *ефект генерації третьої гармоніки*.

У 1961–1963 рр. Р. В. Хохлов, С. А. Ахманов у СРСР і Н. Бломберген у США виконали фундаментальні теоретичні дослідження, заклавши тим самим основи нелінійної квантової радіофізики й оптики.

У 1962–1963 рр. відкрите й пояснене *вимушене комбінаційне розсіяння* світла.

У 1965 р. виявлений ефект *самофокусування світла* (Н. Ф. Пилипецький, А. Ф. Рустамов), передбачений Г. А. Аскарьяном у 1962 р.

До середини 1960-х рр. нелінійна квантова радіофізика (нелінійна оптика) сформувалася як самостійний напрямок. Нелінійні явища швидко впроваджувалися в практику.

У 1964–1966 рр. з'явилися перші роботи з *нелінійної спектроскопії.*

У 1965 р. були створені *параметричні генератори світла*, що використовують нелінійні ефекти для генерації випромінювання, плавно перестроюваного по частоті в широких межах.

У1967 р. почалися дослідження ефектів при впливі на середовище *пікосекундних імпульсів* ($\tau \sim 10^{-12}$ с), а в 1970–1980-х рр. і *фемтосекундних імпульсів* ($\tau \sim 10^{-15}$ с).

У 1971–1972 рр. відкрите й вивчене *явище обернення хвильового фронту* в нелінійних середовищах, що поклало початок *адаптивній оптиці.*

У наш час основні нелінійні явища використовуються на практиці. Нелінійна квантова радіофізика є однією із небагатьох нелінійних наук, яка може «похвалитися» порівняно швидким і широким упровадженням своїх ефектів у практику [11, 17, 35].

Питання для самоконтролю

1. Виділіть основні етапи в дослідженні нелінійних явищ у квантовій радіофізиці.

2. Опишіть історію дослідження нелінійних явищ у квантовій радіофізиці.

3.2. Механізми нелінійних явищ

Існує декілька механізмів, що призводять до виникнення нелінійних явищ. Величина характерного поля, при якій стає істотним той або інший механізм, залежить від речовини, її агрегатного стану й параметрів, частоти хвилі й т. п. [11].

Розглянемо механізми детальніше.

3.2.1. Тепловий механізм

Тепловий механізм нелінійності пов'язаний з нагріванням речовини потужним електромагнітним випромінюванням, у результаті чого показники поглинання й заломлення речовини стають залежними від напруженості поля хвилі. Це призводить, зокрема, до самовпливу хвилі, до ефекту самофокусування й т. д.

Величина характерного поля E_t для теплового механізму залежить від речовини. Так, помітне нагрівання кристала можливе вже при $P \sim 10^{-2}$ Вт, тобто при $E_t \sim 10^3$ В/м. Для плазми $E_t \sim 10^6$ В/м. В останньому випадку E_t зазвичай називають *плазмовим полем* E_p (див. пункт 4.2.1).

Одержимо вираз для напруженості характерного поля E_t при тепловому механізмі нелінійності.

У якості вихідного виберемо рівняння балансу внутрішньої енергії Q при нагріванні речовини густиною ρ, питомою теплоємністю C, довжиною зразка L:

$$\frac{dQ}{dt} = \kappa P - P_L,$$

де $Q = C\rho SL\Delta T$, S – площа перерізу лазерного пучка, ΔT – зміна абсолютної температури зразка, $P = qS$ – потужність лазера, q – густина потоку енергії випромінювання, κ – коефіцієнт поглинання випромінювання, P_L – потужність втрат (за рахунок теплового випромінювання зразка, теплопровідності, конвекції й т. п.).

Зазвичай $\kappa P \gg P_L$ і рівняння балансу приймає вигляд:

$$C\rho SL\frac{d\Delta T}{dt} \approx \kappa P = \kappa qS\,.$$

Звідси при тривалості впливу τ одержимо, що

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\kappa q \tau}{C \rho T_0 L}.$$

Оскільки в системі СІ

$$q = \frac{P}{S} = \frac{E_0^2}{2Z_0} = \frac{E_0^2}{240\pi},$$

де $Z_0 = 120\pi$ Ом – опір вільного простору,

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{E_0^2}{E_t^2}.$$

Тут

$$E_t^2 = \frac{240\pi C \rho T_0 L}{\kappa \tau}.$$

Очевидно, що при $E_0 = E_t$ значення $\Delta T = T_0$.

Виконаємо оцінки E_t.

Для слабопоглинаючого газу $\kappa = 10^{-6}$ и $\rho = 1$ кг/м^3, $C = 10^3$ Дж/кг·К, T_0= 300 К, $L = 0.03$ м, $\tau = 10$ с маємо: $E_t \approx 2{,}6 \cdot 10^6$ В/м. При $S = 10^{-5}$ м^2, $q \approx 10^{10}$ Вт/м^{2}одержимо $P \approx 0.1$ МВт.

Для кристала (конденсованої речовини) с $\kappa = 10^{-6}$, $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м^3, $C = 5 \cdot 10^2$ Дж/кг·К, T_0= 300 К, $L = 0{,}03$ м, $\tau = 10$ с одержимо $E_t \approx 8{,}2 \cdot 10^7$ В/м. Якщо $S = 10^{-3}$ м^2, $q \approx 10^{13}$ Вт/м^2, $P \approx 100$ МВт.

3.2.2. Стрикційний механізм

Під електрострикцією розуміють виникнення пружних деформацій середовища під дією прикладеного електромагнітного поля. В результаті електрострикції в середовищі генеруються й поширюються акустичні хвилі.

Як наслідок деформації середовища змінюється абсолютна діелектрична проникність:

$$\Delta\varepsilon_a = \left(\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \rho}\right)_0 \Delta\rho,$$

де $\Delta\rho = (\rho - \rho_0)$, ρ и ρ_0 – густина середовища в збурених полем хвилі й незбурених умовах.

За рахунок зміни ε_a виникають зміни густини енергії w електричного поля

$$\Delta w = \frac{\Delta\varepsilon_a E_0^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \rho}\right)_0 \Delta\rho E_0^2.$$

Зміни w еквівалентні дії стрикційного тиску

$$p_s = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \rho}\right)_0 \Delta\rho E_0^2.$$

Відносна деформація середовища визначається безрозмірним параметром

$$\frac{p_s}{K} = \left(\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \rho}\right)_0 \frac{\Delta\rho}{2K} E_0^2 \equiv \frac{E_0^2}{E_s^2}.$$

Тут K – модуль всестороннього стискування. Стрикційне поле

$$E_s^2 = \frac{2K}{\left(\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \rho}\right)_0 \Delta\rho} = \frac{2K}{\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_0 \Delta\rho} = \frac{2K}{\varepsilon_0 \Delta\varepsilon}.$$

Стрикційна нелінійність стає істотною при збуреннях відносної діелектричної проникності $\Delta\varepsilon \approx 0.1 - 1$.

Для газів при атмосферному тиску $K = 10^5$ Н/м^2, для рідин $K = (1-9) \cdot 10^9$ Н/м^2, для твердих тіл $K \approx (1-3) \cdot 10^{11}$ Н/м^2. Таким значенням K відповідають значення E_s порядку (1 – 3)·10^8, 10^{10} – 10^{11} і 10^{11} – 10^{12} В/м.

3.2.3. Керрівський механізм

Під дією електричного поля оптично ізотропна речовина набуває властивостей одноосного кристалу з оптичною віссю, яка є паралельною вектору $\vec{E}_0$. Цей ефект називається явищем Керра. Він був відкритий у 1875 р.

Експериментально встановлено, что при поширенні світла перпендикулярно до оптичної вісі для різниці показників заломлення звичайної (n_o) і незвичайної (n_x) хвиль справедливе таке співвідношення:

$$n_o - n_x = k_K \lambda E_0^2,$$

де k_K – стала Керра, λ – довжина хвилі. Мірою нелінійності слугує відношення

$$\frac{n_o - n_x}{n^{(0)}} = \frac{k_K \lambda E_0^2}{n^{(0)}} \equiv \frac{E_0^2}{E_K^2},$$

де $n^{(0)}$ – показник заломлення середовища за відсутності електричного поля, E_K – характерне поле для керрівского механізма (керрівске поле). Останнє дається вираженням

$$E_K^2 = \frac{n^{(0)}}{k_K \lambda}.$$

В оптичному діапазоні для газів $E_K \approx 3 \cdot 10^{11} - 3 \cdot 10^{12}$ В/м, для рідин – $E_K \approx 10^{10} - 10^{11}$ В/м. При підвищенні концентрації молекул эфект Керра підсилюється, а значення поля E_K зменшується.

Характерний час становлення эфекта Керра становить $10^{-12} - 10^{-11}$ с.

3.2.4. Механізм нелінійності Поккельса

Ефект Поккельса полягає у виникненні в певних кристалах подвійного променезаломлення при накладанні електричного поля. При цьому

$$n_o - n_x = k_P E_0.$$

Важливо, що величина ефекта лінійна по E_0, k_P – стала.

Для характерного поля (поля Поккельса) маємо:

$$E_P = \frac{n^{(0)}}{k_P}.$$

Зазвичай $E_P \approx 3 \cdot 10^9$ В/м, тобто значно менше, ніж E_K.

Зазначимо, що ефект Поккельса такий же безінерційний, як і ефект Керра.

3.2.5. Атомний механізм

Цей механізм пов'язаний з *нелінійним відгуком* атомних або молекулярних осциляторів речовини, в якій поширюється електромагнітна хвиля.

Атомний механізм є *основним* у нелінійній квантовій радіофізиці. Він виникає тоді, коли напруженість поля хвилі стає сумірною з внутрішньоатомною напруженістю поля

$$E_a = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_a^2}, \tag{3.2.1}$$

де ε_0 – електрична стала,

$$r_a = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{me^2}. \tag{3.2.2}$$

Тут r_a – радіус першої боровської орбіти атома, $\hbar$ – стала Планка, e и m – заряд і маса електрона.

З (3.2.1), (3.2.2) одержуємо

$$E_a = \frac{m^2 e^5}{(4\pi\varepsilon_0)^3 \hbar^4}. \tag{3.2.3}$$

Величина $E_a \sim 10^{12}$ В/м.

3.2.6. Релятивістський механізм

Цей механізм виникає у випадку, якщо *осциляторна* швидкість вільних електронів (при нехтуванні релятивістською зміною маси)

$$v_e = \frac{eE_0}{m\omega}$$

Стає порядку швидкості світла c, тобто при напруженості поля

$$E_r = \frac{mc\omega}{e}. \tag{3.2.4}$$

Наприклад, при $f \sim 10^{15}$ Гц $E_r \sim 10^{13}$ В/м.

3.2.7. Вакуумний механізм

Цей механізм може стати істотним, якщо робота електричного поля над електроном на комптонівській довжині хвилів цієї частинки $\lambda_k = \hbar / mc$ зрівняється з енергією спокою электрона, тобто

$$eE_v \lambda_k = mc^2$$

або

$$eE_v \frac{\hbar}{mc} = mc^2.$$

Звідси

$$E_v = \frac{m^2 c^3}{e\hbar}. \tag{3.2.5}$$

Величина E_v залежить тільки від фундаментальних констант і дорівнює $\sim 10^{18}$ В/м.

При $E \sim E_v$ виникають нелінійні ефекти у вакуумі. Зрозуміло, мова йде не про класичний вакуум (пустоту), а про *фізичний вакуум*, в якому безперервно народжуються й зникають віртуальні частинки.

3.2.8. Порівняння механізмів

Зазвичай у найменших полях виявляється теплова нелінійність, у трохи більших полях – стрикційна, тобто

$$E_t \ll E_s. \qquad (3.2.6)$$

У ще більших полях стають істотними атомний, релятивістський і вакуумний механізми. Покажемо це, для чого складемо відношення, виходячи з (3.2.3), (3.2.4) і (3.2.5):

$$\frac{E_a}{E_v} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\right)^3 \equiv \alpha^3, \ \frac{E_r}{E_v} = \frac{\hbar\omega}{mc^2},$$

де $\alpha \approx 1/137$ – стала тонкої структури. При цьому $E_a / E_v \sim 10^6$, а $E_r / E_v \sim 10^{-5}$ при $f \sim 10^{15}$ Гц.

Таким чином,

$$E_a \ll E_r \ll E_v,$$

а з урахуванням (3.2.6) маємо:

$$E_t \ll E_s \ll E_a \ll E_r \ll E_v.$$

Результати оцінок цих полів, а також відповідних їм потужностей випромінювання P і густин потоку енергії $q = P / S$ для перетину пучка $S = 10$ мм^2 наведені в табл. 3.1.

Які ж поля має експериментатор у наш час? Наведемо приклади надсильних електромагнітних полів. За допомогою ексимерної системи KrF ($\lambda = 0{,}24$ мкм, $\tau = 70$ фс) ще в 1980-х рр. отримано $q \sim 10^{22}$ Вт/м^2 ($P \sim 10^{17}$ Вт), у перспективі можна одержати $q \sim 10^{23}$ Вт/м^2 ($P \sim 10^{18}$ Вт, $\tau \sim 100$ фс). Для твердотільних систем (видимий і ближній інфрачервоний діапазони) при $\tau \sim 10$ фс отримано $q \sim 10^{22}$ Вт/м^2, а в перспективі – $q \sim 10^{27}$ Вт/м^2 ($P \sim 10^{22}$ Вт, $\tau \sim 10$ фс) [11].

Таблиця 3.1. Порівняльні характеристики різних механізмів

Механізм	E, В/м	E / E_v	P, Вт	q, Вт/м^2
Тепловий	10^3	10^{-15}	10^{-2}	10^3
Стрикційний	10^8–10^{11}	10^{-10}–10^{-7}	10^8–10^{14}	10^{13}–10^{19}
Атомний	10^8–10^{11}	10^{-10}–10^{-7}	10^8–10^{14}	10^{13}–10^{19}
Релятивістський	10^{13}	10^{-5}	10^{18}	10^{23}
Вакуумний	10^{18}	1	10^{28}	10^{33}

Так звані CPA-лазери дозволили досягти $q \sim 10^{24}$ – 10^{25} Вт/м^2. Вони мають потужність $P \sim 10^{19}$ – 10^{20} Вт при $\tau \sim 10$ – 10^3 фс [11].

У Росії та Великій Британії в 2006–2007 рр. досягнуті значення $q \sim 10^{26}$ Вт / м^2.

Таким чином, навіть у віддаленій перспективі навряд чи вдасться наблизитися до величини E_v. Що ж стосується величини E_r, то можна стверджувати, що до неї підійшли впритул.

Корисно порівняти об'ємну густину енергії різних джерел (табл. 3.2).

При оцінці об'ємної густини енергії $w = q / c$, що випромінюється квантовим генератором, вважалося, що потужність лазера близько 1 ПВт, промінь фокусується на мішені діаметром близько 3 мм.

Таблиця 3.2. Об'ємна енергія різних джерел

Джерело енергії	Густина енергії, Дж/м^3
Анігіляція частинок і античастинок	10^{35}
Квантовий генератор	10^{18}
Ядерна реакція	10^{17}
Хімічна реакція	$8 \cdot 10^9$
Вулканічна лава	$2 \cdot 10^9$
Блискавка	10^7
Землетрус	10^3
Потужні атмосферні процеси	10^2 – 10^3

З табл. 3.2 видно, що за об'ємною густиною енергії квантові генератори поступаються лише анігіляції частинок з античастинками.

Питання для самоконтролю

1. Перерахуйте механізми нелінійних явищ в квантовій радіофізиці.
2. Опишіть тепловий механізм нелінійності в квантовій радіофізиці.
3. Опишіть стрикційний механізм нелінійності в квантовій радіофізиці.
4. Опишіть атомний механізм нелінійності в квантовій радіофізиці.
5. Опишіть релятивістський механізм нелінійності в квантовій радіофізиці.
6. Опишіть вакуумний механізм нелінійності в квантовій радіофізиці.

7. Опишіть керрівський механізм нелінійності в квантовій радіофізиці.

8. Порівняйте механізми нелінійних явищ у квантовій радіофізиці.

9. Чи призводить до нелінійності ефект Поккельса?

10. Чи всі механізми нелінійних явищ у квантовій радіофізиці реалізуються на практиці?

3.3. Генерація другої гармоніки

Генерація другої гармоніки – *класичний нелінійний ефект* квантової радіофізики. Розглянемо його докладніше.

3.3.1. Вихідні рівняння

Вихідними співвідношеннями є укорочені рівняння для комплексних амплітуд [6, 35]:

$$\frac{d\tilde{A}_1}{dx} = -i\delta_1\tilde{A}_2\tilde{A}_1^* e^{-i\Delta kx}, \quad \delta_1 > 0, \quad \tilde{A}_1(0) = A_{10}, \tag{3.3.1}$$

$$\frac{d\tilde{A}_2}{dx} = -i\delta_2\tilde{A}_1^2 e^{i\Delta kx}, \quad \delta_2 > 0, \quad \tilde{A}_2(0) = 0, \tag{3.3.2}$$

де $\Delta k = k_2 - 2k_1 = 2\dfrac{\omega}{c}(n_2 - n_1)$, $\tilde{A}_{1,2}$ и $n_{1,2}$ – комплексні амплітуди й показники заломлення хвилі накачки (1) і хвилі з частотою 2ω (2), $\delta_{1,2}$ – дійсні коефіцієнти.

Розв'язок (3.3.1), (3.3.2) шукаємо у вигляді

$$\tilde{A}_{1,2} = A_{1,2}e^{i\varphi_{1,2}}. \tag{3.3.3}$$

Підставляючи (3.3.3) в (3.3.1), (3.3.2), одержимо

$$\frac{dA_1}{dx} + iA_1\frac{d\varphi_1}{dx} = -i\delta_1 A_1 A_2 e^{-i\Phi}, \tag{3.3.4}$$

$$\frac{dA_2}{dx} + iA_2\frac{d\varphi_2}{dx} = -i\delta_2 A_1^2 e^{i\Phi}, \tag{3.3.5}$$

де $\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta kx$. Комплексні рівняння (3.3.4), (3.3.5) дозволяють знайти $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$. Виділимо в цих рівняннях дійсну частину:

$$\frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1 A_2 \sin\Phi, \tag{3.3.6}$$

$$\frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^2 \sin\Phi. \tag{3.3.7}$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо $A_1(x)$ и $A_2(x)$.

3.3.2. Амплітуда другої гармоніки

И (3.3.7) видно, що джерелом хвилі (2) є хвиля накачки, причому $dA_2/dx > 0$. Це означає, що амплітуда другої гармоніки зростає, а хвилі накачки – убуває, оскільки $dA_1/dx < 0$ (див. (3.3.6)). Максимальна взаємодія має місце при $\sin\Phi = 1$ (при $\sin\Phi = 0$ взаємодія відсутня). У цьому разі рівняння (3.3.6), (3.3.7) зводяться до таких:

$$\frac{dA_1}{dx} = -\delta_1 A_1 A_2, \quad A_1(0) = A_{10}, \tag{3.3.8}$$

$$\frac{dA_2}{dx} = \delta_2 A_1^2, \quad A_2(0) = 0. \tag{3.3.9}$$

Розділивши верхнє рівняння на нижнє, одержимо

$$\frac{dA_1}{dA_2} = -\frac{\delta_1}{\delta_2}\frac{A_2}{A_1}.$$

Звідси перший інтеграл системи (3.3.8), (3.3.9) має вигляд:

$$A_1^2 = A_{10}^2 - \frac{\delta_1}{\delta_2}A_2^2. \tag{3.3.10}$$

З урахуванням (3.3.10) рівняння (3.3.9) перетвориться до такого:

$$\frac{dA_2}{dx} = \delta_2\left(A_{10}^2 - \frac{\delta_1}{\delta_2}A_2^2\right). \tag{3.3.11}$$

З (3.3.11) випливає, що в глибині середовищі (формально при $x \to \infty$) має місце максимальне значення амплітуди хвилі 2, яке дорівнює

$$A_{2\infty}^2 = \frac{\delta_2}{\delta_1}A_{10}^2. \tag{3.3.12}$$

Тоді (3.3.11) з урахуванням (3.3.12) перепишеться як

$$\frac{dA_2}{dx} = \delta_1 A_{2\infty}^2\left(1 - \frac{A_2^2}{A_{2\infty}^2}\right).$$

Розділяючи змінні й інтегруючи, одержимо

$$A_2 = A_{2\infty}\mathrm{th}\left(\delta_1 A_{2\infty}x + C\right),$$

де з граничної умови $A_2(0) = 0$ маємо, що $C = 0$. Тоді

$$A_2(x) = A_{2\infty}\mathrm{th}\,\delta_1 A_{2\infty}x, \tag{3.3.13}$$

$\left(\delta_1 A_{2\infty}\right)^{-1} = L$ – характерна довжина взаємодії.

Підстановка (3.3.13) в рівняння (3.3.10) з урахуванням (3.3.12) дає

$$A_1^2 = A_{10}^2 - \frac{\delta_1}{\delta_2}\frac{\delta_2}{\delta_1}A_{10}^2\mathrm{th}^2\delta_1 A_{2\infty}x = A_{10}^2\left(1 - \mathrm{th}^2\delta_1 A_{2\infty}x\right) = A_{10}^2\frac{1}{\mathrm{ch}^2\delta_1 A_{2\infty}x}.$$

Звідси

$$A_1(x) = \frac{A_{10}}{\operatorname{ch} \delta_1 A_{2\infty} x}. \qquad (3.3.14)$$

Залежності $A_1(x)$ і $A_2(x)$ показані на рис. 3.1.

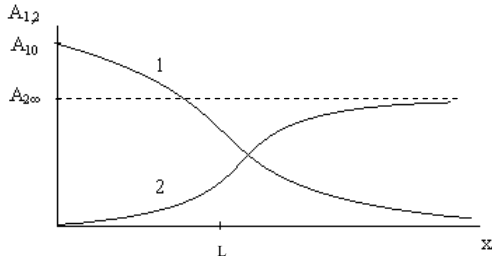


Рис. 3.1. Залежність амплітуди хвилі накачки (1) і другої гармоніки (2) від довжини взаємодії

З рис. 3.1 видно, що при $x \geq L$ відбувається ефективна перекачка енергії хвилі накачки в енергію другої гармоніки. Ефективність енергетичних перетворень дається коефіцієнтом

$$\eta = \frac{A_{2\infty}^2}{A_{10}^2} = \frac{\delta_2}{\delta_1},$$

що складає величину ~ 0,6 – 0,8.

Питання для самоконтролю

1. Опишіть генерацію другої гармоніки.
2. Дайте порівняльний аналіз генерації другої гармоніки й нестійкості.

Задачі

1. Обчисліть η та L, якщо $\delta_1 = 10^{-11} B^{-1}$, $\delta_2 = 7 \cdot 10^{-12} B^{-1}$ і $A_{2\infty} = 10^{12}$ В/м.

2. Для умов попередньої задачі обчислити A_{10}.

3.4. Використання нелінійних явищ

У наш час нелінійні явища широко використовуються в науці й техніці, зокрема для генерації вищих і комбінаційних частот, параметричної генерації

світла, дослідження речовини методами нелінійної спектроскопії, перетворення сигналів і зображень, в інтересах адаптивної оптики й т. д.

Розглянемо ці застосування докладніше [6, 11, 35].

3.4.1. Генерація оптичних гармонік

Генерація другої гармоніки описана в підрозділі 3.3. Цей ефект давно став класичним. Особливу наочність має експеримент по перетворенню інфрачервоного променя лазера ($\lambda = 1{,}06$ мкм) в зелений ($\lambda = 0{,}53$ мкм) при проходженні випромінювання через кристал ніобата барію.

Легко генеруються 3-тя, 4-та й 5-та гармоніки. ККД генерації, однак, зі збільшенням номера гармоніки швидко падає. Тому доводиться збільшувати потужність квантового генератора. Остання обмежена величиною, при якій відбувається оптичний пробій речовини. Міцність речовини збільшується при зменшенні тривалості імпульса випромінювання до значень $\tau \sim 10^{-12}$– 10^{-11} с = 1 – 10 пс. Так, наприклад, в благородних газах і парах металів металів настає при $q \sim 10^{16}$–10^{17} В/м^2. Ця величина значно більше тієї, при якій настає пробій конденсованих середовищ.

У газах і парах металів вдається одержати 5-ту і 7-му гармоніки випромінювання. Поки що доступне значення $\lambda_{\min} = 38{,}02$ нм.

Аналогічно здійснюється генерація комбінаційних гармонік. У цьому випадку в речовині має місце трихвильова взаємодія, що відбувається за схемою

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \qquad (3.4.1)$$

$$\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2. \qquad (3.4.2)$$

Ці співвідношення називаються *умовами просторово-часового синхронізму*. Вони являють собою закони збереження енергії й імпульсу взаємодіючих фотонів. Приклади таких взаємодій будуть наведені нижче.

3.4.2. Параметричні генератори світла

Ці генератори використовують процес *розпаду* потужної хвилі з частотою ω і хвильовим вектором $\vec{k}$ на дві хвилі з частотами $\omega_{1,2}$ і хвильовими векторами $\vec{k}_{1,2}$ відповідно до рівнянь (3.4.1), (3.4.2). Процес розпаду називають також *параметричним* процесом. Унаслідок цього генератори також іменують *параметричними*. Схема такого генератора показана на рис. 3.2.

Обладнаний він у такий спосіб. В оптичний резонатор, що складається з двох джерел випромінювань, вміщено нелінійний кристал. Дзеркала прозорі для хвилі накачки з частотою ω. Хвилі з частотами $\omega_{1,2}$ спочатку в резонаторі присутні в електромагнітних шумах. У результаті когерентної трихвильової взаємодії (див. підрозділ 2.8) відбувається розгойдування нестійкостей на частотах $\omega_{1,2}$. Ліве дзеркало для таких випромінювань непрозоре, а праве – напівпрозоре. Зазвичай корисним є сигнал на одній із частот ω_1 або ω_2, інший – заглушується при виході з резонатора. Обидва сигнали покидають резонатор після досягнення визначеного рівня потужності випромінювання.

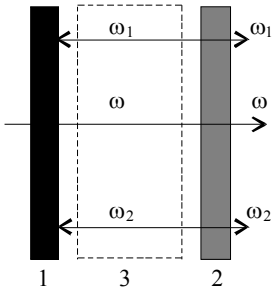


Рис. 3.2. Найпростіший параметричний генератор світла: 1 – дзеркало, непрозоре для хвиль з частотами $\omega_{1,2}$; 2 – дзеркало, напівпрозоре для цих хвиль; 3 – робоча речовина (нелінійний кристал)

Важливо, що зміною орієнтації нелінійного кристала можна здійснювати *плавну перестройку частоти* в широких межах. Наприклад, при накачуванні другою гармонікою ($\lambda = 0{,}53$ мкм) випромінювання лазера на основі кристала ніобата літію вдається одержати когерентний пучок світла в діапазоні $\lambda = 0{,}55 - 3$ мкм.

ККД таких параметричних генераторів світла може досягти 40–50 %.

3.4.3. Нелінійна спектроскопія

Нелінійна спектроскопія є сукупністю методів, у яких для дослідження будови речовини використовуються різні нелінійні явища в середовищах, що опромінюються потужними джерелами світла. Прикладами таких явищ можуть бути генерація вищих і комбінаційних гармонік, нелінійне поглинання, самонаведена прозорість та ін. Методи нелінійної спектроскопії засновані на спостереженні вказаних процесів і вивченні їхньої залежності від параметрів джерела випромінювання (потужності, частоти, поляризації, напрямку поширення й т. п.).

Нелінійна спектроскопія використовує плавно перестроювані по частоті квантові або параметричні генератори випромінювання. Ця наука розв'язує традиційні для спектроскопії задачі, але зі значно більшою точністю й розділенням[2], а також нові, властиві лише нелінійній спектроскопії. До останніх належать, наприклад, вимірювання частотних залежностей нелінійних сприйнятливостей речовини.

Нестаціонарна нелінійна спектроскопія вивчає часовий відгук квантової системи на збуджуючі імпульси випромінювання. Наприклад, дослідження комбінаційного розсіяння імпульсів з $\tau \sim 10^{-12}$ с дозволяє одержати роздільно часи життя молекул у збудженому стані й часи релаксації, що визначають ширину лінії.

3.4.4. Адаптивна оптика

Адаптивна оптика використовує явище *обернення хвильового фронту* (ОХФ) у нелінійних середовищах. Останнє, як відомо, полягає в зміні напрямку поширення променя на 180^0 при відбитті *адаптивним дзеркалом*.

Оборотність променів світла, що випливає з рівнянь Максвелла, відома давно. Однак обернути світлові промені не вдавалося через відсутність пристроїв, здатних виконувати цю операцію в реальному масштабі часу для складної (довільної) структури фронту хвилі. Ця процедура стала можливою при використанні одного з двох нелінійних явищ: чотирихвильової взаємодії або вимушеного розсіяння світла на гіперзвукових неонорідностях.

Ілюстрація функціонування звичайного й адаптивного дзеркал показана на рис. 3.3. Варто мати на увазі, що адаптивне дзеркало, звичайно, не плоске, а об'ємне.

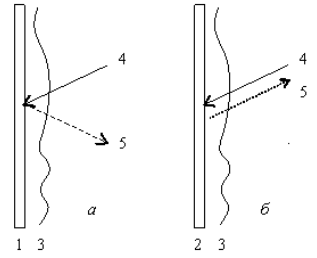


Рис. 3.3. Ілюстрація принципу відбиття звичайним (а) і адаптивним (б) дзеркалами: 1 – звичайне дзеркало; 2 – адаптивне дзеркало; 3 – фронт хвилі; 4 – падаючий промінь; 5 – відбитий промінь

Завдяки ОХФ стало можливим фокусування реальними лінзами великоапертурних лазерних пучків у пляму з дифракційними (тобто порядку

[2] Відносна ширина оптичних резонансів ~10^{-11} відноситься до надрозділення.

λ) розмірами, когерентне додавання пучків світла, що прийшли по різних траєкторіям, багатокаскадне підсилення лазерного випромінювання й т. п.

На багатокаскадному підсиленні зупинимося докладніше. Воно застосовується для підсилення випромінювання квантових генераторів при проходженні випромінювання через робочу речовину. Остання, на жаль, є неоднорідною, містить випадкові включення, що призводить до спотворення плоского фронту випромінювання. Він зазнає випадкової модуляції. Це призводить до зменшення потужності випромінювання, середнє значення якого можна розрахувати за формулою

$$\overline{P} = Pe^{-\sigma_\varphi^2},$$

де P – потужність випромінювання у випадку, коли фронт плоский; $\sigma_\varphi^2 = \left(\frac{\omega}{c}\sigma_R\right)^2$ – дисперсія флуктуацій фази, σ_R^2 – дисперсія флуктуацій фазового шляху хвилі. При $\sigma_\varphi^2 \ll 1$ (фронт майже плоский) $\overline{P} \approx P$, а при $\sigma_\varphi^2 \gg 1$ потужність $\overline{P} \ll P$.

При сильних флуктуаціях збільшувати число каскадів не має сенсу. Це справедливо, якщо не використовувати явище ОХФ. При його використанні кожний промінь, відбившись від адаптивного дзеркала, пройде назад точно по тій же траєкторії, що й при прямому поширенні. У результаті цього відбувається *самокорекція*, причому автоматична, хвильового фронту.

Таким чином, використання явища ОХФ дозволяє багаторазово збільшити випромінювану потужність при збережені плоского фронту хвилі.

3.4.5. Лазерний керований термоядерний синтез

Можливість створення і нагрівання плазми до термоядерних ($\sim 10^8$ K) температур за допомогою сфокусованого лазерного випромінювання була обґрунтована ще в 1962 р.

Сучасна технологія лазерного керованого термоядерного синтезу (ЛКТС) заснована на всебічному опроміненні сферичної мішені діаметром $D \sim 0{,}1 - 1$ мм потужним лазерним імпульсом з $P \sim 10^{13} - 10^{14}$ Вт і $\tau \sim 10^{-9}$ с (енергія в імпульсі $W \sim 10^4 - 10^5$ Дж). При цьому густина потоку енергії на поверхні мішені $q \sim 10^{18} - 10^{20}$ Вт/м^2. Під дією імпульсу мішень повинна сильно стискуватися до густин $\rho \sim 10^6$ кг/м^3 і нагріватися до $T \sim 10^8$ K. Розрахунок показує, що при $W \sim 10^5 - 10^6$ Дж одержувана при ЛКТС потужність буде $10 - 10^3$ разів більше затрачуваної. Одна із найпотужніших лазерних систем «Нова-новетта» має сумарну енергію імпульсів $\sim 10^5$ Дж при $\tau \approx 0{,}3$ нс ($P \approx 3 \cdot 10^{14}$ Вт, $q \approx 3 \cdot 10^{22}$ Вт/м^2). Такі параметри лазера, в принципі, дозволяють здійснити ЛКТС.

При ЛКТС виникають, мабуть, найсильніші нелінійні ефекти у відповідному діапазоні електромагнітних хвиль.

3.4.6. Інші застосування нелінійних явищ

Ефект самопросвітління світлових полів. При введені в резонатор резонансно поглинаючого середовища в сильних лазерних полях вона просвітлюється й швидко повертається у вихідний стан за рахунок безвипромінювальної релаксації електронного збудження. Це явище дозволило практично реалізувати лазер на основі середовища, що *самопросвітлюється*, з тривалістю імпульсів $\tau \sim 1$ пс.

Квантова метрологія. За рахунок використання нелінійних процесів удається досягти ширини лінії поглинання атомами й молекулами $\Delta f \sim 10^3$ Гц, а значить відносної нестабільності частоти випромінювання $\sim 10^{-13} - 10^{-12}$. Тому лазер є найбільш *монохроматичним* джерелом випромінювання у всьому електромагнітному діапазоні хвиль. Завдяки цій властивості він виявляється незамінним інструментом у метрології.

Перетворення сигналів і зображень. Воно засноване на ефекті генерації гармонік на комбінаційній частоті. Таким чином можна здійснювати *гетеродинування* або, навпаки, *перенос спектра* по частоті вгору на основі співвідношення $\omega = \pm\omega_1 + \omega_s$, де ω_1, ω_s – частоти хвиль накачки й сигналу. Так здійснюється перетворення інфрачервоного або далекого ультрафіолетового діапазонів на видиме зображення. Описана методика використовується, наприклад, в інфрачервоній астрономії.

Питання для самоконтролю

1. Перерахуйте застосування нелінійних явищ у квантовій радіофізиці.
2. Запишіть і поясніть фізичний зміст умов просторово-часового синхронізму.
3. Намалюйте схему й опишіть принцип роботи параметричних генераторів світла.
4. У чому заключаються головні переваги параметричних генераторів світла?

5. Що являє собою нелінійна спектроскопія?

6. Що являє собою адаптивна оптика?

7. Опишіть особливості лазерного термоядерного синтезу.

3.5. Основні результати

1. До нелінійних явищ у квантовій радіофізиці призводять такі механізми: тепловий, стрикційний, атомний і релятивістський. Вакуумний механізм у найближчій перспективі реалізований бути не може. Важливо, що $E_t \ll E_s \ll E_a \ll E_r \ll E_v$.

2. Генерація другої гармоніки – основний класичний нелінійний ефект квантової радіофізики.

До класичних ефектів також можна віднести самофокусування (самодефокусування) лазерного пучка.

3. Нелінійні явища широко використовуються для генерації оптичних гармонік, параметричної генерації випромінювання, в нелінійній спектроскопії й адаптивній оптиці, в квантовій метрології, а також при розв'язанні інших складних задач.

РОЗДІЛ 4. НЕЛІНІЙНІ ЯВИЩА В ПЛАЗМОВІЙ РАДІОФІЗИЦІ

... Найбільш «багатою» щодо різних нелінійних проблем середовищем виявилася плазма[1].

У цьому розділі розглядаються основні параметри плазми, механізми нелінійності, а також ефекти, що виникають при поширенні сильних електромагнітних хвиль у плазмі [4, 8, 34, 41].

4.1. Загальні відомості про плазму

Плазмою називається *квазінейтральний іонізований газ*. Плазма являє собою *четвертий* і *основний* стан речовини. Практично весь видимий Всесвіт заповнений плазмою. Плазма – суміш із електронів, іонів і нейтральних частинок (нейтралів).

Найважливіша властивість плазми полягає в *колективному характері* процесів.

Термін «плазма» ввели у фізику в 1929 р. І. Ленгмюр і Л. Тонкс, які проводили дослідження газорозрядної плазми.

Основи *кінетичного опису* плазми заклали Л. Д. Ландау і А. О. Власов у 1930-ті – 1940-ві рр.

У 1942 р. Х. Альфвен запропонував систему рівнянь *магнітної гідродинаміки* (*МГД*).

Інтерес до дослідження плазми різко зріс після Другої світової війни у зв’язку з появою ядерної зброї і ракетно-космічної техніки, а також у зв’язку з постановкою задачі і спробами розв’язати проблему керованого термоядерного синтезу.

[1] Див. [10].

Уже в 1950-ті рр. стало ясно, що більшість ефектів в плазмі є *нелінійними*.

Теоретичні й експериментальні дослідження взаємодії сильних електромагнітних полів з лабораторною плазмою були викликані пропозицією В. І. Векслера здійснити *радіаційне прискорення* згустків плазми (1956 р.).

Незабаром було відкрите *аномальне поглинання* хвиль у плазмі, що супроводжується її ефективним нагріванням, самовпливом хвиль, генерацією нестійкостей і т. д. Ці процеси мали *пороговий характер*.

В наступні роки нелінійна взаємодія сильних електромагнітних хвиль з плазмою інтенсивно досліджувалася [4, 5, 8, 34, 41].

4.1.1. Методи теоретичного опису плазми

Відомі три основних методи опису плазми.

Елементарний опис. Розглядається рух окремих частинок, причому частинки даного сорту (електрони, іони й нейтрали) ідентичні, тобто мають однакову швидкість та інші параметри руху. Такий опис найбільш простий, хоч і не є строгим. Саме він використовується нижче. Його доцільно застосовувати при описі достатньо розрідженої плазми.

МГД-опис. Справедливий при вивченні досить щільної плазми. Плазма при цьому розглядається як суцільне середовище, у якому протікають струми. Такий опис також є наближеним.

Кінетичний опис є найбільш строгим. Заснований на вивченні функції розподілу частинок за швидкостями. Її знаходять з кінетичного рівняння Больцмана.

4.1.2. Основні параметри плазми

Оскільки плазма – це газ, хоча й іонізований, у ній діють *термодинамічні* процеси, характерні для газу. Наявність заряджених частинок призводить до *електродинамічних* процесів.

Плазму характеризують температурами T_e, T_i і T_n, а також тепловими швидкостями її частинок:

$$v_{Te} = \sqrt{\frac{kT_e}{m}}, \qquad v_{Ti} = \sqrt{\frac{kT_i}{m_i}}, \qquad v_{Tn} = \sqrt{\frac{kT_n}{m_n}}.$$

Крім цих швидкостей, уводиться також швидкість іонного звука, який існує при $T_e \gg T_i$,

$$v_s = \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}}.$$

Тут k – стала Больцмана; m, m_i и m_n – маси частинок.

При русі частинки зіштовхуються між собою, число зіткнень в одиницю часу:

$$\nu_e = \nu_{ee} + \nu_{ei} + \nu_{en},$$

$$\nu_i = \nu_{ii} + \nu_{ie} + \nu_{in},$$

$$\nu_n = \nu_{nn} + \nu_{ne} + \nu_{ni},$$

де індекси вказують на сорт частинок, що зіштовхуються. Довжини вільного пробігу частинок:

$$l_e = v_{Te} / \nu_e, \qquad l_i = v_{Ti} / \nu_i, \qquad l_n = v_{Tn} / \nu_n.$$

Головний параметр плазми – концентрація заряджених частинок $N = N_e$. У силу квазінейтральності $N + N^- \approx N^+$, где N^-, N^+ – концентрація негативних й позитивних іонів. Властивості плазми істотно залежать від ступеня іонізації:

$$S_i = \frac{N}{N + N_n},$$

де N_n – концентрація нейтралів. При $N \ll N_n$, величина $S_i \ll 1$, тобто плазма є слабкоіонізованою. Якщо ж $N \gg N_n$, то $S_i \approx 1$ і плазму називають сильноіонізованою. У цьому випадку звичайно $N^- \approx 0$ и $N \approx N^+$. Іони будемо вважати однозарядними.

Крім перерахованих, плазма характеризується й іншими параметрами.

Додамо, що температура лабораторної плазми змінюється з $\sim 10^3$ K (плазмові електронні прилади) до $\sim 10^8$ K (плазма ядерного вибуху). В той же час N варіюються від $\sim 10^{20}$ м$^{-3}$ (МГД-генератори, токомаки, плазмові електронні прилади) до $\sim 10^{28}$ – 10^{30} м$^{-3}$ (напівпровідникова плазма, плазма металів, плазма ядерного вибуху).

4.1.3. Плазмова частота

Будь-яке збурення плазми призводить до коливань на власній частоті, що одержала назву *плазмової* або *ленгмюрівської*. Одержимо для неї вираз.

Збурення викликає появу *поля розділення заряду* $\vec{E}$, під дією якого електрон рухається зі швидкістю $\vec{v}$. Рівняння руху електрона має вигляд:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}, \tag{4.1.1}$$

де, зазвичай, m, e – маса і заряд електрона. Для лінійних коливань

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\,\vec{v}}{\partial\,t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} \approx \frac{\partial\,\vec{v}}{\partial\,t},$$

тоді з (4.1.1)

$$\frac{\partial\,\vec{v}}{\partial\,t} \approx \frac{e}{m}\vec{E}. \tag{4.1.2}$$

Для поля $\vec{E}$ справедлива теорема Гаусса:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \tag{4.1.3}$$

де $\vec{S}$ – замкнута поверхня, що оточує повний заряд Q, ε_0 – електрична стала. Повний заряд знаходиться з рівняння безперервності:

$$\frac{\partial\,Q}{\partial\,t} = -\oint \vec{j}d\vec{S}, \tag{4.1.4}$$

де

$$\vec{j} = eN\vec{v} \tag{4.1.5}$$

є густина струму, зумовленого рухом електронів (масивні іони вважаємо нерухомими).

Система рівнянь (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4) і (4.1.5) є замкнутою і дозволяє обчислити $\vec{v}$, Q, $\vec{j}$ і $\vec{E}$. Одержимо рівняння для Q, виключивши $\vec{v}$, $\vec{j}$ і $\vec{E}$. Для цього продиференціюємо (4.1.4) за часом:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\,t^2} = -\oint \frac{\partial\,\vec{j}}{\partial\,t}d\vec{S}. \tag{4.1.6}$$

З (4.1.5), (4.1.2) маємо:

$$\frac{\partial\,\vec{j}}{\partial\,t} = eN\frac{\partial\,\vec{v}}{\partial\,t} = \frac{e^2N}{m}\vec{E}. \tag{4.1.7}$$

Підставимо (4.1.7) в (4.1.6):

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\,t^2} = -\frac{e^2N}{m}\oint \vec{E}d\vec{S}. \tag{4.1.8}$$

З урахуванням (4.1.3) з (4.1.8) одержимо

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\,t^2} + \frac{e^2N}{\varepsilon_0 m}Q = 0$$

або

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\,t^2} + \omega_p^2 Q = 0, \tag{4.1.9}$$

де

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2N}{\varepsilon_0 m}} \tag{4.1.10}$$

є плазмова частота електронів. Як відомо, рівняння вигляду (4.1.9) описує коливання. Під дією довільного збурення в плазмі виникають коливання повного заряду Q, а разом з ним і $\vec{v}$, $\vec{j}$ і $\vec{E}$.

За аналогією з ω_p вводиться плазмова частота іонів:

$$\omega_{pi} = \sqrt{\frac{e^2N}{\varepsilon_0 m_i}}.$$

Оскільки $m_i \gg m$, то $\omega_{pi} \ll \omega_p$.

4.1.4. Діелектрична проникність холодної ізотропної плазми

Під *холодною плазмою* розуміють середовище, для якого можна знехтувати тепловим рухом частинок, тобто вважати, що $T_{e,i,n} \to 0$.

Ізотропність плазми забезпечується відсутністю зовнішніх магнітних полів. Властивості плазми при цьому в усіх напрямках однакові.

Припустимо, що в плазмі поширюється монохроматична з частотою ω вигляду:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Вона викликає рух електронів, що описується рівнянням:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m}\left(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]\right) - \nu\vec{v}, \tag{4.1.11}$$

де ν – частота зіткнень електронів (індекс для простоти опущено), $\vec{B}$ – індукція магнітного поля хвилі. У нерелятивістському наближенні $\left|\left[\vec{v}\vec{B}\right]\right| \ll \left|\vec{E}\right|$, і рівняння (4.1.11) прийме вигляд:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m}\vec{E} - \nu\vec{v}. \tag{4.1.12}$$

З урахуванням того, що в лінійному наближенні для періодичного руху електрона

$$\frac{d}{dt} \approx \frac{\partial}{\partial t} = i\omega,$$

з (4.1.12) одержимо

$$\vec{v} = \frac{e}{m(i\omega + \nu)}\vec{E}.$$

Тоді

$$\vec{j} = eN\vec{v} = \frac{e^2 N}{m(i\omega + \nu)}\vec{E}. \qquad (4.1.13)$$

Рівняння (4.1.13) представляє собою закон Ома в диференціальній формі, з якого випливає вираз для провідності плазми:

$$\sigma = \frac{e^2 N}{m(i\omega + \nu)}. \qquad (4.1.14)$$

Оскільки повний струм визначається струмом зсуву і струмом провідності,

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_0 \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$$

або для гармонійних процесів

$$i\omega\vec{D} = i\omega\varepsilon_0\vec{E} + \vec{j},$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \frac{\vec{j}}{i\omega} = \left(\varepsilon_0 + \frac{\sigma}{i\omega}\right)\vec{E}.$$

Оскільки

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E},$$

то

$$\varepsilon = 1 + \frac{\sigma}{i\omega\varepsilon_0}. \qquad (4.1.15)$$

Підставляючи (4.1.14) в (4.1.15), одержимо

$$\varepsilon = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m i\omega(i\omega + \nu)}$$

або

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\nu)}, \qquad (4.1.16)$$

де ω_p дається формулою (4.1.10).

Важливо, що ε – функція комплексна. Це зумовлено зіткненнями електронів, у результаті чого хвиля поглинається. При $\nu = 0$

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \qquad (4.1.17)$$

Проаналізуємо вираз (4.1.17). При $\omega = \omega_p$ відносна діелектрична проникність $\varepsilon = 0$. Оскільки хвильове число $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}$, при $\omega = \omega_p$ маємо $k = 0$. Це означає, що настає відбиття хвилі.

В області, де $\varepsilon > 0$, тобто $\omega > \omega_p$, хвиля поширюється (k – величина дійсна). При $\omega \to \infty$ маємо: $\varepsilon \to 1$. Таким чином, при достатньо високих частотах електрони стають інерційними, і плазма поводить себе, як вакуум.

В області, де $\omega < \omega_p$ або $\varepsilon < 0$, хвиля не поширюється (рис. 4.1).

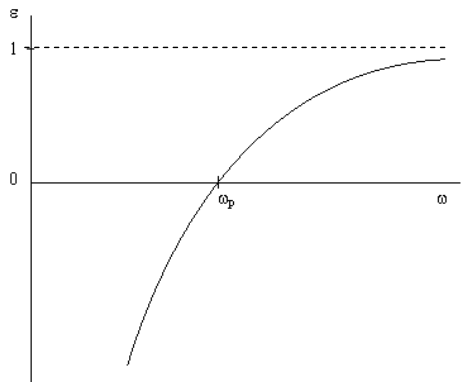


Рис. 4.1. Залежність діелектричної проникності ізотропної плазми без утрат від частоти хвилі

4.1.5. Показники заломлення та поглинання хвиль

Перетворимо (4.1.16) до вигляду:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} - i\frac{\omega_p^2 \nu}{\omega(\omega^2 + \nu^2)}. \qquad (4.1.18)$$

Введемо комплексний показник заломлення

$$\tilde{n} = n - i\kappa,$$

причому $\tilde{n}^2 = \varepsilon$. Тоді

$$\varepsilon = (n - i\kappa)^2 = n^2 - \kappa^2 - 2in\kappa. \qquad (4.1.19)$$

Порівнюючи (4.1.18) і (4.1.19), одержимо:

$$n^2 - \kappa^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2},$$

$$2n\kappa = \frac{\omega_p^2 \nu}{\omega(\omega^2 + \nu^2)}.$$

Ця система має точний аналітичний розв'язок, який є громіздким. Тому далі наведемо наближений розв'язок, справедливий при $n^2 \gg \kappa^2$, тобто вдалині від області відбиття хвилі:

$$n^2 \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}, \tag{4.1.20}$$

$$\kappa = \frac{\omega_p^2 \nu}{2n\omega(\omega^2 + \nu^2)}. \tag{4.1.21}$$

Якщо до того ж $n \approx 1$, то з (4.1.21) маємо:

$$\kappa = \frac{\omega_p^2 \nu}{2\omega(\omega^2 + \nu^2)}. \tag{4.1.22}$$

Залежність $\kappa(\nu)$ наведена на рис. 4.2.

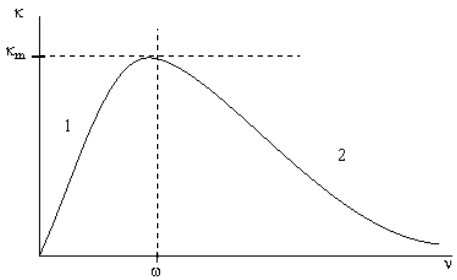


Рис. 4.2. Залежність показника поглинання хвилі від ν: при $\nu \ll \omega$ показник заломлення $\kappa \sim \nu$ (відрізок 1), при $\nu \gg \omega$ показник заломлення $\kappa \sim \nu^{-1}$ (відрізок 2), при $\nu = \omega$ величина показника досягає максимального значення $\kappa_m = \omega_p^2 / 4\omega^2$

4.1.6. Вплив зовнішнього магнітного поля

У магнітному полі з індукцією $\vec{B}_0$ під дією сили Лоренца заряджена частинка, що рухається, обертається навколо силової лінії з частотою, що називається *гіроскопічною* (коротко *гіро-*) *частотою* електронів ω_B або іонів ω_{Bi}.

Одержимо вирази для ω_B. При русі по колу сила Лоренца надає електрону доцентрове прискорення $v_\perp^2 / R$, тобто

$$ev_\perp B_0 = \frac{mv_\perp^2}{R_B},$$

де $v_\perp$ – перпендикулярна до $\vec{B}_0$ складова швидкості, R_B – *гірорадіус* електронів. Звідси

$$v_\perp = \frac{eB_0}{m} R_B.$$

Тоді

$$\omega_B = \frac{eB_0}{m}. \tag{4.1.23}$$

Аналогічно вводяться вирази для ω_{Bi} і гірорадіуса іонів:

$$\omega_{Bi} = \frac{eB_0}{m_i}, \quad R_{Bi} = \frac{v_{\perp i}}{\omega_{Bi}},$$

де $v_{\perp i}$ – перпендикулярна до $\vec{B}_0$ складова швидкості іонів.

У магнітному полі заряджені частинки в загальному випадку рухаються по спіралі, «навиваючись» на вектор $\vec{B}_0$. Тому $\vec{v}$ і $\vec{j}$ вже не паралельні вектору електричного поля хвилі $\vec{E}$. Це означає, що $\hat{\sigma}$ є тензором, тобто закон Ома набуває такого вигляду:

$$\vec{j} = \hat{\sigma}\vec{E}.$$

Тоді відносна діелектрична проникність також є тензор:

$$\hat{\varepsilon} = \hat{I} + \frac{\hat{\sigma}}{i\omega\varepsilon_0},$$

де

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Схема знаходження $\hat{\varepsilon}$ така ж, як і в ізотропному випадку. Направляючи $\vec{B}_0$ по осі z, одержимо, що

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \tag{4.1.24}$$

де

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2}, \qquad \varepsilon_{xy} = i\frac{\omega_p^2 \omega_B}{\omega(\omega^2 - \omega_B^2)}, \qquad \varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \tag{4.1.25}$$

З (4.1.25) видно, що компонента ε_{zz} має вигляд ε для ізотропного середовища (4.1.17). Цей результат – наслідок того, що сила Лоренца уздовж осі z дорівнює нулю. Важливо, що ε_{xy} і $\varepsilon_{yx} = -\varepsilon_{xy}$ – комплексні хоча середовище розглядається як *недисипативне*. Це викликане *гіротропією* середовища. У цьому випадку поглинання хвилі відсутнє.

Очевидно, що при $\omega_B = 0$ тензор (4.1.24) переходить у скаляр (4.1.17).

4.1.7. Подвійне променезаломлення

Наявність $\vec{B}_0$ призводить до *подвійного променезаломлення*. Електромагнітна хвиля може поширюватися у вигляді *звичайної* або *незвичайної* хвиль (або ж їх комбінації). При подовжньому ($\vec{k} \parallel \vec{B}_0$) поширенні

$$\varepsilon_{\mathrm{O},x} = \varepsilon_{xx} \mp i\varepsilon_{xy}$$

або з урахуванням (4.1.25)

$$\varepsilon_{\mathrm{O},x} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_B)}. \qquad (4.1.26)$$

Тут знаки «$\pm$» відповідають звичайній і незвичайній хвилям.

Вираз (4.1.26) наближено справедливий і при «квазіподовжньому» поширенні. У виразі (4.1.26) варто замінити ω_B на $\omega_L = \omega_B \cos\chi$, де $\chi -$ кут між $\vec{k}$ і $\vec{B}_0$.

Як видно з (4.1.26) при $\omega \to \omega_B$ настає *гірорезонанс,* пов'язаний з тим, що вектор $\vec{E}$ незвичайної хвилі й електрони в магнітному полі обертаються в один бік з однаковими кутовими швидкостями, а значить, хвиля й електрон можуть *резонансно* взаємодіяти між собою.

Питання для самоконтролю

1. Що таке плазма?
2. Які методи теоретичного опису плазми Ви знаєте? Охарактеризуйте й порівняйте їх.
3. Перерахуйте основні параметри плазми.
4. Отримайте вираз для плазмової частоти електронів.
5. Яку плазму називають холодною? Ізотропною? Однорідною?
6. Отримайте вираз для діелектричної проникності холодної ізотропної плазми без втрат.
7. Як зміниться вираз для діелектричної проникності холодної ізотропної плазми при врахуванні втрат?
8. Який фізичний зміст плазмової частоти електронів?
9. Яка умова отримання електромагнітних хвиль у холодній ізотропній плазмі без втрат?
10. Отримайте вирази для показників заломлення й поглинання електромагнітних хвиль у плазмі.

11. Подайте фізичне визначення залежності показника поглинання від частоти зіткнень.
12. До чого призводить наявність магнітного поля в плазмі?
13. Що таке гіроскопічна частота електронів?
14. Отримайте вираз для гіроскопічної частоти електронів.
15. Наведіть і прокоментуйте вирази для тензора діелектричної проникності плазми.

4.2. Механізми нелінійних явищ у плазмі

Дамо характеристику основних механізмів нелінійності й порівняємо їх між собою [4, 8, 34, 41].

4.2.1. Тепловий (нагрівний) механізм

Цей механізм виникає в плазмі із зіткненнями, завдяки яким відбувається *трансформація* спрямованої швидкості електронів $\vec{v}$ у теплову або хаотичну v_T. У результаті чого виникає *нагрів* електронів. Останні дуже повільно віддають свою енергію при зіткненні з важкими частинками. Так, при пружних зіткненнях відносна частка енергії, що втрачається електроном при одному зіткненні, в середньому дорівнює

$$\delta = 2\frac{m}{m_i} \sim 10^{-4} - 10^{-3}. \qquad (4.2.1)$$

Виділимо одиничний об'єм плазми й розглянемо баланс енергій. З одного боку, хвиля відповідно до закону Джоуля – Ленца передає електронам в одиницю часу енергію, яка дорівнює:

$$P_{\mathrm{DL}} = \vec{j}\vec{E}.$$

З іншого боку, електрони, зіштовхнувшись, за той же час віддають іонам і нейтралам енергію:

$$P_{\mathrm{col}} = \delta\nu N\left(\frac{3}{2}kT_e - \frac{3}{2}kT_{e0}\right).$$

Тут T_e і T_{e0} – температура електронів при наявності хвилі і за її відсутності. З урахуванням сказаного *рівняння балансу енергії* електронів прийме вигляд:

$$N\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}kT_e\right) = P_{\mathrm{DL}} - P_{\mathrm{col}}, \qquad (4.2.2)$$

куди варто було б включити член, що описує *теплопровідність електронів.* Остання є несуттєвою для достатньо великих об'ємів плазми, що знаходяться в неоднорідному електричному полі, тобто для яких амплітуда $E_0 \neq E_0(\vec{r})$.

Обчислимо далі P_{DL} для

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos \omega t\,. \tag{4.2.3}$$

З рівняння руху електронів

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m}\vec{E}(t) - \nu\vec{v}$$

з урахуванням (4.2.3) при $\nu \neq \nu(t)$ для *осциляторної швидкості* одержимо такий вираз:

$$\vec{v} = \frac{e\vec{E}_0}{m(\omega^2+\nu^2)}(\omega \sin \omega t + \nu \cos \omega t)\,. \tag{4.2.4}$$

Тоді

$$P_{\text{DL}} = \vec{j}\vec{E} = eN\vec{v}\vec{E} = \frac{e^2N}{m(\omega^2+\nu^2)}E_0^2\Big(\omega \sin \omega t \cos \omega t + \nu \cos^2 \omega t\Big). \tag{4.2.5}$$

Усереднюючи (4.2.5) за часом, що дорівнює періоду коливання, одержимо вираз для середньої потужності Джоуля – Ленца:

$$\overline{P}_{\text{DL}} = \frac{1}{2}\frac{e^2N}{m(\omega^2+\nu^2)}E_0^2 \equiv \frac{1}{2}\sigma E_0^2. \tag{4.2.6}$$

Як випливає з (4.2.2), у стаціонарному випадку $\overline{P}_{\text{DL}} = P_{\text{col}}$, тобто

$$\frac{1}{2}\frac{e^2N}{m(\omega^2+\nu^2)}E_0^2 = \frac{3}{2}kT_{e0}\delta\nu N\left(\frac{T_e}{T_{e0}} - 1\right).$$

Звідси

$$\frac{T_e}{T_{e0}} = 1 + \frac{E_0^2}{E_p^2}, \tag{4.2.7}$$

де

$$E_p^2 = \frac{3kT_{e0}m\delta(\omega^2+\nu^2)}{e^2}. \tag{4.2.8}$$

Тут E_p – *плазмове поле*. Из (4.2.7) видно, що при $E_0 = E_p$ збурена температура $T_e = 2T_{e0}$.

Таким чином, плазмове поле є тим тем характерним полем, яке визначає величину нагрівання електронів плазми.

4.2.2. Стрикційний механізм

Із виразу (4.2.4) випливає, що в середньому за період поля $\overline{\vec{v}} = 0$. Обчислимо

$$\overline{\vec{v}^2} = \overline{v^2} = \frac{e^2E_0^2}{m^2(\omega^2+\nu^2)^2}(\omega^2\overline{\sin^2 \omega t} + 2\omega\nu\overline{\sin \omega t \cos \omega t} + \nu^2\overline{\cos^2 \omega t}) =$$

$$= \frac{e^2E_0^2}{2m^2(\omega^2+\nu^2)}.$$

Виявилося, що $\overline{v^2} \neq 0$. Це значить, що під дією поля електрон у середньому здобуває кінетичну енергію, яка дорівнює

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{e^2E_0^2}{4m(\omega^2+\nu^2)}. \tag{4.2.9}$$

Електрон немов знаходиться в потенційному полі з потенціалом φ. Тоді

$$e\varphi = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{e^2E_0^2}{4m(\omega^2+\nu^2)}.$$

У такому полі електрони описуються розподілом Больцмана:

$$N = N_0 \exp\left\{-\frac{e\varphi}{kT_{e0}}\right\} = N_0 \exp\left\{-\frac{E_0^2}{E_s^2}\right\}, \tag{4.2.10}$$

де

$$E_s^2 = \frac{4kT_{e0}m(\omega^2+\nu^2)}{e^2}. \tag{4.2.11}$$

Тут E_s – *стрикційне поле*, $N_0 = N|_{E_0=0}$.

У потенційному полі на електрон діє сила

$$\vec{F} = -\text{grad } e\varphi = -\frac{e^2}{4m(\omega^2+\nu^2)}\text{grad } E_0^2.$$

Вона відрізняється від нуля при

$$\text{grad } E_0^2 \neq 0\,,$$

тобто при $E_0 = E_0(\vec{r})$.

Отже, у неоднорідному полі (у пучку хвиль) на електрони діє виштовхувальна сила, що призводить відповідно до (4.2.10) зменшення їхньої концентрації. Цей ефект називається *електрострикцією*. Величина N зменшується в e разів при $E_0 = E_s$ (див. 4.2.10).

4.2.3. Іонізаційний механізм

У достатньо сильних полях електрон, здобуваючи кінетичну енергію (4.2.9), при зіткненні з нейтралом здатний іонізувати його. Знову утворений електрон також пришвидшується полем і також іонізує частинки. Процес іонізації протікає *лавиноподібно*.

Оцінимо поле іонізації E_i з умови

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} \geq w_i, \tag{4.2.12}$$

де w_i – потенціал іонізації атомів або молекул. Зазвичай $w_i \sim 10$ эВ. Помітна іонізація повітря електромагнітним полем, настає, однак, уже при середній енергії электрона ~ 2 эВ За рахунок наявності швидких електронів у «хвості» розподілу частинок за швидкостями.

З (4.2.12) з урахуванням (4.2.9) одержимо вираз для поля *іонізації* (або *пробою*) газу:

$$E_i^2 = \frac{4mw_i(\omega^2+\nu^2)}{e^2}. \tag{4.2.13}$$

4.2.4. Релятивістський механізм

З урахуванням сили Лоренца рівняння руху електрона має вигляд (4.1.11):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m}(\vec{E} + [v\vec{B}]) - \nu\vec{v}\,,$$

де $\vec{B}$ – індукція магнітного поля хвилі. Оскільки під дією електричної компоненти поля хвилі електрон здобуває швидкість $v \sim E$, а $B \sim E$, то сила Лоренца виявляється пропорційною E^2. Знайдемо вираз для характерного поля у випадку релятивістського механізму нелінійності з умови $v = c$, де v – осциляторна швидкість, що одержується з (4.1.11) при нехтуванні силоюЛоренца:

$$\vec{v} = \frac{e\vec{E}}{m(i\omega+\nu)}.$$

Звідси її модуль:

$$v = \frac{eE_0}{m(\omega^2+\nu^2)^{1/2}}.$$

Тоді $v = c$ при $E_0 = E_r$, де

$$E_r^2 = \frac{m^2c^2(\omega^2+\nu^2)}{e^2}. \tag{4.2.14}$$

4.2.5. Порівняння механізмів

Перепишемо ще раз вираз для характерних інтенсивностей поля хвилі (див. (4.2.8), (4.2.11), (4.2.13) і (4.2.14)):

$$E_p^2 = \frac{3kT_{e0}m\delta(\omega^2+\nu^2)}{e^2}, \tag{4.2.15}$$

$$E_s^2 = \frac{4kT_{e0}m(\omega^2+\nu^2)}{e^2}, \tag{4.2.16}$$

$$E_i^2 = \frac{4mw_i(\omega^2+\nu^2)}{e^2}, \tag{4.2.17}$$

$$E_r^2 = \frac{m^2c^2(\omega^2+\nu^2)}{e^2}. \tag{4.2.18}$$

Із цих виразів видно, що залежність інтенсивності від частоти хвилі і ν для всіх механізмів подібна (строго говорячи, тут ν – збурена частота зіткнень, однак цим поки будемо нехтувати).

Побудуємо відношення:

$$\frac{E_p^2}{E_r^2} = 3\delta\frac{kT_{e0}}{mc^2},$$

$$\frac{E_s^2}{E_r^2} = 4\frac{kT_{e0}}{mc^2},$$

$$\frac{E_i^2}{E_r^2} = 4\frac{w_i}{mc^2}.$$

Оскільки $kT_{e0} \ll mc^2$, $w_i \ll mc^2$, то

$$E_p \ll E_s \ll E_i \ll E_r.$$

Наприклад, при $T_{e0} = 300$ K, $\delta = 10^{-4}$, $w_i = 10$ эВ $\approx 1{,}6\cdot10^{-18}$ Дж, $mc^2 \approx 10^{-13}$ Дж маємо:

$$E_p : E_s : E_i : E_r = 4\cdot10^{-6} : 4\cdot10^{-4} : 8\cdot10^{-3} : 1.$$

Величина $E_r \sim 10^7$ В/м при $\omega \gg \nu$, $f = 10^9$ Гц. Це дуже велике значення напруженості поля для електромагнітних хвиль радіодіапазону. Для досягнення полів $\sim 10^7$ В / м необхідна потужність генератора

$\sim 10^{10} - 10^{12}$ Вт. Тому для практики становлять інтерес тепловий, стрикційний та іонізаційний механізми нелінійності.

Питання для самоконтролю

1. Перелічіть механізми нелінійних явищ у плазмовій радіофізиці.
2. Опишіть тепловий (нагрівний) механізм нелінійності у плазмовій радіофізиці.
3. Опишіть стрикційний механізм нелінійності у плазмовій радіофізиці.
4. Опишіть іонізаційний механізм нелінійності у плазмовій радіофізиці.
5. Опишіть релятивістський механізм нелінійності у плазмовій радіофізиці.
6. Порівняйте механізми нелінійних явищ у плазмовій радіофізиці.
7. Чи всі механізми нелінійних явищ у плазмовій радіофізиці реалізуються на практиці?

4.3. Рівняння балансу енергії та концентрації частинок

Рівняння балансу для фізичного параметра w (концентрації, енергії частинок й т. п.) має вигляд:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_w = q_p - q_l, \qquad (4.3.1)$$

де $\vec{j}_w$– густина потоку параметра w; q_p, q_l – швидкості його утворення й втрат.

Спочатку розглянемо рівняння балансу енергії електронів в одиниці об'єму. При цьому

$$w = \frac{3}{2}kT_e, \quad q_p = \frac{P_{\text{DL}}}{N}, \quad q_l = \frac{P_{\text{col}}}{N}, \quad \vec{j}_w = -\widehat{\kappa_e}\nabla T_e,$$

де $\widehat{\kappa_e}$ – тензор, що описує температуропровідність електронів. З урахуванням цього рівняння балансу електронів прийме вигляд (див. також (4.2.2)):

$$N\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}kT_e\right) = \vec{E}\hat{\sigma}\vec{E} - \frac{3}{2}k\delta\nu N(T_e - T_{e0}) + \nabla(\hat{\kappa}_e\nabla T_e). \qquad (4.3.2)$$

Для енергій іонів і нейтралів можна записати подібні рівняння, при цьому варто врахувати, що важкі частинки нагріваються при зіткненні з електронами.

Рівняння для N, N^+ і N^- також мають вигляд (4.3.1). Якщо $N^- \approx 0$, а $N \approx N^+$, рівняння балансу для N представляється в такий спосіб:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = q_e + q_i - q_a - q_r - \operatorname{div} \vec{j}_N, \qquad (4.3.3)$$

де q_e – швидкість утворення електронів зовнішнім джерелом, $q_i = \nu_i N$ – швидкість утворення електронів полем хвилі, q_a, q_r – швидкості зникнення електронів за рахунок їх прилипання та рекомбінації, причому

$$q_a = \beta_a N_n N, \qquad q_r = \alpha_r N N^+ \approx \alpha_r N^2, \qquad (4.3.4)$$

β_a, α_r – коефіцієнти прилипання і рекомбінації, $\vec{j}_N = \vec{j}_{ND} + \vec{j}_{NT}$– густина потоку частинок $\vec{j}_{ND}$, $\vec{j}_{NT}$– густина потоку частинок за рахунок дифузії і термодифузії, тобто

$$\vec{j}_{ND} = -\widehat{D}\nabla N,$$
$$\vec{j}_{NT} = -\widehat{D}_T\nabla T_e.$$

Тут $\widehat{D}$, $\widehat{D}_T$ – тензори дифузії і термодифузії. З урахуванням цього рівняння (4.3.3) приймає вигляд:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = q_e + \nu_i N - \beta_a N_n N - \alpha_r N^2 + \nabla\widehat{D}\nabla N + \nabla\widehat{D}_T\nabla T_e. \qquad (4.3.5)$$

До (4.3.2), (4.3.5) варто додати початкові та граничні умови, а також хвильове рівняння (або його наближені аналоги).

Питання для самоконтролю

1. Наведіть рівняння балансу енергії електронів у плазмі й опишіть фізичний зміст членів у рівнянні.
2. Наведіть рівняння балансу концентрації електронів у плазмі й опишіть фізичний зміст членів у рівнянні.

4.4. Збурення концентрації електронів

4.4.1. Прилипання та рекомбінація електронів

Нагрівання електронів полем хвилі викликає зміну $\beta_a(T_e)$ і $\alpha_r(T_e)$. Це призводить до збурення N. У слабких полях, коли $E_0 \ll E_i$, маємо $\nu_i = 0$. Для однорідного поля процеси дифузії й термодифузії несуттєві. Тоді (4.3.5) прийме вигляд:

$$\frac{dN}{dt} = q_e - \beta_a N_n N - \alpha_r N^2,\ N(0) = N_0. \qquad (4.3.6)$$

Рівняння (4.3.6) допускає аналітичний розв'язок. Наприклад, у стаціонарному випадку ($d/dt = 0$) маємо:

$$q_e - \beta_a N_n N - \alpha_r N^2 = 0, \qquad (4.3.7)$$

де $\beta_a = \beta_a(T_{e\infty})$, $\alpha_r = \alpha_r(T_{e\infty})$; $T_{e\infty}$ – стаціонарне значення T_e (важливо, що час становлення T_e завжди набагато менше за час становлення N). Тоді з (4.3.7) випливає:

$$N_\infty \approx q_e / \beta_a N_n, \qquad \alpha_r N_\infty \ll \beta_a;$$
$$N_\infty \approx (q_e / \alpha_r)^{1/2}, \qquad \alpha_r N_\infty \gg \beta_a.$$

4.4.2. Іонізація газу електричним полем

Нехай $q_e \ll q_i$ і процесами переносу можна знехтувати. Тоді з (4.3.5) одержуємо, що

$$\frac{dN}{dt} = \nu_i N - \beta_a N_n N - \alpha_r N^2, \qquad N(0) = N_0. \qquad (4.3.8)$$

У несамоузгодженій постановці задачі поле E_0 задане, а $\nu_i = \nu_i(E_0) = \text{const}$. При $\alpha_r N \ll \nu_i - \beta_a N_n$ маємо:

$$\frac{dN}{dt} \approx (\nu_i - \beta_a N_n) N,$$
$$N(t) = N_0 \exp\left\{\left(\nu_i - \beta_a N_n\right) t\right\}.$$

Якщо $\nu_i > \beta_a N_n$, то $N(t)$ спочатку зростає за експоненціальним законом, тобто виникає пробій газу. Це відбувається при $E_0 \geq E_i$.

За великі проміжки часу $\alpha_r N$ зростає швидше, ніж інші члени в рівнянні (4.3.8), і настає стабілізація пробою. При $d/dt = 0$ маємо:

$$N_\infty = \left(\nu_i - \beta_a N_n\right) / \alpha_r.$$

Залежність $N(t)$ при пробої показана на рис. 4.3.

4.4.3. Порушення гідростатичної рівноваги

Нагрівання частинок плазми призводить до її дифузії і термодифузії. Обидва процеси пов'язані зі зміною тиску в плазмі:

$$p = p_e + p_i = NkT_e + NkT_i.$$

У незбурених умовах

$$p = N_0 k T_{e0} + N_0 k T_{i0}.$$

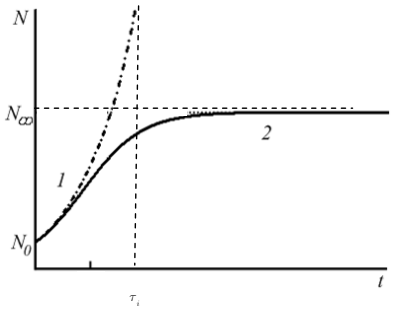


Рис. 4.3. Залежність N від часу при пробої газу: відрізок 1 – $N \sim \exp(t/\tau_i)$, $t \leq \tau_i = (\nu_i - \beta_a N_n)^{-1}$; відрізок 2 – $N \approx N_\infty$, $t \gg \tau_i$

У стаціонарному випадку $p = p_0$, тобто

$$N_\infty k(T_{e\infty} + T_{i\infty}) = N_0 k(T_{e0} + T_{i0}).$$

Звідси

$$N_\infty = N_0 \frac{T_{e0} + T_{i0}}{T_{e\infty} + T_{i\infty}}.$$

Нагрівання частинок плазми при цьому призводить до зменшення її концентрації ($N < N_0$).

Питання для самоконтролю

1. Опишіть процес прилипання електронів. Складіть відповідне рівняння балансу концентрації електронів.
2. Опишіть процес рекомбінації електронів. Складіть відповідне рівняння балансу концентрації електронів.
3. Опишіть процес іонізації газу електричним полем. Складіть відповідне рівняння балансу концентрації електронів.
4. До чого призводить порушення гідростатичної рівноваги в плазмі?

Задачі

1. Амплітуда поля електромагнітної хвилі в 10 разів перевищує плазмове поле. У скільки разів змінилася температура електронів у плазмі?

2. Під дією потужної електромагнітної хвилі температура електронів збільшилася вдвічі. У скільки разів змінився коефіцієнт прилипання $\beta_a = \beta_{a0} T_e / T_{e0}$ і концентрація електронів N?

3. Амплітуда поля електромагнітної хвилі в 2 рази перевищує стрикційне поле E_s. У скільки разів змінилася концентрація електронів N?

4. Під дією потужної електромагнітної хвилі T_e збільшилась удвічі, а T_i залишилась незмінною. У скільки разів змінилася N у результаті процесів переносу (дифузії і термодифузії)? Дано, що $T_{e0} = T_{i0}$.

5. Пробій плазми описується таким рівнянням балансу:

$$\frac{dN}{dt} = q_i - \alpha_r N^2,$$

де $q_i = \nu_i N$, $\nu_i = 10^9$ с$^{-1}$, $\alpha_r = 10^{-13}$ м^{3}с$^{-1}$, $N_0 = 10^8$ м$^{-3}$.

а) Знайти стаціонарний розв'язок рівняння балансу і обчислити N_∞.

б) Знайти час становлення N.

в) Знайти нестаціонарний розв'язок рівняння балансу. Побудувати графік й проаналізувати розв'язок.

г) Вивчити процес релаксації N після виключення поля.

6. Процес прилипання ефективно діє при потрійних зіткненнях електрона з двома молекулами повітря. Отримати диференціальне рівняння, що описує зміни концентрації електронів N у часі. Врахувати процеси утворення електронів і їх прилипання. Знайти стаціонарний і нестаціонарний розв'язки рівняння балансу, а також час становлення N.

4.5. Самовплив електромагнітних хвиль

Самовплив – класичний ефект у плазмовій радіофізиці. Залежно від механізму нелінійності розрізняють тепловий, стрикційний самовплив і самовплив іонізуючих хвиль. Розглянемо ці явища докладніше [4, 8, 34, 41].

4.5.1. Тепловий самовплив хвиль

Ефект самовпливу описується системою рівнянь, що складається з укороченого рівняння для амплітуди хвилі E_0 і рівнянь балансу для T_e і N. Нехай у стаціонарному випадку вони мають вигляд (хвиля поширюється вздовж осі x):

$$\frac{dE_0}{dx} + \frac{\omega}{c}\kappa(E_0)E_0 = 0, \qquad E_0(0) = E_{00},$$

$$\delta\nu(T_e - T_{e0}) = \frac{E_0^2}{E_p^2}\frac{\omega^2+\nu_0^2}{\omega^2+\nu^2}\delta_0\nu T_{e0},\ N = N_0.$$

Тут на підставі (4.1.22)

$$\kappa = \frac{\omega_p^2\nu}{2\omega(\omega^2+\nu^2)} \approx \kappa_0\frac{\nu}{\nu_0}\frac{\omega^2+\nu_0^2}{\omega^2+\nu^2}.$$

Приймемо для простоти, що $\delta(T_e) = \delta_0$, $\nu(T_e) = \nu_0\theta$, де $\theta = T_e / T_{e0}$. Тоді

$$\frac{dE_0}{dx} + \frac{\omega}{c}\kappa_0\theta\frac{\omega^2+\nu_0^2}{\omega^2+\nu_0^2\theta^2}E_0 = 0,$$

$$\theta - 1 = \frac{E_0^2}{E_p^2}\frac{\omega^2+\nu_0^2}{\omega^2+\nu_0^2\theta^2}.$$

Будемо вважати, що E_p від координати x не залежить. Розглянемо далі два граничних випадки.

1. *Самовплив низькочастотних хвиль*. Для них $\omega^2 \ll \nu_0^2, \nu^2$,

$$\frac{dE_0}{dx} + \frac{\omega}{c}\frac{\kappa_0}{\theta}E_0 = 0, \tag{4.5.1}$$

$$\theta - 1 = \frac{E_0^2}{\theta^2 E_p^2}. \tag{4.5.2}$$

Перейдемо в (4.5.1) до E_0^2:

$$\frac{dE_0^2}{dx} + 2\frac{\omega}{c}\kappa_0\frac{E_0^2}{\theta} = 0. \tag{4.5.3}$$

Із (4.5.2) випливає, що

$$E_0^2 = (\theta - 1)\theta^2 E_p^2. \tag{4.5.4}$$

Підставляючи (4.5.4) в (4.5.3), після спрощення одержимо:

$$(3\theta - 2)\frac{d\theta}{dx} = -2\frac{\omega}{c}\kappa_0(\theta - 1).$$

Розділення змінних і інтегрування дає

$$(\theta - 1)e^{3\theta} = (\theta_0 - 1)e^{3\theta_0}e^{-2K_0}, \tag{4.5.5}$$

де $\theta_0 = \theta(0)$, $K_0 = \dfrac{\omega}{c}\displaystyle\int_0^x \kappa_0 dx$.

У глибині плазми $2K_0 \gg 1$, $\theta \to 1$,

$$\theta - 1 \approx (\theta_0 - 1)e^{3(\theta_0 - 1)}e^{-2K_0}. \tag{4.5.6}$$

Після підстановки (4.5.6) в (4.5.2) маємо:

$$E_0 = E_p\theta\sqrt{\theta - 1} \approx E_p\sqrt{\theta - 1} \approx E_p\sqrt{\theta_0 - 1}e^{\frac{3}{2}(\theta_0 - 1)}e^{-K_0}.$$

Звідси множник самовпливу

$$P_A = \frac{E_p}{E_{00}} e^{\frac{3}{2}(\theta_0 - 1)} \sqrt{\theta_0 - 1}.$$

При $\theta_0 \gg 1$

$$P_A \approx \frac{E_p}{E_{00}} \theta_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3}{2}\theta_0},$$

де θ_0 знаходиться з (4.5.2):

$$\theta_0 \approx \left(\frac{E_{00}}{E_p}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Тоді

$$P_A = \left(\frac{E_p}{E_{00}}\right)^{\frac{2}{3}} e^{\frac{3}{2}\left(\frac{E_{00}}{E_p}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

Важливо, що при $E_{00} \gg E_p$, $\theta_0 \gg 1$, $P_A \gg 1$, тобто має місце сильний *ефект просвітлення плазми.*.

2. *Самовплив високочастотних хвиль.* Для них $\omega^2 \gg \nu_0^2, \nu^2$,

$$\frac{dE_0^2}{dx} + 2\frac{\omega}{c}\kappa_0 \theta E_0^2 = 0, \tag{4.5.7}$$

$$\theta - 1 = \frac{E_0^2}{E_p^2}. \tag{4.5.8}$$

Підстановка (4.5.8) в (4.5.7) дозволяє виключити θ і розділити змінні в диференціальному рівнянні:

$$\frac{dE_0^2}{E_0^2(1 + E_0^2/E_p^2)} = -2\frac{\omega}{c} k_0 dx.$$

Після інтегрування одержимо:

$$E_0(x) = E_p \frac{C^{\frac{1}{2}} e^{-K_0}}{\sqrt{1 - Ce^{-2K_0}}},$$

де $C = \dfrac{E_{00}^2}{E_p^2 + E_{00}^2}$. Звідси

$$P_A = \frac{E_p}{E_{00}} \sqrt{\frac{C}{1 - Ce^{-2K_0}}}.$$

На границі середовища $K_0 = 0$, як і повинно бути,

$$P_A = \frac{E_p}{E_{00}} \sqrt{\frac{C}{1 - C}} = 1.$$

У глибині плазми $2K_0 \gg 1$,

$$P_A \approx \frac{E_p}{E_{00}} C^{\frac{1}{2}} = \frac{E_p}{\sqrt{E_p^2 + E_{00}^2}} < 1,$$

Тобто повинен спостерігатися *ефект помутніння середовища*. При $E_{00}^2 \gg E_p^2$ маємо:

$$P_A \approx \frac{E_p}{E_{00}} \ll 1, \quad E_0 = E_{00} P_A e^{-K_0} = E_p e^{-K_0},$$

і, відповідно, виникає *ефект насичення поля.*

4.5.2. Стрикційний самовплив хвиль

Така взаємодія виникає при $E_0 \geq E_s$, у тому числі й у беззіштовхувальній плазмі ($\nu = 0$). Система рівнянь має вигляд:

$$\frac{dE_0^2}{dx} + 2\frac{\omega}{c}\kappa_0 \frac{N}{N_0} E_0^2 = 0, \qquad E_0(0) = E_{00},$$

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left\{-\frac{E_0^2}{E_s^2}\right\}.$$

Ця система інтегрується в квадратурах. Оскільки $N < N_0$, стрикційний самовплив призведе до *ефекту просвітління.*

4.5.3. Самовплив іонізуючих хвиль

Рівняння балансу концентрації N має вигляд:

$$\frac{dN}{dt} = q_e + \nu_i N - \beta_a N_n N - \alpha_r N^2. \tag{4.5.9}$$

До включення хвилі $\nu_i = 0$,

$$q_e - \beta_{a0} N_n N_0 - \alpha_{r0} N_0^2 = 0,$$

звідки обчислюється N_0. Тут β_{a0}, α_{r0} – коефіцієнти прилипання й рекомбінації в незбуреному середовищі.

Після включення хвилі головними членами в рівнянні (4.5.9) стають такі:

$$\frac{dN}{dt} \approx \nu_i N - \alpha_r N^2 .$$

При $t \gg \tau_i$ маємо: $d/dt = 0$, $N \approx \nu_i / \alpha_r$. Задаючись моделлю для $\nu_i(E_0)$, рівняння для E_0 з урахуванням того, що $\kappa = \kappa_0 N / N_0 = \kappa_0 \nu_i(E_0) / \alpha_r N_0$, перепишемо у вигляді

$$\frac{dE_0^2}{dx} + 2\frac{\omega}{c}\kappa_0 \frac{\nu_i(E_0)}{\alpha_r N_0} E_0^2 = 0. \qquad (4.5.10)$$

Розв'язок (4.5.10) представляється в квадратурах. Оскільки $N > N_0$, самовплив іонізуючих хвиль призводить до *ефекту помутніння* плазми. Хвиля при цьому практично повністю поглинається в шарі товщиною $\Delta x \approx \left(\frac{\omega}{c}\kappa\right)^{-1}$. Звідси

$$\Delta x \approx l_d \frac{N_0}{N}, \qquad (4.5.11)$$

$l_d = \left(\frac{\omega}{c}\kappa_0\right)^{-1}$ – глибина згасання в лінійній теорії. З (4.5.11) видно, що

$$\Delta x \sim N^{-1}.$$

Зауважимо, що одночасно з іонізацією загалом мають враховуватися нагрівання електронів, залежності $\nu_i(T_e)$, $\beta_a(T_e)$ і $\alpha_r(T_e)$. Якщо ж поле неоднорідне, то мають братися до уваги електрострикція й процеси переносу.

Питання для самоконтролю

1. Опишіть тепловий самовплив електромагнітних хвиль у плазмі.
2. Опишіть стрикційний самовплив електромагнітних хвиль у плазмі.
3. Опишіть самовплив іонізуючих електромагнітних хвиль у плазмі.
4. У чому суть ефекту самопросвітлення й самопомутніння плазми?
5. У чому суть ефекту насичення поля?

Задачі

1. Для теплового самовпливу електромагнітного пучка в зіштовхувальній плазмі з частотою зіткнень

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{T_e}{T_{e0}}\right)^{1/2}$$

оцінити величини критичного поля E_{cr}, критичної потужності P_{cr}, при яких настає ефект самоканалювання, а також фокусна відстань.

Прийняти, що

$\nu_0 = 6 \cdot 10^9$ с$^{-1}$, $T_{e0} = 300$ К, $\delta_0 = 2 \cdot 10^{-3}$, $T_e = T_{e0}\left(1 + E^2 / E_p^2\right)$, $f_{p0} = 3 \cdot 10^9$ Гц,

а) $r_0 = 4$ см, $f = 3 \cdot 10^{10}$ Гц,

б) $r_0 = 2$ см, $f = 5 \cdot 10^{10}$ Гц.

Тут r_0 – товщина пучка, T_e – температура електронів, E_p – плазмове поле, f – частота хвилі.

2. Вважаючи, що в результаті електрострикції концентрація електронів у плазмі зміниться за законом:

$$N = N_0 \left(1 - \frac{E^2}{E_s^2}\right),$$

де $E < E_s$, E_s – стрикційне поле, обчислити залежність амплітуди хвилі й множника самовпливу від пройденого шляху, проаналізувати їх поведінку в глибині середовища, а також при $E(0) \to E_s$. Врахувати, що коефіцієнт поглинання хвилі дорівнює $\alpha = \alpha_0 N / N_0$.

3. Вважаючи, що в результаті нагрівання електронів плазми високочастотною $(\omega \gg \nu)$ електромагнітною хвилею коефіцієнт поглинання зміниться за законом

$$\alpha = \alpha_0 \frac{\nu}{\nu_0},$$

де ν – частота зіткнень електронів з нейтральними частинками, обчислити залежність амплітуди хвилі й множника амплітудного самовпливу від пройденого шляху. Проаналізувати їх поведінку в глибині плазми, а також для випадку дуже сильної хвилі на границі плазми. Вважати, що в слабкоіонізованій плазмі (в нижній іоносфері) $\nu = \nu_0 (T_e / T_{eo})$, а рівняння балансу енергії (температур T_e) електронів має вигляд:

$$\frac{T_e}{T_{e0}} = 1 + \frac{E^2}{E_p^2},$$

де E_p – плазмове поле.

4. Вважаючи, що в результаті нагрівання електронів високочастотним $(\omega \gg \nu)$ електромагнітним полем коефіцієнт поглинання зміниться за законом $\alpha = \alpha_0(2 / (1+\theta))$, де $\theta = T_e / T_{e0}$ дається рівнянням балансу енергії електронів:

$$\theta = 1 + \frac{E^2}{E_p^2},$$

де E_p – плазмове поле, одержати вираз для амплітуди й множника самовпливу хвилі в залежності від пройденої відстані. Проаналізувати їх поведінку в глибині плазми, а також для випадку дуже сильної хвилі на границі плазми.

5. Вважаючи, що в результаті нагрівання електронів слабкоіонізованої плазми $(\nu = \nu_0\theta, \theta = T_e / T_{e0})$ високочастотною $(\omega \gg \nu)$ електромагнітною хвилею коефіцієнт поглинання змінюється за законом $\alpha = \alpha_0(\nu / \nu_0) = \alpha_0\theta$, обчислити нелінійну добавку до фази в залежності від пройденого шляху. Проаналізувати величину ефекту в глибині середовища при слабкому й дуже слабкому полі на границі плазми. Прийняти, що рівняння балансу енергії електронів має вигляд:

$$\theta = 1 + \frac{E^2}{E_p^2},$$

де E_p – плазмове поле, а показник заломлення середовища дорівнює

$$n = 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}.$$

6. Вважаючи, що в результаті електрострикції концентрація електронів у плазмі змінюється за законом:

$$N = N_0\left(1 - \frac{E^2}{E_c^2}\right),$$

де $E < E_s$, E_s – стрикційне поле, обчислити нелінійну добавку до фази, зумовлену самовпливом високочастотної $(\omega \gg \nu)$ хвилі як функцію

пройденого шляху. Проаналізувати величину ефекту в глибині плазми при $E(0) \to E_s$. Прийняти, що коефіцієнт поглинання й показник заломлення відповідно дорівнюють

$$\alpha = \alpha_0 \frac{N}{N_0}, \qquad n = 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

де ω_p – плазмова частота.

7. Показати, що стрикційний самовплив електромагнітного пучка в плазмі призводить до його самофокусування. Прийняти, що

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{E^2}{E_s^2}\right).$$

4.6. Інші нелінійні ефекти

Плазма, як *система багатьох тіл*, описується нелінійними рівняннями. Нелінійними є рівняння руху частинок, кінетичні рівняння та ін. Нас же цікавить тільки нелінійність *електродинамічного типу*, пов'язана з наявністю зовнішнього електромагнітного поля хвилі в середовищі.

Природно, що всі нелінійні ефекти, розглянуті в розділі 2, мають місце й у плазмі. Важливо, що в ній вони виявляються в дуже *слабких* полях. Тому плазма є дуже гарним об'єктом для вивчення нелінійних ефектів.

При поширенні сильних електромагнітних хвиль в іонізованому газі, крім *самовпливу* хвиль, має місце їх *взаємодія*, ефекти *фокусування* й *дефокусування*, *укручення* профілю хвилі, *нелінійні ефекти Доплера і Фарадея*. У плазмі можуть поширюватися *ударні хвилі* й *солітони* (див. пункт 2.6.7). Однак *головною особливістю* цього середовища є її *нестійкість*. У плазмі легко збуджуються нестійкості різних типів[1]. Розглянемо докладніше деякі нестійкості *електродинамічного типу*. До них належать *самофокусувальна, резонансні та параметричні.*

4.6.1. Самофокусувальна нестійкість

Розвитку нестійкості сприяє наявність флуктуацій N або *запалювальних* неоднорідностей. Наприклад, при $\Delta N < 0$ відповідно до (4.1.17) ε

[1] З цієї причини низка авторів пропонують розглядати плазму не тільки як іонізований газ, але і як газ *квазічастинок* (тобто коливань і хвиль).

збільшується і відбувається фокусування поля. Якщо збільшення поля призводить до подальшого зменшення N (за рахунок термодифузії, електрострикції і т. д.), виникає *позитивний зворотний зв'язок* і збуджується нестійкість. Електромагнітний пучок, проходячи через плазму, викликає її розшарування. Сам він у результаті самовпливу розпадається на окремі *«нитки»*.

Ефект самофокусування має місце не тільки в поперечному відносно напрямку поширення, але й у подовжньому напрямку. При цьому пучок хвиль також може стати нестійким. У такому випадку говорять про *модуляційну* нестійкість.

4.6.2. Резонансні нестійкості

Ленгмюрівська нестійкість. Ця нестійкість пов'язана з беззіштовхувальним резонансним поглинанням електромагнітної хвилі в області, де $n \approx 0$ або $\omega \approx \omega_p$. Енергія електромагнітної хвилі переходить в енергію плазмових хвиль із частотою, що приблизно дорівнює ω_p.

Ефективність трансформації енергії зростає, якщо в області резонансу ($\omega \approx \omega_p$) є запалювальні неоднорідності N. Останні слугують своєрідними резонаторами, що збуджуються хвилею накачки. При цьому відбувається інтенсивна *лінійна* трансформація енергії електромагнітної хвилі в енергію плазмової хвилі. Частина енергії цих хвиль йде на нагрівання електронів у неоднорідностях, у результаті термодифузії останні підсилюються. Це призводить до позитивного зворотного зв'язку, тобто до генерації *резонансної* нестійкості.

Для хвилі накачки має місце *аномальне ослаблення*. За певних умов генерація резонансної нестійкості має *вибуховий* характер (див. пункт 2.8.5).

Верхньогібридна нестійкість виникає на частоті верхнього гібридного резонансу: $\omega_h = \sqrt{\omega_p + \omega_b}$.

Берштейнівська нестійкість збуджується на частоті гірорезонансу електронів ω_B та її гармоніках $n\omega B$, де n є $\underline{\mathrm{N}}$.

4.6.3. Параметричні нестійкості

Параметрична нестійкість являє собою розпад хвилі накачки з частотою ω і хвильовим вектором $\vec{k}$ на дві інші хвилі:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \qquad \vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2.$$

З цієї причини нестійкість також називають *розпадною*.

Якщо причиною розпаду слугує нагрівання електронів або електрострикція електронів, то нестійкість називають відповідно *тепловою параметричною* або *стрикційною параметричною*.

Розпадна нестійкість ефективно збуджується в околі області, де $\varepsilon \approx 0$ і $\omega \approx \omega_p$. При цьому хвиля накачки розпадається на плазмову хвилю з $\omega_1 = \omega_p$ іонно-звукову хвилю з $\omega_2 = \omega_s = k_s v_s$. Зазвичай $\omega_s \ll \omega_p$. Тут v_s – швидкість іонного звука.

Якщо $\omega, \omega_1 \gg \omega_p$, розпад у вигляді

$$\omega = \omega_1 + \omega_s, \qquad \vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_s.$$

називають *вимушеним розсіянням Мандельштама – Бриллюена*. Хвиля з частотою ω_1 є поперечною електромагнітною і являє собою результат розсіяння хвилі накачки на іонному звуці.

При $\omega > 2\omega_p$ можливий розпад типу

$$\omega = \omega_1 + \omega_p, \qquad \vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_p.$$

Цей процес являє собою розсіяння хвилі накачки на плазмових коливаннях (*вимушене комбінаційне розсіяння Рамана*).

Якщо плазма знаходиться в зовнішньому магнітному полі, то в ній збуджуються й інші типи нестійкостей.

Питання для самоконтролю

1. Як Ви вважаєте, в чому полягає головна особливість плазми?
2. Які нестійкості в плазмі Ви знаєте?
3. Опишіть самофокусувальну нестійкість.
4. Опишіть резонансну нестійкість.
5. Опишіть параметричну нестійкість.
6. Опишіть вимушене розсіяння Мандельштама – Бриллюена.
7. Опишіть вимушене розсіяння Рамана.

4.7. Особливості нелінійних явищ у напівпровідниках

Інтерес до дослідження впливу сильних електромагнітних полів на електрони в твердих тілах виник ще в 1920–1930-х рр. у зв'язку з вивченням *пробою* діелектриків, для яких поле пробою $E_{\text{пр}} \geq 3{\cdot}10^6$ В/м.

У 30-х рр. XX ст. виконана низка теоретичних робіт, присвячених впливу сильного електромагнітного поля на функцію розподілу електронів за швидкостями. Тоді ж була передбачена можливість *нагріву* носіїв. Ці роботи належать Л. Д. Ландау, О. С. Компанійцю, Б. І. Давидову та ін.

Перші експерименти були поставлені Шоклі й Райдером у 1951 р. Відтоді почалися систематичні дослідження нелінійних явищ у напівпровідниковій плазмі. Вони завершилися, зокрема, відкриттям *ефекту Ганна*, повсюдним упровадженням діодів Ганна в електроніку, побудовою теорії «гарячих» електронів і т. д.

Великий внесок у дослідження внесли Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, В. Денис, Ю. Пожела, Е. Д. Прохоров, В. М. Яковенко й ін. (див., наприклад, [4]).

4.7.1. Основні нелінійні явища

Твердотільна плазма істотно відрізняється від газорозрядної. По-перше, вона існує, починаючи з температур ~ 10 K і вище. По-друге, концентрація носіїв (електронів і дірок) $N \sim 10^{28}$ м$^{-3}$, що набагато більше N для плазми газового разряду. По-третє, напівпровідникова плазма дуже стійка і генерація нестійкостей – швидше виключення, ніж правило. По-четверте, низка ефектів має квантовомеханічний характер.

Ефекти в напівпровідниках в основному пов'язані з нагрівом електронів (тепловий механізм нелінійності). Величина плазмового поля E_p залежить від T_{e0}/T_D, где T_D – температура Дебая. При $T_{e0} \ll T_D$ плазмове поле $E_p \sim 10 - 100$ В/м, якщо ж $T_{e0} \gg T_D$, то $E_p \geq 10^5$ В/м. Нагрів електронів призводить до того, що провідність $\sigma = \sigma(E_0)$, вольт-амперна характеристика стає *N*-подібною, а значить, з'являється ділянка з негативним опором. При цьому генеруються солітони Ганна (див. пункт 2.6.5).

Нагрів електронів також викликає їх емісію з ненагрітої області, анізотропію провідності й інші ефекти.

Інші явища пов'язані зі зміною N у результаті уповільнення процесу рекомбінації або зменшення ймовірності захоплення на домішці.

У достатньо сильних полях ($E \geq E_i$) настає ударна іонізація і пробій напівпровідника. При цьому електрони з енергією, що перевищує ширину забороненої зони ($\sim 0{,}1 - 1$ эВ), зіштовхуючись з електронами валентної зони, «викидають» їх в зону провідності. Для напівпровідника на основі InSb величина $E_i \geq 2{\cdot}10^4$ В/м. При ударній іонізації домішок $E_i \sim 10^2 - 10^3$ В/м. Важливо, що на відміну від діелектрика при пробої напівпровідника кристал *не руйнується.*

У напівпровідниковій плазмі можливі нестійкості *гідродинамічного типу, перегрівна* (через зменшення $\delta(T_e)$ при нагріві електронів), а також *розпадна* (або, навпаки, *злиття* хвиль). При цьому $E_0 \geq 10^5$–10^6 В/м.

4.7.2. Використання нелінійних явищ

Нелінійна взаємодія сильних електромагнітних полів з газорозрядною плазмою використовується для її створення, нагріву, нелінійної діагностики, а також при розробці генераторів, підсилювачів і перетворювачів електромагнітних коливань у широкому діапазоні частот.

Ефект Ганна у твердотільній плазмі лежить в основі цілої низки напівпровідникових генераторів НВЧ коливань.

Нагрів електронів застосовується для діагностики плазми, а також при розробці малоінерційних, чутливих індикаторів електромагнітного випромінювання.

Питання для самоконтролю

1. У чому полягають особливості нелінійних явищ у напівпровідниковій плазмі?
2. Перелічіть основні нелінійні явища в напівпровідниковій плазмі.
3. Як використовуються нелінійні явища в плазмі?

4.8. Основні результати

1. До основних механізмів нелінійності в плазмі належать нагрів електронів, електрострикція, зміна концентрації носіїв і нелінійність сили Лоренца. Важливо, що $E_p \ll E_s \ll E_i \ll E_r$. У напівпровідниковій плазмі при $T_{e0} \gg T_D$ може бути $E_i \ll E_p \ll E_s \ll E_r$.

2. Нелінійні явища, пов'язані з поширенням сильних електромагнітних хвиль у плазмі, є такими ж, як і нелінійній електродинаміці.

3. Основною особливістю газорозрядної плазми є виникнення нелінійних явищ у порівняно слабких полях, а також генерація різних типів нестійкостей.

У напівпровідниковій плазмі нестійкості виражені слабко, і майже всі нелінійні ефекти пов'язані з нагрів електронів і зміною їх концентрації.

4. Нелінійна взаємодія хвиль з плазмою використовується для її створення, нагріву, діагностики, при розробці генераторів, підсилювачів і перетворювачів електромагнітних полів.

РОЗДІЛ 5. НЕЛІНІЙНІ ЯВИЩА В КОСМІЧНІЙ РАДІОФІЗИЦІ

Якщо ... реакція середовища змінює свої властивості зі зміною амплітуди хвилі, то говорять про нелінійність середовища, а хвилю достатньо великої інтенсивності називають нелінійною [1].

У цьому розділі описані нелінійні ефекти, що зумовлені впливом потужних радіохвиль, які випромінюються наземними установками, на навколоземну плазму (див. також [5, 8, 18, 34, 41]).

5.1. Короткі відомості про навколоземний космос

Земля оточена газовою оболонкою, що називається *атмосферою*. Її параметри в основному змінюються з висотою z.

В ізометричній атмосфері, коли $T_n(z) = \text{const}$, для тиску p і концентрації нейтралів справедлива *барометрична формула:*

$$p(z) = p(0)\exp(-z/H), \qquad N_n(z) = N_n(0)\exp(-z/H), \quad (5.1.1)$$

де $H = kT_n/m_n g \sim 10$ км – приведена висота, g – прискорення вільного падіння.

Під дією електромагнітного й корпускулярного випромінювань Сонця атмосфера на висотах $z \geq 50$ км *іонізується*.

Іонізована частина атмосфери називається *іоносферою*. Верхня границя останньої знаходить на висоті $z \approx 1000$ км. При $z \leq 200$ км іоносфера являє собою слабко іонізовану плазму в тому розумінні, що $\nu_{en} \gg \nu_{ei}$. На висотах $z \geq 200$ км плазму можна вважати сильно іонізованою ($\nu_{ei} \gg \nu_{en}$).

[1] Див. : Гурбатов С. Н. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии / С. Н. Гурбатов, А. Н. Малахов, А. И. Саичев. – М. : Наука, 1990. – 216 с.

Висотні профілі концентрації електронів наведені на рис. 5.1.

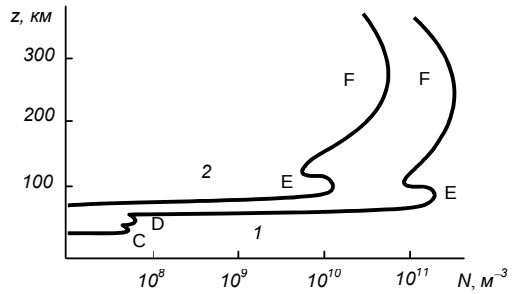


Рис. 5.1. Залежність електронної концентрації від висоти:
1 – день;
2 – ніч

Іоносфера складається з *областей,* або шарів: C ($z \approx 50$–70 км), D (70–90 км), E (90–130 км) і F (130–1000 км). Крім того, іоносферу умовно поділяють на нижню (50–100 км), середню (100–300 км) і зовнішню (300–1000 км).

Параметри іоносфери істотно залежать від часу доби, сезону, сонячної активності й магнітної збуреності. Однак в усіх випадках зберігаються області іоносфери і її головний максимум на висотах $\sim$ 300–400 км для дня й ночі відповідно. Його поява зумовлена дією двох *конкуруючих* процесів: з ростом висоти зменшується роль хімічних реакцій (втрат електронів) і збільшується роль дифузії.

При $z \leq 100$ км в іоносфері *динамічні* процеси (вітри, вихори й т. п.) приблизно такі ж, як і в нейтральній атмосфері. На висотах $z \geq 100$ км усе більше позначаються *електродинамічні* процеси (струми, електромагнітні сили й т. д.), а також вплив геомагнітного поля. Роль останнього стає визначальною на висотах $z \geq 1000$ км, у так званій *магнітосфері*.

Під магнітосферою розуміють частину навколоземного простору, заповненого геомагнітним полем і захопленими їм частинками. Захоплені геомагнітними пастками частинки утворюють *радіаційний пояс* Землі. Частинки рухаються по спіральним траєкторіям уздовж силових ліній $\vec{B}$, а також дрейфують у поперечному відносно $\vec{B}$ напрямку (електрони на схід, а протони на захід).

Умовно приймається, що верхня границя магнітосфери знаходиться на відстанях $\sim 10R_E$ (R_E – радіус Землі). За рахунок *сонячного вітру* (тобто потоку плазми з «вмороженим» магнітним полем сонячного походження) магнітосфера є асиметричним утворенням (рис. 5.2).

Верхню атмосферу, іоносферу та магнітосферу разом називають геокосмосом.

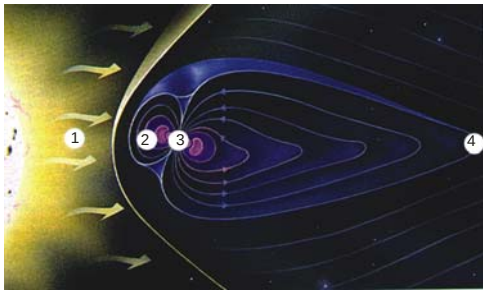


Рис. 5.2. Приблизний вид магнітосфери:
1 – сонячний вітер;
2 – радіаційний пояс;
3 – Земля;
4 – хвіст

Питання для самоконтролю

1. Опишіть побудову навколоземного космічного середовища.
2. Що називають атмосферою?
3. Що називають іоносферою?
4. Що називають магнітосферою?
5. Що називають геокосмосом?

5.2. Результати експериментів

Вперше ідею про можливость збурення іоносфери на висотах ~ 100 км потужною радіохвилею на гірочастоті електронів $f_B \sim 1$ МГц висловив В. Бейлі в 1925 р.

Перший нелінійний ефект – *крос-модуляція* радіохвиль – був відкритий незалежно західноєвропейцем Телледженом и горьковчанином Лбовим у середині 1930-х рр. Він отримав назву *Люксембург-горьковського ефекта*. З тих пір почалися систематичні дослідження впливу потужного радіовипромінювання на навколоземну плазму, які умовно можна розбити на чотири етапи [34].

1-й етап (1930–1950-ті рр.). Досліджуються *класичні ефекти крос-модуляції* й *самомодуляції* амплітудно-модульованих радіохвиль довгохвильового й середньохвильового діапазонів у D- і E-областях іоносфери. Встановлено, що ефекти починають проявлятися при потужностях радіостанцій $P \geq 100$ кВт.

Суттєвий внесок у ці дослідження внесли В. Бейлі, Ф. Хібберд, Л. Хакслі, Р. Сміт, Дж. Фейер, М. Кутоло, В. Л. Гінзбург, О. В. Гуревич, Й. М. Віленський та ін.

2-й етап (1960-ті рр.). В основному теоретично вивчаються нелінійні ефекти, викликані *тепловим механізмом* нелінійності. Великий внесок у ці дослідження внесли О. В. Гуревич, О. Б. Шварцбург та ін.

Під керівництвом І. С. Шлюгера в СРСР експериментально досліджуються ефекти на гірочастоті електронів, головним чином, у нижній іоносфері при впливі на неї *надпотужного* імпульсного випромінювання ($PG \approx 1000$ МВт, $G \approx 100$ – коефіцієнт підсилення антени). Виявлено ефекти *просвітління* й *помутніння* при самовпливі й взаємодії хвиль. Показано труднощі пробою атмосфери.

3-й етап (1970–1980-ті рр.). Теоретично й експериментально вивчається *велика розмаїтість явищ* в усіх областях іоносфери й у магнітосфері, що виникають у результаті впливу на плазму електромагнітного випромінювання з частотою $f \sim 1$ кГц – 1000 МГц.

Для цих досліджень у світі створено низку унікальних установок гектометрового й декаметрового діапазонів з $PG \sim 10 - 300$ МВт. Вісім з них уведені в лад у колишньому СРСР (три – в районі м. Н. Новгород, дві – біля м. Москви, по одній – біля м. Мончегорськ, м. Душанбе й м. Харків) (табл. 5.1). Дві установки функціонували в США, одна – в Норвегії. Крім того, є також установки в діапазонах частот ~ 10 кГц і 100 – 1000 МГц. Перші з них в основному призначені для впливу на магнітосферу, де $f_B \sim 10$–100 кГц.

З'явилася ціла низка наукових шкіл: у м. Н. Новгород, у м. Москва, м. Харків, у ФРН, Норвегії та США. Основна увага приділялася дослідженню *нестійкостей* в F-області іоносфери, *ефекту Гетманцева*, можливості *пробою атмосфери*, використанню штучного нагріву іоносфери для її дистанційної діагностики й т. п.

Досягнуті *гранично* великі потужності передавачів ~ 1 МВт у безперервному й $\sim 10 - 100$ МВт в імпульсному режимах. Коефіцієнти підсилення антен гектометрового й декаметрового діапазонів перевищили значення $G \sim 10^2 - 10^3$, а в діапазонах метрових – дециметрових хвиль – $G \sim 10^4 - 10^5$. Для антен кілогерцового діапазону $G \ll 1$.

У ході досліджень виявлено такі явища:

1. *Структуризація іоносферної плазми*, викликана утворенням витягнутих уздовж геомагнітного поля неоднорідностей концентрації електронів. Ракурсне розсіяння радіохвиль такими неоднорідностями.

2. *Аномальне поглинання радіохвиль* звичайної поляризації, що пов'язане з резонансним ефектом на частоті верхнього гібридного резонансу.

3. *Широкосмугове* ($\sim$ 100 кГц) *поглинання* інших радіохвиль поблизу частоти потужної радіохвилі.

4. *Штучне радіовипромінювання* зі збуреної області на частотах, відхилених на 100–300 кГц відносно частоти потужної радіохвилі.

5. *Збудження* дуже сильних *власних коливань* в іоносферній плазмі.

6. Ефективне *прискорення електронів.*

7. Сильне штучне *оптичне свічення іоносфери.*

В експериментах вдалося збільшити температуру електронів в 30–40 разів в D-області, на $\sim$ 100 % в E-області й на 10–100 % в F-області. Зміна N зазвичай не перевищувала кількох десятків відсотків.

Однак було одне виключення.

У 1988 р. група дослідників (Л. Данкен та ін.) із США за допомогою радара некогерентного розсіяння виявила, що поблизу місцевої півночі в зимовий час при нагріванні іоносфери потужною радіохвилею звичайної поляризації ($f = 3.175$ МГц, $PG \approx 60$ МВт) температура електронів збільшувалася в три рази.

Пояснення цьому аномальному ефекту через кілька років дала група російських учених (В. В. Васьков та ін.). Виявилось, що ефект пов'язаний зі збуреннями, які поширювалися від області нагрівання вздовж магнітної силової трубки аж до магнітоспряженої області. Додамо, що цей ефект спостерігається в низькоширотній іоносфері (магнітосферний параметр L = 1.25, довжина магнітної трубки наближена до 4 тис. км).

4-й етап (1980–2010-ті рр.). Продовжувалися дослідження традиційних ефектів (штучного радіовипромінювання іоносфери, ракурсного розсіяння). Новим ефектом став *ефект магнітного зеніту*. У напрямку магнітного зеніту температура електронів збільшувалася в 3–4 рази на висотах 300–600 км, тобто вище максимуму області F.

Створено *нові нагрівні стенди*: HAARP і HIPAS (Аляска, США), а також SPEAR (Шпіцберген) (див. табл. 5.1).

Значна увага приділяється вивченню збурень у зовнішній іоносфері, тобто. вище області відбиття гріючої радіохвилі, поширенню збурень уздовж магнітної силової трубки в магнітоспряжену область (В. В. Васьков та ін.).

Особлива увага приділялась збуренням, які поширюються на значні (~1000 км) відстані в горизонтальному напрямку (Л. Ф. Чорногор та ін.) [34].

Таблиця 5.1. Основні параметри радіотехнічних комплексів (нагрівних стендів) для впливу на іоносферу потужного радіовипромінювання (P_1 – потужність одного передавача)

Місце розташування, країна	f, МГц	G	Кількість РПУ	P_1, кВт	P, МВт	PG, ГВт	Роки експлуатації
Москва (СРСР)	1,3–1,4	100	1	10^4	10	1	1961–1989
Боулдер (США)	4,5–9 2,7–3,3	60–80 30			2 2	0,12 – 0,16 0,06	1970–1980
Аресибо (Пуерто-Рико, США)	3–12	200–400			0,75	0,15–0,3	1971–1980
Н. Новгород (СРСР)	4,6; 5,75	100–150	1	100	0,1	0,015–0,023	1973–1988
Н. Новгород (СРСР / Росія)	4,5–9	200–430	3	250	0,75	0,15–0,32	1981–дотепер
Мончегорськ (СРСР)	3,3	130	1	80	0,08	0,01	1976–1980
Тромсьо (Норвегія)	3,85–5,65 5,5–8 5,5–8	250 250 1000	12	100	1,2	0,3 0,3 1,2	1980–дотепер
Гіссар (Душанбе, СРСР)	3,7–6	60–80	1	100	0,1	0,006–0,008	1981–1988
Харків (СРСР / Україна)	5–12	150	1	100	0,1	0,015	1987–1991
HAARP (Фербенкс, Аляска, США)	2,8–10	1000	360	10	360	3,6	1990–2014
HIPAS (Фербенкс, Аляска, США)	2,85 і 4,53	70			1	0,07	Дотепер
SPEAR (Шпіцберген, Норвегія)	4,45					0,03	Дотепер

Досліджується невідоме раніше явище виникнення *великомасштабних* (а можливо, й *глобальних*) *збурень* в іоносфері, що ініціюються потужними радіовипромінюванням. Основний внесок у дослідження внесли фахівці ХНУ імені В. Н. Каразіна (К. П. Гармаш, Л. Ф. Чорногор та ін.) [34].

Питання для самоконтролю

1. Опишіть історію дослідження нелінійних явищ у геокосмосі.
2. Які етапи в дослідженні нелінійних явищ у геокосмосі варто виділити?

5.3. Механізми нелінійних явищ

Для плазми навколоземного середовища, в принципі, можуть мати місце такі механізми (див. підрозділ 4.2) [8, 34, 41]:

– тепловий;
– стрикційний;
– іонізаційний;
– релятивістський.

Як було показано в пункті 4.2.5, характерні поля задовольняють нерівностям

$$E_p \ll E_s \ll E_i \ll E_r .$$

Теплова (або нагрівна) нелінійність проявляється в досить слабких полях. Наприклад, для $\omega \sim 10^6$ с$^{-1}$ (або $f \sim 10^5$ Гц) у нижній іоносфері $E_p \sim 10^{-2}$ – 10^{-1} В/м. Такі поля створюються установкою з $PG \sim 10^5$ Вт.

Зауважимо, що ще в 1960-ті рр. була створена система з $PG \approx 10^9$ Вт на частоті $f \approx 1{,}3$–$1{,}4$ МГц (див. табл. 5.1). При цьому $E_p \sim 10^{-1}$ – 1 В/м, $E \sim$ 1–10 В/м.

Теплова нелінійність істотна в усіх областях іоносфери й у магнітосфері.

При стрикційному механізмі нелінійності $E_s \approx (10-100)E_p$. Ця нелінійність здійснюється при $\omega \gg \nu$, а також $L \ll l_e$ (L – характерний масштаб неоднорідності поля, l_e – довжина вільного пробігу електронів). Вона має практичне значення в F-області іоносфери й магнітосфері.

Іонізаційний механізм нелінійності практично ще не використовувався. Релятивистский механизм для околоземной плазмы малосущественен.

Питання для самоконтролю

1. Опишіть механізми нелінійних явищ у геокосмосі.
2. Порівняйте механізми нелінійних явищ у геокосмосі.

5.4. Крос-модуляція радіохвиль

Потужна модульована по амплітуді радіохвиля E_1, поширюючись в іоносфері, модулює її параметри й, передусім, T_e і ефективну частоту зіткнень електронів ν. Ці збурення позначаються на амплітуді іншої радіохвилі E_2, яка після проходження збуреної області також стає модульованою по амплітуді (й фазі). Цей ефект називається *крос-модуляцією,* або *перехресною модуляцією*. Він належить до класичних нелінійних ефектів в іоносфері [8, 34, 41].

5.4.1. Розрахунок величини збурень

Будемо вважати, що досить слабка ($E_1^2 < E_p^2$) хвиля нормально падає на однорідну ізотропну плазму. Рівняння балансу для T_e приймає вигляд (див. формулу (4.2.2)):

$$\frac{dT_e}{dt} + \delta_0\nu_0(T_e - T_{e0}) = \frac{E_1^2}{E_{p1}^2}\delta_0\nu_0 T_{e0}, \qquad (5.4.1)$$

де індекс «0» відноситься до незбурених умов,

$$E_1^2 = E_{10}^2(1+\mu\cos\Omega t),$$

μ – глибина модуляції, Ω – частота модуляції. Тут і далі індекси 1, 2 відносяться до параметрів хвиль $E_{1,2}$ відповідно.

Для безрозмірних величин рівняння (5.4.1) перепишеться в такий спосіб:

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} + \vartheta = \gamma(1+\cos\Omega_1\tau), \qquad (5.4.2)$$

де $\vartheta = (T_e - T_{e0})/T_{e0}$, $\gamma = E_{10}^2 / E_{p1}^2$, $\tau = \delta_0\nu_0 t$, $\Omega_1 = \Omega/\delta_0\nu_0$. Періодичний розв'язок (5.4.2) має вигляд:

$$\vartheta_\Omega = \frac{\gamma\mu}{1+\Omega_1^2}(\cos\Omega_1\tau + \Omega_1\sin\Omega_1\tau) = \frac{\gamma\mu}{\sqrt{1+\Omega_1^2}}\cos(\Omega_1\tau - \varphi_\Omega),$$

$$\varphi_\Omega = \mathrm{arctg}\Omega_1.$$

5.4.2. Розрахунок величини крос-модуляції

З укороченого рівняння для E_2 при нормальному падінні хвилі маємо:

$$E_2 = E_2(0)\exp\left\{-\frac{\omega_2}{c}\int\limits_0^z \kappa_2(E_1)dz\right\}, \qquad (5.4.3)$$

де ω_2 – частота хвилі E_2, κ_2 – її показник поглинання, причому

$$\kappa_2 = \kappa_{20} + \left(\frac{\partial\kappa_2}{\partial\nu}\frac{d\nu}{dT_e}\right)_0 \Delta T_e = \kappa_{20} + \left(\frac{\partial\kappa_2}{\partial\nu}\frac{d\nu}{dT_e}\right)_0 T_{e0}\vartheta_\Omega. \qquad (5.4.4)$$

З урахуванням (5.4.4) вираз (5.4.3) приймає вигляд:

$$E_2 = E_{20}\exp\left\{-\frac{\omega_2}{c}\int\limits_0^z \left(\frac{\partial\kappa_2}{\partial\nu}\frac{d\nu}{dT_e}\right)_0 T_{e0}\vartheta_\Omega dz\right\},$$

де E_{20} – поле в лінійній теорії, тобто при $\vartheta_\Omega = 0$. У нижній іоносфері

$$\nu = \nu_0\frac{T_e}{T_{e0}}, \qquad \left(\frac{d\nu}{dT_e}\right)_0 = \frac{\nu_0}{T_{e0}}.$$

Тоді

$$E_2 = E_{20}\exp\left\{-\frac{\omega_2}{c}\int\limits_0^z \left(\frac{\partial\kappa_2}{\partial\nu}\right)_0 \nu_0\vartheta_\Omega dz\right\} \approx E_{20}\big(1 - \mu_\Omega\cos(\Omega_1\tau - \varphi_\Omega)\big),$$

де

$$\mu_\Omega = \frac{\omega_2}{c}\left(\frac{\partial\kappa_2}{\partial\nu}\right)_0 \nu_0\frac{\mu}{\sqrt{1+\Omega_1^2}}\int\limits_0^z \gamma(z)dz$$

Є глибина крос-модуляції, φ_Ω – фаза крос-модуляції. Тут вважалося, що $|\mu_\Omega| \ll 1$.

Оскільки

$$\gamma(z) = \gamma(0)e^{-2K_{10}}, \qquad K_{10} = \frac{\omega_1}{c}\int\limits_0^z \kappa_{10}dz,$$

то

$$\int\limits_0^z \gamma(z)dz = \frac{\gamma(0)}{2\frac{\omega_1}{c}\kappa_{10}}\big(1 - e^{-2K_{10}}\big), \qquad \kappa_{10} = \frac{\omega_{p0}^2\nu_0}{2\omega_1(\omega_1^2 + \nu_0^2)}.$$

Врахуємо також, що при $n_2 \approx 1$

$$\kappa_2 \approx \frac{\omega_{p0}^2\nu}{2\omega_2(\omega_2^2 + \nu^2)}, \qquad \left(\frac{\partial\kappa_2}{\partial\nu}\right)_0 \nu_0 = \frac{\omega_{p0}^2\nu_0}{2\omega_2}\frac{\omega_2^2 - \nu_0^2}{(\omega_2^2 + \nu_0^2)^2}.$$

Тоді вираз для глибини крос-модуляції прийме вигляд:

$$\mu_\Omega = \frac{1}{2}\frac{\gamma(0)\mu}{\sqrt{1+\Omega_1^2}}\frac{\omega_2^2 - \nu_0^2}{\omega_2^2 + \nu_0^2}\frac{\omega_1^2 + \nu_0^2}{\omega_2^2 + \nu_0^2}\big(1 - e^{-2K_{10}}\big). \qquad (5.4.5)$$

5.4.3. Аналіз величини крос-модуляції

У глибині плазми ($K_{10} \gg 1$) спостерігається максимальна крос-модуляція:

$$\mu_{\Omega\max} = \frac{1}{2}\frac{\gamma(0)\mu}{\sqrt{1+\Omega_1^2}}\frac{\omega_2^2 - \nu_0^2}{\omega_2^2 + \nu_0^2}\frac{\omega_1^2 + \nu_0^2}{\omega_2^2 + \nu_0^2}.$$

Оскільки

$$\gamma(0) = \frac{e^2E_{10}^2(0)}{3kT_{e0}m\delta_0(\omega_1^2 + \nu_2^2)},$$

то $\mu_{\Omega\max}$ не залежить від частоти ω_1. При $\omega_2^2 \gg \nu_0^2$ маємо: $\mu_{\Omega\max} \sim \omega_2^{-2}$, якщо ж $\omega_2^2 \ll \nu_0^2$, то $\mu_{\Omega\max}$ негативна й не залежить від ω_2 (рис. 5.3). При $\omega_2 = \nu_0$ величина $\mu_{\Omega\max} = 0$. При $\omega_2 = \sqrt{3}\nu_0$ глибина крос-модуляції $\mu_{\Omega\max}$ приймає максимальне значення.

Залежність $\mu_{\Omega\max}(\Omega)$ показана на рис. 5.4.

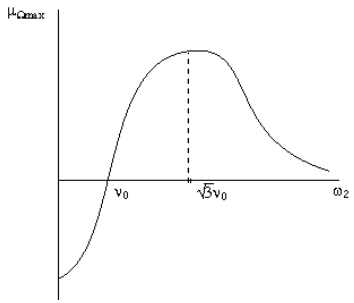


Рис. 5.3. Залежність глибини крос-модуляції від частоти ω_2

У розглянутому наближенні $\mu_\Omega \sim \mu$, P_1G_1. Наприклад, при $\mu \approx 0{,}3$, $\Omega < \delta_0\nu_0$, $\gamma(0) \approx 0{,}3$ маємо: $\left|\mu_{\Omega\max}\right| \le 0{,}05$. Як видно з цієї оцінки, величина ефекту незначна, проте ефект має практичне значення.

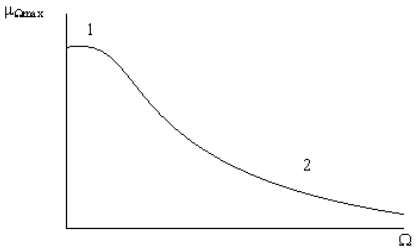


Рис. 5.4. Залежність глибини крос-модуляції від частоти модуляції:
1 – $\Omega \ll \delta_0\nu_0,\ \mu_{\Omega\max} \approx \mathrm{const}$;
2 – $\Omega \gg \delta_0\nu_0,\ \mu_{\Omega\max} \sim \Omega^{-2}$

Питання для самоконтролю

1. Опишіть ефект крос-модуляції радіохвиль в іоносфері.
2. У яких діапазонах радіохвиль крос-модуляція має практичне значення?
3. У яких областях іоносфери виникає ефект крос-модуляції? Чому?

Задачі

1. У 1925 р. Бейлі запропонував здійснити пробій в іоносфері на висоті близько 100 км за допомогою потужної мовної радіостанції, що працює на гірочастоті електронів. Чи міг бути реалізований цей задум, якщо потужність радіостанції не перевищувала 100 кВт? Прийняти, що на висоті в 100 км частота зіткнень дорівнює 10^5 с$^{-1}$, інтегральний коефіцієнт поглинання $K = 0{,}1$ і 1,15 для нічного та денного часу доби відповідно.

2. Оцінивши збурення температури електронів, перевірити, чи може спостерігатися ефект крос-модуляції, якщо потужність радіомовної станції становить 150 кВт, частота радіохвилі – 100 кГц. Впливом магнітного поля знехтувати. Прийняти частоту зіткнень електронів, що дорівнює 10^5 с$^{-1}$, незбурену температуру електронів – 300 К, відносну долю енергії, що втрачається електроном при зіткненні з важкою частинкою – $3{\cdot}10^{-3}$, інтегральний коефіцієнт поглинання хвилі – 0,5 і 2,3 для нічного та денного часу доби відповідно.

3. Виходячи з виразу для глибини крос-модуляції в іоносфері:

а) побудувати залежності глибини крос-модуляції від частот збуреної та слабкої радіохвиль;

б) оцінити глибину крос-модуляції при напруженості поля збуреної радіохвилі, що дорівнює плазмовому полю. Вважати, що глибина модуляції

дорівнює 0,3, частота модуляції $\Omega \ll \delta_0\nu_0$. Розглянути випадки, коли $\omega_2^2 \ll \nu_0^2$ і $\omega_2^2 \gg \nu_0^2$.

5.5. Самомодуляція радіохвиль

Збурення впливають на хвилю E_1. При цьому вона здобуває *додаткову модуляцію:*

$$E_1^2 = E_{10}^2(1+\mu\cos\Omega t)(1-\mu_\Omega\cos(\Omega t-\varphi_\Omega)),$$

де μ_Ω наближено дається виразом (5.4.5), в якому необхідно покласти $\omega_1 = \omega_2$:

$$\mu_\Omega = \frac{1}{2}\frac{\gamma(0)\mu}{\sqrt{1+\Omega_1^2}}\frac{\omega_1^2-\nu_0^2}{\omega_1^2+\nu_0^2}\left(1-e^{-2K_{10}}\right).$$

Важливо, що $|\mu_\Omega| \le \mu$. При цьому в спектрі модуляції хвилі E_1 з'являються гармоніки з частотою 2Ω.

Процес спотворення форми модуляції сильної радіохвилі ілюструється на рис. 5.5.

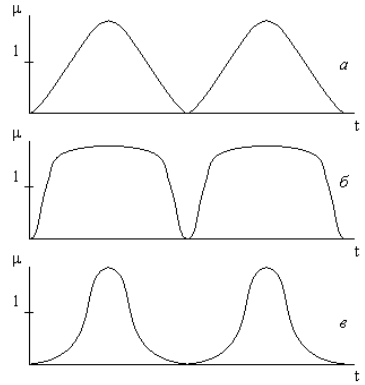


Рис. 5.5. Залежність форми модуляції [8, 41]:
а – у лінійній теорії;
б – у випадку ефекту помутніння плазми;
в – у випадку ефекту просвітління плазми

Самомодуляція радіохвилі також є класичним ефектом, який, як і крос-модуляція, *небажаний* при іоносферному радіозв'язку й радіомовленні. Ці нелінійні ефекти обмежують потужність радіостанцій кілометрового й гектометрового діапазонів величиною $PG_{\max} \sim 100 - 500$ кВт [8, 34, 41].

Питання для самоконтролю

1. Опишіть ефект самомодуляції радіохвиль в іоносфері.
2. У яких діапазонах радіохвиль самомодуляція має практичне значення?
3. У яких областях іоносфери виникає ефект самомодуляції? Чому?

Задачі

1. Оцінити роль ефекту самомодуляції для мовної радіостанції потужністю 1,5 МВт. Частота випромінювання 500 кГц. Прийняти частоту зіткнень, що дорівнює 10^5 с$^{-1}$.

2. Потужність мовного радіоцентру складає 0,5 МВт, частота радіопередавального пристрою – 1 МГц. Оцінити можливість прояви теплового механізму нелінійності й ефектів крос-модуляції і самомудуляції. Параметри іоносферного шару на висоті 80 км такі: температура електронів – 250 К, частота зіткнень електронів з нейтралами – 10^6 с$^{-1}$.

5.6. Нестійкості в іоносфері

Головна властивість плазми, як уже зазначалося, полягає в тому, що в ній легко збуджуються численні нестійкості.

Нелінійні ефекти в навколоземній плазмі в основному ті ж, що обговорювалися в розділах 2 і 4. Особливе місце займають плазмові нестійкості. У нижній іоносфері їх генерація утруднена через високу частоту зіткнень частинок. Зате в F-області іоносфери ($z \sim$ 200–400 км) нестійкості легко збуджуються. Тут мають місце *самофокусувальна*, *резонансна*, *параметрична* та інші типи нестійкостей (див. підрозділ 4.5).

5.6.1. Самофокусувальна нестійкість

В іоносфері звичайно реалізується *теплова* самофокусувальна нестійкість. Вона збуджується, якщо ефективна потужність установки $PG \geq 100$ МВт при $f \sim$ 3–10 МГц. Нестійкість призводить до розшарування плазми. Уздовж ліній геомагнітного поля утворюються «нитки» зі зниженою

концентрацією електронів. Їх масштаби: $l_\perp \sim$ 50–1000 м, $l_\parallel \sim$ 10–100 км. Важливо, що $l_\parallel \gg l_\perp$, $|\Delta N / N_0| \approx$ 1–5 %.

В околі області, де $\omega \approx \omega_p$ або $\varepsilon \approx 0$, ефективність генерації нестійкостей збільшується; вона може спостерігатися вже при $PG \sim 10$ МВт.

5.6.2. Резонансні нестійкості

В іоносферній F-області резонансна *ленгмюрівська нестійкість* розвивається в полі *звичайної* хвилі в околі точки її *відбиття*, де $\omega \approx \omega_p$. Для виникнення нестійкості потрібне досягнення порогового значення $\left(\Delta N / N_0\right) \sim 10^{-3}$, а також потужності установки $PG \geq 1 - 10$ МВт при $f \sim 3 - 10$ МГц. В цьому разі $l_\perp \geq 1$ м, $l_\parallel \sim 1$ км, тобто як і у випадку самофокусувальної нестійкості, $l_\parallel \gg l_\perp$.

Більш важливою, як виявилось, є резонансна нестійкість на частоті *верхнього гібридного резонансу*. Розрізняють теплову й стрикційну нестійкості.

Теплова нестійкість розвивається в гіротропній іоносфері поблизу рівня верхнього гібридного резонансу (ВГР), де

$$f^2 = f_h^{\,2} = f_p^2 + f_B^2, \qquad f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}.$$

ВГР має місце на 3–5 км нижче області відбиття хвилі накачки звичайної поляризації. Порогове значення $PG \sim 1 - 5$ МВт, необхідна тривалість імпульса $\tau \sim 1 - 10$ с. Величина $l_\perp \sim 0{,}1 - 20$ м, $l_\parallel \sim 1 - 10$ км, тобто $l_\parallel \gg l_\perp$.

Додамо, що останнім часом значна увага приділяється пошуку ефектів на *гармоніках гірочастоти* електронів $f_B \approx 1{,}5$ МГц. Особливе місце в таких дослідженнях займає вивчення *подвійного резонансу*. В цьому випадку частота верхнього гібридного резонансу дорівнює цілому числу n значень f_B. У залежності від умов в іоносфері $n =$ 2–6.

Стрикційна нестійкість вимагає $PG \geq 100$ МВт, $\tau \geq 1 - 10$ мс при $f \sim 5 - 6$ МГц. При цьому також генеруються неоднорідності N різних масштабів.

5.6.3. Розпадні нестійкості

Причиною розпаду є *нагрів* електронів, *електрострикція* або *комбінаційне розсіяння* на власних частотах плазми (ω_p, ω_B й т. п.). Їм відповідають ленгмюрівська нестійкість, вимушене розсіяння Мандельштама – Бриллюена (ВРМБ) і вимушене комбінаційне розсіяння Рамана (ВКР).

Для ленгмюрівської нестійкості має місце розпад хвилі накачки на плазмову хвилю та іонний звук:

$$\omega = \omega_p + \omega_s .$$

Важливо, що $\omega_s \ll \omega_p$, тому $\omega \approx \omega_p$.

ВРМБ відбувається за схемою:

$$\omega = \omega_1 + \omega_s ,$$

де частотам ω і ω_1 відповідають хвиля накачки і поперечна електромагнітна хвиля, що генерується.

У випадку ВКР розпад відбувається за схемою:

$$\omega = \omega_1 + \omega_p .$$

Щодо ВРМБ і ВКР, то вони спостерігалися експериментально в F-області іоносфери при $\tau \sim 1$ мс, $f \sim 50$–500 МГц, $P \sim 2$–4 МВт і $G \sim 10^4 - 10^5$.

Зауважимо, що неоднорідність плазми по висоті утруднює розвиток нестійкостей через *виніс коливань* із області синхронізму (див. пункт 4.5.3).

Питання для самоконтролю

1. Перелічіть основні нестійкості іоносферної плазми.
2. Опишіть самофокусувальну нестійкість.
3. Опишіть резонансну нестійкість.
4. Опишіть розпадну нестійкість.

5.7. Штучні іоносферні неоднорідності. Ракурсне розсіяння радіохвиль

Як уже відзначалося у підрозділі 5.6, розвиток нестійкостей призводить до генерації або підсилення *неоднорідностей* N з різними масштабами [18, 34]. Важливо, що при цьому неоднорідності сильно витягнуті вздовж

геомагнітного поля, тобто $l_\parallel \gg l_\perp$. Величина $\Delta N / N_0 \sim 10^{-3} - 10^{-1}$. Така система неоднорідностей здатна ефективно розсіювати радіохвилі в широкому діапазоні частот. Залежність *ефективної площі розсіяння* σ, від частоти радіохвилі, що розсіюється, f_2, показана на рис. 5.6.

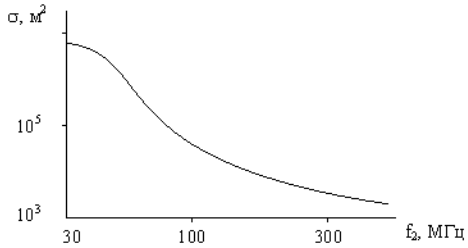


Рис. 5.6. Експериментальна залежність σ від f_2

При $f_2 \le 10 - 30$ МГц радіохвиля відбивається від іоносфери в нічних і денних умовах відповідно. При більших f_2 у звичайних умовах радіохвиля вільно проникає через іоносферу, при наявності неоднорідностей частина її енергії розсіюється і повертається у напрямку до Землі. Цю властивість штучних неоднорідностей N доцільно використовувати для створення нових *каналів зв'язку*. Схема зв'язку показана на рис. 5.7.

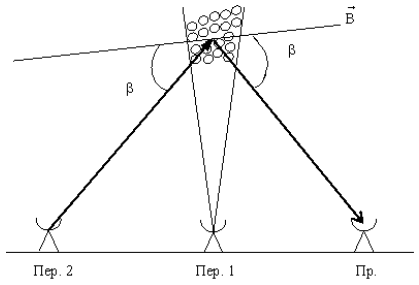


Рис. 5.7. Схема каналу зв'язку, заснованого на ракурсному розсіянні:
Пер. 1 – потужна радіосистема, що створює розсіюючі неоднорідності;
Пер. 2 – зв'язковий передавач;
Пр. – зв'язковий приймач

Вадливо, що умова $l_\parallel \gg l_\perp$ призводить до *ракурсного*, тобто спрямованого, розсіяння радіохвиль. Величину σ грубо можна оцінити за формулою:

$$\sigma = 4\pi R^2 \rho^2 ,$$

$$\rho^2 = \overline{\frac{\Delta\varepsilon^2}{16}} = \overline{\frac{\Delta n^2}{4}} = \frac{1}{16}\left(\frac{f_p}{f_2}\right)^4 \overline{\left(\frac{\Delta N}{N_0}\right)^2} n_i ,$$

де R – відстань від точки спостереження до цієї області, $n_i = L / \lambda$ – число неоднорідностей, L – розмір області, що розсіює. Наприклад, при $f_2 = 300$ МГц, $f_p = 10$ МГц, $\Delta N / N_0 \approx 3 \cdot 10^{-2}$ маємо: $\sigma \sim 10^3$ м^2 для $R = 3\,000$ км, $L = 100$ км, $\lambda = 1$ м.

Дальність поширення розсіяних сигналів може досягати ~ 4000 км. Полоса пропускання каналу зв'язку визначається часом життя неоднорідностей і становить величину ~ 1 кГц, що істотно обмежує пропускну здатність каналу зв'язку. Проте в США у 1970-х рр. були спроби використання такого каналу зв'язку. Потужна установка працювала в безперервному режимі з $PG \approx 100$ МВт і $f \sim 5 - 10$ МГц.

Питання для самоконтролю

1. Що таке структуризація іоносферної плазми? До чого вона призводить?
2. Що являє собою ракурсне розсіяння радіохвиль?
3. Опишіть можливі застосування ракурсного розсіяння радіохвиль штучними іоносферними неоднорідностями.

Задачі

1. При ракурсному розсіянні радіохвиль висота розсіювальної області дорівнює 300 км. Обчислити максимальну дальність радіозв'язку.

2. Оцінити ефективну площу розсіяння при ракурсному розсіянні радіохвиль частотою 30–300 МГц.

5.8. Штучне плазмове дзеркало в атмосфері

Як уже зазначалося, у природних умовах від іоносфери відбиваються радіохвилі з $f \leq 10 - 30$ МГц. Для збільшення f до ~ 1 ГГц потрібно збільшити $f_p \sim \sqrt{N}$, тобто N до 10^{16} м$^{-3}$. Такі N можна створити за рахунок *ударної іонізації* газу, або *пробою* атмосфери [5, 34, 41].

У 1970-ті рр. О. В. Гуревич запропонував здійснювати пробій на висотах $z \sim 30$–60 км в полі двох перехресних пучків радіохвиль частотою $f_1 \sim 1$–6 ГГц [5]. Пробій виникає в області їхнього перетинання при тривалості імпульса $\tau_1 \sim 10$–500 нс, для підтримання іонізації достатньо більш коротких импульсів тривалістю $\tau_2 \sim 0{,}5$–10 нс з частотою повторення

$\sim 10^2$–10^4 Гц. Потужність імпульсів пробою і підтримки $\sim 10^3$–10^4 МВт і $\sim 10^{-2}$–1 МВт відповідно. Діаметр дзеркала антени повинен бути $d \sim 50$–100 м, при цьому $G \sim 10^7$. Іонізована область (*плазмове дзеркало*) має розмір $\sim z\lambda / d \sim 10$–$10^2$ м. Схема зв'язку показана на рис. 5.8.

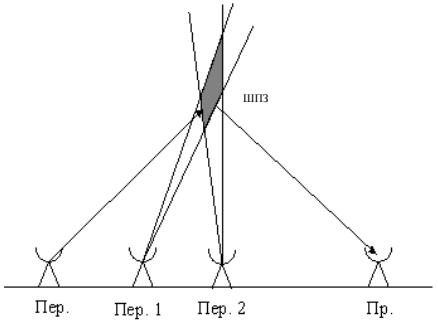


Рис. 5.8. Схема зв'язку через штучне плазмове дзеркало (ШПЗ): Пер.1, Пер.2 – потужні передавальні системи для пробою атмосфери; Пер. – зв'язковий передавач; Пр. – зв'язковий приймач

Плазмове дзеркало може використовуватися для *ретрансляції* телебачення, радіотелефонного зв'язку й радіомовлення. Дальність зв'язку не менше 1000 км. Створення й експлуатація таких ретрансляторів вимагає менших енергетичних і економічних витрат, ніж діючі. До достоїнств каналу зв'язку варто віднести можливість *керування* розмірами зон зв'язку шляхом зміни форми й висоти дзеркала, можливість здійснювати *спрямований зв'язок* за допомогою малопотужних засобів, можливість організації зв'язку з *важкодоступними регіонами*. Недоліки такого каналу зв'язку ще треба вивчати.

Додамо, що для забезпечення України таким каналом зв'язку достатньо створити один комплекс для пробою атмосфери.

Питання для самоконтролю

1. Що являє собою штучне плазмове дзеркало в атмосфері? Як його можна використовувати?
2. Опишіть переваги й недоліки використання штучного плазмового дзеркала.

Задачі

1. Оцінити частотну ємність радіодіапазонів від ДНЧ (3–30 кГц) до ГВЧ (300–3000 ГГц), кількість каналів зв'язку (радіотелеграф, радіомовлення з АМ і FM, телебачення, Internet) і максимальну дальність поширення радіосигналів.

2. При пробої атмосфери на висоте 30 км утворилася концентрація електронів 10^{22} м$^{-3}$. Оцінити частоту радіохвилі, яка ще може відбиватися від штучної іонізованої області.

3. Для створення штучного плазмового дзеркала необхідно два радіопередавальних пристрої з імпульсною потужністю 1 ГВт, тривалістю імпульса 10 нс, частотою повторення імпульсів 1 кГц. Оцінити середню і споживану потужності, якщо ККД системи становить 20 %. Чи може бути реалізована така система у цей час?

5.9. Ефект Г. Г. Гетманцева

Цей ефект полягає в генерації різницевої частоти Ω при впливі на іоносферу потужної радіохвилі, модульованої по амплітуді коливанням з частотою Ω [18, 34]. Іоносфера при цьому виконує детектувальну дію. Ефект був передбачений теоретично ще в 1950-ті рр. В. Л. Гінзбургом і О. В. Гуревичем.

Перші експерименти були поставлені в 1973 р. в Н. Новгороді під керівництвом Г. Г. Гетманцева. Величина ефекту виявилась несподівано великою.

В. Ю. Трахтенгерц зі співавторами показали, що ефект зумовлений не генерацією досить слабкого нелінійного струму, а *модуляцією природних іоносферних струмів*, густина яких значно більша ($j_0 \approx 10^{-7}$–10^{-5} А/м^2). Промодульований струм густиною

$$j_\Omega = \frac{\Delta\sigma_\Omega}{\sigma_0} j_0,$$

де $\Delta\sigma_\Omega$ і σ_0 – відповідно збурення провідності й провідність іоносфери на висотах ~ 100 км у незбурених умовах, еквівалентний *штучній антені* в іоносфері з горизонтальним розміром $z\lambda / d \sim 10$ км. Ефект Гетманцева впевнено спостерігається в діапазонах частот від $\sim 10^{-3}$ Гц і до ~ 10 кГц. При цьому відповідно амплітуди $\beta_\Omega \sim 10$ нТл – 1 пТл, $E_\Omega \sim 10$ В/м – 1 мВ/м на рівні поверхні Землі. В іоносфері ці амплітуди на порядок більші.

Цей ефект може використовуватися для генерації електромагнітного випромінювання в зазначених вище діапазонах, для діагностики параметрів іоносфери й магнітосфери, іоносферних струмів, для електромагнітного зондування земної кори, пошуку корисних копалин та інших застосувань.

Питання для самоконтролю

1. У чому суть ефекту Гетманцева?
2. Опишіть можливі застосування ефекту Гетманцева.

5.10. Сонячні енергетичні станції

З 1970-х рр. і дотепер обговорюються проекти створення на геостаціонарній орбіті ($z \approx 36\,000$ км) сонячних енергетичних станцій (СЕС). Передбачається перетворену за допомогою фотоелементів сонячну енергію передавати на Землю у вигляді НВЧ пучків з $\lambda \sim 1$ – 10 см.

Потужність СЕС може складати $P \sim 10$ ГВт, коефіцієнт підсилення передавальної антени $G \sim 10^8$–10^9. Товщина пучка радіохвиль $\Delta\alpha \approx \lambda / d_1 \sim 10^{-4}$–$10^{-3}$. Тоді розмір приймальної антени $d_2 \approx z\Delta\alpha \approx 4$–40 км. ККД системи $\eta = \eta_1\eta_2 = 5$–20 % ($\eta_1 \approx 10$–30% – ККД вироблення енергії, $\eta_2 \approx 50$–70 % – ККД її передачі).

Величина $PG \sim 10^{18}$–10^{19} Вт забезпечить збільшення T_e в F-області на 10–100 % і таке ж зменшення N.

Однією з перешкод на шляху створення СЕС є розпад НВЧ пучка на окремі нитки у результаті *самофокусувальної нестійкості* (див. пункти 4.5.1 і 5.6.1). У результаті цього фронт хвилі перестає бути плоским, піддається випадковим флуктуаціям, а середня потужність пучка на вході приймальної антени починає *падати* зі збільшенням фазових флуктуацій у фронті хвилі:

$$\overline{P} = P e^{-\sigma_\varphi^2},$$

де P – потужність при відсутності флуктуацій, σ_φ^2 – дисперсія фазових флуктуацій.

Є проекти, які передбачають передачу енергії з орбіти на Землю у вигляді потужного *лазерного променя*. При цьому варто очікувати аналогічних ефектів, але вже в *нейтральній* атмосфері.

Механізм нелінійної взаємодії може бути таким. Якщо в якійсь точці вологість повітря трохи менша, ніж в околі, то тут зменшується згасання лазерного пучка й амплітуда випромінювання трохи зростає. Це призводить до подальшого випаровування води, збільшенню амплітуди хвилі й розвитку самофокусувальної нестійкості в атмосфері. У результаті виникають фазові флуктуації у фронті хвилі й «розвал» лазерного пучка.

Питання для самоконтролю

1. Опишіть проект сонячної енергетичної станції.

2. Чи проявляться нелінійні ефекти в іонізованій плазмі при функціонуванні сонячної енергетичної станції?

Задачі

1. Параметри сонячної енергетичної станції такі: $P = 10$ ГВт, коефіцієнт підсилення антени – 10^9, частота радіохвилі – 3 ГГц. Чи може НВЧ пучок викликати помітні збурення в максимумі іонізації (F-області іоносфери)? До чого це призведе?

2. Для умови попередньої задачі розрахуйте основні параметри передавальної і приймальної антен.

5.11. Великомасштабні та глобальні збурення в іоносфері. Вплив на магнітосферу

Дотепер розглядалися процеси в іоносфері, що виникають *безпосередньо* в опромінюваній області. Такі збурення мають характерний горизонтальний масштаб $L \sim$ 10–100 км, тобто є *локалізованими* [8, 18, 41].

Чи можуть поширюватися збурення далеко за межі діаграми спрямованості антени? Відповідь на це питання далеко не очевидна.

На початку 1990-х рр. В. В. Васьков та ін. за допомогою числового моделювання показали, що значні збурення T_e і N можуть переноситися вздовж магнітної силової трубки аж до магнітоспряженої області (відстані 5–10 тыс. км). При цьому хвиля з частотою $f \sim$ 3–5 МГц і $PG \approx$ 30–100 МВт відбивається на висоті 250–300 км. Значні варіації T_e і N, що досягають $\sim$ 10–100 %, мають місце лише в нічний час. Результати розрахунків пояснили спостережуваний раніше в США ефект виникнення сильних збурень в низькоширотній F-області, де довжина магнітної силової трубки відносно невелика [18].

За допомогою ШСЗ експериментально вивчені збурення в зовнішній і магнітоспряженій іоносферах.

Показано, що в зовнішній іоносфері збільшення температури електронів T_e досягало 500 К (20 %), а зменшення їх концентрації N

дорівнювала 5–10 %. Горизонтальный розмір виникаючої області складав близько 200 км уздовж паралелі й близько 1–2 тис. км уздовж меридіана.

У магнітоспряженій області T_e збільшувалася на 200 К (5 %), а N – зменшувалась на одиниці відсотків.

Важливо, що в зовнішній іоносфері виникали також неоднорідності концентрації електронів ($l \approx$ 1–100 км, $\Delta N / N = 1 - 2\%$) і двополярні варіації іоносферного електричного поля (характерний розмір $L_e \approx 200 - 1000$ км, $\Delta E_0 \approx 20 - 30$ мВ/м), а також збільшувалася інтенсивність електромагнітного випромінювання в діапазонах 20 Гц – 20 кГц.

Існує, однак, інший клас збурень, здатних поширюватися в горизонтальному напрямку, причому для них $L \sim$ 100–1000 км [34].

На початку 1970-х рр. Л. Ф. Чорногором виявлено, а потім і теоретично пояснено (разом з К. П. Гармашом) *невідоме раніше явище генерації великомасштабних* (100–1000 км) *збурень (неоднорідностей)* в D-, E- і F- областях іоносфери, що ініціюються потужним нестаціонарним радіовипромінюванням[1]. Поява збурень підтверджена в 1990-х рр. У вимірюваннях на російському супутнику (його висота $z \sim$ 1000 км), а також у низці дослідів, проведених з ініціативи Л. Ф. Чорногора у 1990–2014 рр.

Виникають дві групи збурень: перші – *аперіодичні* – мають час запізнення $\Delta t_1 \sim$ 5–10 хв, тривалість $\Delta T_1 \sim$ 1–10 хв і чіткіше проявляються в нижній іоносфері; другі – *квазіперіодичні* – мають час запізнення $\Delta t_2 \approx$ 20–40 хв, причому $\Delta t_2 \approx R / v$, де R – відстань між пунктами впливу потужного радіовипромінювання й спостереження, $v \approx$ 0,3–0,6 км/с, $\Delta T_2 \approx$ 60–150 хв, період $T \approx$ 5–60 хв. Діагностика збурень зазвичай здійснювалася на вертикальних радіотрасах над м. Харків, а збурення – над м. Н. Новгородом ($R \approx$ 1000 км) (рис. 5.9). Величина $PG \approx$ 100–300 МВт, $f \approx$ 4–7 МГц.

Теоретичні дослідження Л. Ф. Чорногора показали, що другий тип збурень пов'язаний з генерацією і поширенням так званих рухомих іоносферних збурень, викликаних дією акустично-гравітаційних хвиль (АГХ),

[1] Див. про це, наприклад, работу: Гармаш К. П. Эффекты в околоземной космической плазме, стимулированные воздействием мощного радиоизлучения / К. П. Гармаш, Л. Ф. Черногор // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. – 1998. – № 6. – С.17–40.

в D-, E- і F-областях іоносфери (рис. 5.9). АГХ є низькочастотним аналогом звукових хвиль. У цьому випадку повертальною силою слугує сила тяжіння.

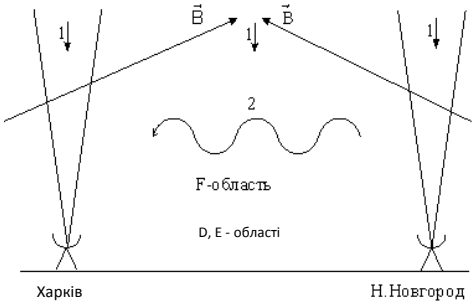


Рис. 5.9. Схема експерименту по виявленню великомасштабних збурень: 1 – збурення першого типу, пов'язані з висипанням енергічних електронів; 2 – поширення хвиль густини (збурення другого типу)

Щодо збурень першого типу, то тут справа складніша. Величина енергії збурень може бути більше енергії хвилі, що збурює. При однакових впливах реакція середовища може розрізнятися. Все це говорить на користь того, що досліджувана система є *відкритою* й у неї надходить енергія ззовні (про відкриті системи див. розділ 7). Для іоносфери така енергія може переноситися з магнітосфери, а точніше, з *радіаційного пояса* у вигляді *електронів і протонів, що висипаються.* Наслідки висипання частинок краще за все проявляються в D-області іоносфери. Саме це і спостерігалося в експериментах.

Таким чином, встановлено, що потужне радіовипромінювання з $PG \sim 100$ МВт, енергією $W = P\Delta t \sim 10^8$ Дж і $f \sim 4$–7 МГц, справляючи вплив на іоносферу, викликає великомасштабні зміни в магнітосфері, а також в іоносфері.

Збурення, очевидно, можуть мати навіть *глобальний* характер, причому вони можуть створюватися *ненавмисно*. Так, на ШСЗ систематично спостерігалось посилення радіовипромінювання плазми над промислово розвиненими регіонами Земної кулі (над Європою і Північною Америкою). Саме тут розташована більшість радіостанцій мовлення, телецентрів, радарів і т. д.

Крім того, глобальні збурення в навколоземному космосі можуть бути пов'язані з *ненавмисним випромінюванням ліній електропередач*. Так, у 1970-х рр. у США вдалося виявити зменшення рівня *природного радіовипромінювання* в діапазоні частот $f \sim 1$–10 кГц і зростання *геомагнітної активності* у вихідні дні (так званий *вікенд-ефект*). Цей ефект обумовлений зменшенням енергоспоживання у вихідні дні.

Питання для самоконтролю

1. Чи можливі великомасштабні й глобальні збурення в іоносферній плазмі, що викликаються потужним радіовипромінюванням?

2. Чи можливо вплинути потужним радіовипромінюванням наземних радіостанцій на магнітосферу?

3. Чим загрожує геоекології та людству американська програма HAARP?

5.12. Солітони в навколоземному просторі

Солітони, як нелінійні структури незмінного профілю, в умовах навколоземного середовища зобов'язані своїм існуванням *підживленню* енергією ззовні. Справа в тому, що навколоземний простір – *відкрита система*. У неї надходить енергія від Сонця у вигляді потоку електромагнітного й корпускулярного випромінювань, від Землі у вигляді тепла, акустичних і електромагнітних хвиль і т. д. Існує взаємодія на рівні підсистем: тектоносфера (океан) – атмосфера – іоносфера – магнітосфера [31, 33].

Механізми підживлення можуть бути пов'язані з вітрами, конденсацією водяної пари над океанами, виділенням тепла, хімічними реакціями й т. д. Підживлення енергією може виникати під час землетрусів, вивержень вулканів, стартів і польотів великих космічних апаратів, при впливі на іоносферу потужних пучків радіохвиль і т. д. [31–34, 40].

Солітони можуть генеруватися й поширюватися в атмосфері (іоносфері) у вигляді хвиль густини, акустичних і електромагнітних хвиль, а також варіацій геомагнітного й, можливо, геоелектричного полів (див. пункт 2.6.7).

Теоретичні дослідження солітонів у навколоземному середовищі значно випереджають експериментальні.

Питання для самоконтролю

1. Чи виникають солітони в геокосмосі?

2. Чи можуть поширюватися одномірні солітони в геокосмосі? А двомірні?

5.13. Основні результати

1. Основними механізмами нелінійності в навколоземній плазмі є нагрів електронів і електрострикція. Іонізаційний механізм поки що представляє

лише теоретичний інтерес. Важливо, що в навколоземній плазмі $E_p : E_s : E_i : E_r = 4 \cdot 10^{-6} : 4 \cdot 10^{-4} : 10^{-2} : 1$.

2. Крос-модуляція і самомодуляція радіохвиль – класичні нелінійні ефекти в іоносфері. Ці ефекти найбільш яскраво проявляються в діапазоні частот $f \sim$ 10–1000 кГц при потужностях $P \geq$ 100 кВт.

3. В іоносфері в досить слабких полях $E_0 \sim$ 0,1–10 В/м (тобто $PG \sim$ 10–100 МВт при $f \sim$ 3–10 МГц) ефективно збуджуються нестійкості різних типів. Найбільше значення мають резонансні нестійкості для хвилі накачки звичайної поляризації, а також параметричні нестійкості. На частотах $f \sim$ 100–1000 МГц варто очікувати ВМРБ і ВКР Рамана.

Розвиток нестійкостей і пов'язаних з ними процесів – основний напрямок у дослідженнях взаємодії потужного радіовипромінювання з іоносферною плазмою.

4. Збудження нестійкостей супроводжується розшаруванням плазми й генерацією сильно анізотропних неоднорідностей електронної концентрації. Останні ракурсно розсіюють падаючі на них радіохвилі, що може використовуватися при створенні нових каналів зв'язку.

5. Практична реалізація штучного плазмового дзеркала дозволить організувати нові канали зв'язку в діапазоні $f \sim$ 30–1000 МГц. Довжина ліній зв'язку – до 2 тис. км.

6. Ефект Гетманцева доцільно використовувати для підвищення ефективності випромінювання досить довгих радіохвиль, для діагностики середовища, розвідки корисних копалин і т. д.

7. Розвиток самофокусувальної нестійкості – одна із серйозних перешкод для створення сонячних енергетичних станцій на геостаціонарній орбіті.

8. Можливості впливу на магнітосферу достатньо короткохвильовим випромінюванням ($\lambda \leq$ 100 м), виникнення великомасштабних ($\sim$ 1000 км) і глобальних збурень у навколоземному середовищі, питання *екології геокосмосу* – основні проблеми при поширенні потужних радіохвиль у навколоземній плазмі (геокосмосі).

РОЗДІЛ 6. НЕЛІНІЙНІ ЯВИЩА В СТАТИСТИЧНІЙ РАДІОФІЗИЦІ

Характер поширення та взаємодії хвиль скінченої амплітуди залежить від властивостей середовища – ступеня його нелінійності, дисперсії швидкості звука, дисипативних процесів[1].

За своєю фізичною суттю нелінійні явища в статистичній радіофізиці нічим не відрізняються від явищ, розглянутих у нелінійній електродинаміці. Відмінність складається лише в появі або відсутності *стохастичності*. Тому в цьому розділі розглянемо лише математичні методи розв'язання нелінійних стохастичних задач.

6.1. Постановка задачі

Необхідність застосування статистики для розв'язання задач нелінійної радіофізики виникає в таких випадках:

– сильна електромагнітна хвиля модульована за випадковим законом;
– нелінійне середовище статистично неоднорідне;
– нелінійне середовище містить розподілені джерела шуму.

У багатьох радіофізичних задачах зазначені ефекти проявляються одночасно.

Статистичні задачі теорії нелінійних хвиль і коливань у математичному плані є найбільш складними задачами радіофізики.

При цьому присутні *дві «неприємності»* – нелінійність і стохастичність процесів. Для розв'язання таких задач була потрібна розробка методів розв'язання *нелінійних стохастичних рівнянь*.

---

[1] Див. : *Наугольных К. А.* Нелинейные волновые процессы в акустике / К. А. Наугольных, Л. А. Островский. – М. : Наука, 1990. – 237 с.

6.2. Методи розв'язання нелінійних стохастичних задач

Аналіз задач стохастичної радіофізики зводиться до розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь із випадковими початковими (крайовими) умовами, випадковими коефіцієнтами й зовнішніми силами. Такі рівняння називають *стохастичними диференціальними рівняннями* (СДР).

Методи розв'язання СДР можна умовно розбити на дві групи. У першому випадку спочатку знаходиться *точний розв'язок* рівняння, а потім обчислюються необхідні статистичні характеристики.

Досить простою є справа розв'язання *лінійних* СДР. Нехай дане рівняння

$$\hat{L}x(t) = \xi(t), \tag{6.2.1}$$

де $\hat{L}$ – лінійний оператор, $\xi(t)$ – випадкова функція. Розв'язок (6.2.1) має вигляд:

$$x(t) = \hat{L}^{-1}\xi(t) \equiv \hat{L}_1\xi(t), \tag{6.2.2}$$

де $\hat{L}_1$ – також лінійний оператор, обернений оператору $\hat{L}$. Тоді, використовуючи (6.2.2) і виконуючи статистичне усереднення (тут і далі позначуване рискою над функцією), для перших двох моментів (середнього та кореляційної функції) одержимо:

$$\overline{x}(t) = \overline{\hat{L}_1\xi(t)} = \hat{L}_1\overline{\xi}(t), \tag{6.2.3}$$

$$R_x(t_1,t_2) = \overline{x(t_1)x(t_2)} = \overline{\hat{L}_1(t_1)\xi(t_1)\hat{L}_1(t_1)\xi(t_2)} = \overline{\hat{L}_1(t_1)\hat{L}_1(t_2)\xi(t_2)\xi(t_2)} =$$
$$= \hat{L}_1(t_1)\hat{L}_1(t_2)\overline{\xi(t_1)\xi(t_2)} = \hat{L}_1(t_1)\hat{L}_1(t_2)R_\xi(t_1,t_2). \tag{6.2.4}$$

Аналогічно можна обчислити й інші моменти випадкового процесу $x(t)$.

У другому випадку точний розв'язок аналітично знайти не вдається. Розроблено низку *спеціальних методів*, які дозволяють обчислити статистичні характеристики за відсутності точного розв'язку. У цьому складається *перевага* стохастичних методів розв'язання СДР. Розглянемо ці методи докладніше.

6.2.1. Усереднення точного розв'язку

Розглянемо, як приклад, генерацію нестійкості при випадковій зміні її інкремента. Нехай розв'язок диференціального рівняння (див. 2.8.16) має вигляд:

$$A(t) = C_1 e^{\gamma A_0 t}, \tag{6.2.5}$$

де $\gamma = \sqrt{\gamma_1\gamma_2}$ – випадковий параметр, розподілений за нормальним законом

$$w(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\gamma} e^{-\frac{(\gamma-\overline{\gamma})^2}{2\sigma_\gamma^2}}.$$

Тоді

$$\overline{A} = \int_{-\infty}^{\infty} A(\gamma)w(\gamma)d\gamma = \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\gamma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma A_0 t} e^{-\frac{(\gamma-\overline{\gamma})^2}{2\sigma_\gamma^2}} d\gamma = C_1 e^{\overline{\gamma} A_0 t} e^{\frac{(\sigma_\gamma A_0 t)^2}{2}}.$$

Якщо $\sigma_\gamma \to 0$, то одержуємо відомий детермінований розв'язок (6.2.5).

6.2.2. Методи лінеаризації

Використовуючи методи лінеаризації, вдається одержати наближені розв'язки випадкових СДР.

Нехай СДР має вигляд:

$$\hat{L}x(t) = f(x) + \xi(t), \tag{6.2.6}$$

де $f(x)$ – нелінійна функція. Якщо попередній аналіз розв'язку показує, що x зосереджено в околиці x_0, то $f(x)$ доцільно представити в такий спосіб:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \equiv \alpha + \beta x, \tag{6.2.7}$$

де α, β – відомі коефіцієнти. З урахуванням (6.2.7), СДР (6.2.6) зведеться до такого:

$$\hat{L}x(t) = \alpha + \beta x(t) + \xi(t),$$

або

$$\left(\hat{L} - \beta\right)x(t) = \alpha + \xi(t). \tag{6.2.8}$$

Розв'язок (6.2.8) представляється в такий спосіб:

$$x(t) = \hat{L}_1(\alpha + \xi(t)), \tag{6.2.9}$$

де $\hat{L}_1$ – оператор, зворотний оператору $\left(\hat{L} - \beta\right)$. Маючи (6.2.9), можна обчислити будь-які моменти $x(t)$, аналогічно (6.2.3), (6.2.4).

Метод лінеаризації також ефективний, якщо флуктуації $\tilde{x}(t) = x - \overline{x}(t)$ малі в порівнянні із середнім значенням $\overline{x}(t)$, тобто $|\tilde{x}| \ll |\overline{x}|$. Для розв'язання (6.2.6) $f(x)$ представимо у вигляді:

$$f(x) = f(\overline{x} + \tilde{x}) \approx f(\overline{x}) + f'(\overline{x})\tilde{x} \equiv \alpha + \beta\tilde{x}.$$

Тоді

$$\hat{L}x(t) \approx \alpha + \beta\tilde{x} + \xi(t). \tag{6.2.10}$$

Усереднюючи (6.2.10), одержимо:

$$\overline{\widehat{L}x(t)} = \overline{\alpha + \beta\tilde{x} + \xi(t)}$$

або

$$\widehat{L}\overline{x}(t) = \alpha + \overline{\xi}(t), \qquad \alpha = f(\overline{x}). \tag{6.2.11}$$

Як видно з (6.2.11), для $\overline{x}(t)$ маємо *нелінійне детерміноване рівняння*. Віднімаючи з (6.2.10) співвідношення (6.2.11), одержимо рівняння для $\tilde{x}$:

$$\widehat{L}x(t) - \widehat{L}\overline{x}(t) \approx \beta\tilde{x} + \xi(t) - \overline{\xi}(t)$$

або

$$\widehat{L}\tilde{x}(t) = \beta\tilde{x}(t) + \tilde{\xi}(t), \quad \tilde{\xi}(t) = \xi(t) - \overline{\xi}(t). \tag{6.2.12}$$

Розв'язок (6.2.12) має такий вигляд:

$$\tilde{x}(t) = \widehat{L}_1\tilde{\xi}(t), \qquad \widehat{L}_1 = \left(\widehat{L} - \beta\right)^{-1}.$$

Тоді розв'язок вихідного рівняння (6.2.6) представляється в такий спосіб:

$$x(t) = \overline{x}(t) + \tilde{x}(t).$$

6.2.3. Метод статистичної лінеаризації

Звернемося до рівняння (6.2.6). Ідея методу статистичної лінеаризації заснована на такому. Якщо функція $f(x)$ – парна, вона зміняється найпростішою парною функцією – константою, яку позначимо α; якщо $f(x)$ – непарна, то її заміняємо найпростішою непарною функцією βx (де $\beta = \mathrm{const}$). Константи α і β одержують з додаткових умов. Часто зручно робити так. Складемо функціонали

$$I(\alpha) = \overline{(\alpha - f(x))^2}, \tag{6.2.13}$$

$$I(\beta) = \overline{(\beta x - f(x))^2} \tag{6.2.14}$$

і зажадаємо їхнього мінімуму. Для цього продиференціюємо (6.2.13), (6.2.14) відповідно по α і β й одержимо:

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial\alpha} = \overline{2(\alpha - f(x))} = 2\left(\alpha - \overline{f}(x)\right),$$

$$\frac{\partial I(\beta)}{\partial\beta} = \overline{2(\beta x - f(x))x} = 2\left(\beta\overline{x^2} - \overline{f(x)x}\right).$$

З рівності нулю похідних маємо:

$$\alpha = \overline{f(x)}, \quad \beta = \frac{\overline{xf(x)}}{\overline{x^2}}. \tag{6.2.15}$$

Розроблено й інші способи задання α і β.

Додамо, що для статистичного усереднення в (6.2.15) необхідно знати закон розподілу випадкової величини $x(t)$.

Розглянемо застосування методу статистичної лінеаризації. Для парної функції $f(x)$ рівняння (6.2.6) прийме вигляд:

$$\widehat{L}x(t) = \alpha + \xi(t), \qquad \alpha = \overline{f}(x).$$

Після усереднення одержимо

$$\widehat{L}\overline{x}(t) = \alpha, \tag{6.2.16}$$

а для $\tilde{x}(t) = x(t) - \overline{x}(t)$:

$$\widehat{L}\tilde{x}(t) = \xi(t). \tag{6.2.17}$$

З (6.2.16), (6.2.17) маємо: $\tilde{x}(t)$ і $\overline{x}(t)$, тобто, і $x(t)$.

Для непарної функції $f(x)$ рівняння (6.2.6) зводиться до такого:

$$\widehat{L}x(t) \approx \beta x(t) + \xi(t).$$

Тоді

$$\widehat{L}\overline{x}(t) \approx \beta\overline{x}(t),$$

$$\widehat{L}\tilde{x}(t) \approx \beta\tilde{x}(t) + \xi(t).$$

З цих співвідношень визначають $\overline{x}(t)$, $\tilde{x}(t)$, а значить $x(t)$.

6.2.4. Рівняння Дайсона для середніх

У цьому методі ідея лінеаризації використовується *частково.* Нехай потрібно розв'язати рівняння вигляду:

$$\widehat{L}x(t) = \widehat{N}(x,\xi) + f(t), \tag{6.2.18}$$

де $\xi(t)$, $f(t)$ – випадкові функції, $\widehat{N}$ – нелінійний функціонал.

Усереднюючи (6.2.18), одержимо:

$$\widehat{L}\overline{x}(t) = \overline{\widehat{N}} + \overline{f}, \tag{6.2.19}$$

де $\overline{\widehat{N}}$ – заздалегідь невідомий оператор, оскільки він залежить від $x(t)$. Віднімаючи з (6.2.18) вираз (6.2.19), приходимо до рівняння для $\tilde{x}(t)$:

$$\widehat{L}\tilde{x}(t) = \widehat{N} - \overline{\widehat{N}} + f - \overline{f}. \tag{6.2.20}$$

Лінеаризуючи $\widehat{N}(x,\xi)$ по $\tilde{x} = x - \overline{x}$ і $\tilde{\xi} = \xi - \overline{\xi}$, одержимо:

$$\widehat{N}(x,\xi) \approx \widehat{N}(\overline{x},\overline{\xi}) + \left(\frac{\partial \widehat{N}}{\partial x}\right)_{\overline{x}} \tilde{x} + \left(\frac{\partial \widehat{N}}{\partial \xi}\right)_{\overline{\xi}} \tilde{\xi} \equiv \widehat{N}(\overline{x},\overline{\xi}) + \gamma\,\tilde{x} + \delta\tilde{\xi}, \quad (6.2.21)$$

де γ, δ – відомі коефіцієнти. Усереднюючи (6.2.21) з урахуванням того, що $\overline{\tilde{\xi}} = \overline{\tilde{x}} = 0$, маємо:

$$\overline{\widehat{N}}(x,\xi) \approx \widehat{N}(\overline{x},\overline{\xi}). \quad (6.2.22)$$

Підстановка (6.2.21), (6.2.22) у вираз (6.2.20) дає:

$$\widehat{L}\tilde{x}(t) \approx \gamma\tilde{x} + \delta\tilde{\xi} + \tilde{f}, \qquad \tilde{f} = f - \overline{f}. \quad (6.2.23)$$

Звідси знаходиться $\tilde{x}(t)$ у першому наближенні:

$$\tilde{x}(t) \approx \tilde{x}^{(1)}(t) = \widehat{L}_1\left(\delta\tilde{\xi} + \tilde{f}\right),$$

$$\widehat{L}_1 = \left(\widehat{L} - \gamma\right)^{-1}.$$

Підставляючи $x(t) \approx \tilde{x}^{(1)}(t)$ в $\widehat{N}(x,\xi)$ і виконуючи статистичне усереднення, одержимо, що

$$\overline{\widehat{N}}(x,\xi) = F(\overline{x}),$$

тобто $\overline{\widehat{N}}$ залежить тільки від $\overline{x}$. Після цього (6.2.19) перепишеться у вигляді:

$$\widehat{L}\overline{x}(t) \approx F(\overline{x}) + \overline{f}. \quad (6.2.24)$$

Рівняння (6.2.24) – у загальному випадку нелінійне – зветься *рівнянням Дайсона* для середніх у наближенні Бурре.

6.2.5. Поняття про рівняння Фокера – Планка

Нехай розв'язок нелінійного рівняння вигляду

$$\widehat{N}x(t) = \xi(t)$$

невідомий. Випадковість $x(t)$ зумовлена тим, що коефіцієнти СДР або $\xi(t)$ задані випадковими функціями часу. Якщо ці функції є δ-корельованими, то можна одержати диференціальне рівняння, розв'язком якого буде *розподіл густини ймовірності* $w(x,t)$. У фізиці рівняння для $w(x,t)$ називається *рівнянням Фокера – Планка*. Математики називають його звичайно *рівнянням Колмогорова* – за ім'ям вченого, який дав йому строге обґрунтування. Знаючи $w(x,t)$, можна обчислити будь-які статистичні характеристики процесу $x(t)$. Наприклад, для рівняння

$$\frac{dx}{dt} = a(x) + b(x)\xi(t),$$

де $\overline{\xi}(t) = 0$, $R_\xi(\tau) = 2\sigma_\xi^2\delta(\tau)$, σ_ξ^2 – дисперсія процесу $\xi(t)$, $\delta(\tau)$ – дельта-функція, рівняння Фокера – Планка має вигляд:

$$\frac{\partial\, w}{\partial\, t} = -\frac{\partial}{\partial x}K_1 w + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}K_2 w,$$

де $K_1 = a + b\sigma_\xi^2$, $K_2 = 2\sigma_\xi^2 b^2$.

Питання для самоконтролю

1. У чому полягає особливість нелінійних явищ у статистичній радіофізиці?
2. Перелічіть методи розв'язання нелінійних стохастичних задач.
3. Опишіть метод усереднення точного розв'язання.
4. Опишіть методи лінеаризації нелінійних стохастичних рівнянь.
5. Опишіть метод стохастичної лінеаризації.
6. Отримайте рівняння Дайсона для середніх.
7. Що дає рівняння Фокера – Планка?

Задачі

1. Шляхом усереднення точного розв'язку нелінійної задачі обчислити $\overline{A(t)}$, $\overline{A^2(t)}$, $\sigma_A^2(t)$ для процесу, що описується виразом:

а) $A(t) = A_0 e^{\lambda t}$,

б) $A(t) = A_0 \mathrm{ch}^{-1}\xi$, $\xi = x - ut$.

Задані такі моменти випадкового процесу $A_0(t)$: $\overline{A_0}$ і дисперсія σ_0^2.

2. Вважаючи, що $|x| \ll 1$, і використовуючи метод лінеаризації, розв'язати стохастичне диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t), \quad x(0)=0.$$

де $\xi(t)$ – заданий випадковий процес, для випадків:

а) $f(x) = e^{-x}$,

б) $f(x) = \sin x$.

Обчислити $\overline{x(t)}$, вважаючи $\overline{\xi(t)} = 0$.

3. Використовуючи метод статистичної лінеаризації, розв'язати стохастичне диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t), \qquad x(0) = 0,$$

де $\xi(t)$– заданий випадковий процес. Прийняти, що:

а) $f(x) = \sin x$,

б) $f(x) = x^3$.

Закон розподілу x – нормальний з $\overline{x} = 0$ і дисперсією σ_x^2.

4. Отримати рівняння Дайсона для стохастичного диференціального рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t), \qquad x(0) = 0,$$

де $\xi(t)$– заданий випадковий процес. Прийняти, що:

а) $f(x) = \cos x$,

б) $f(x) = \sin x$.

6.3. Основні результати

1. При розв'язанні нелінійних задач статистичної радіофізики одночасно виникають дві «неприємності» – випадковість і нелінійність.

2. До основних математичних методів розв'язання СДР належать: усереднення точного розв'язку, лінеаризація, статистична лінеаризація та їх модифікації. У низці випадків корисними виявляються розв'язання рівнянь Дайсона для середніх і Фокера – Планка.

3. Нелінійні явища в статистичній радіофізиці принципово нічим не відрізняються від явищ у нелінійній електродинаміці. Відмінність полягає в появі стохастичності.

РОЗДІЛ 7. АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ НЕЛІНІЙНОЇ РАДІОФІЗИКИ

Проблема детермінованості та випадковості, визначеності та непередбачуваності, що зародилась багато століть тому, продовжує залишатися однією з фундаментальних і гострих проблем природознавства[1].

У цьому розділі розглядаються дві проблеми: поява *хаосу* в простих детермінованих системах і виникнення *самоорганізації* в хаосі. Наводяться приклади цих явищ з радіофізики й електроніки, а також інших наук. Виявляється, що подібні явища мають місце в природі в цілому, і ними займаються різні науки, до яких належать фізика, хімія, біологія, соціологія, економіка, медицина та ін. [1, 6, 9, 12, 15, 16, 19, 25, 26, 28, 30, 36, 39].

7.1. Детермінований хаос у радіофізиці

Розглянемо особливості детермінованого хаосу.

7.1.1. Поняття хаосу. Математичний апарат хаосу

При розгляді нелінійних явищ у статистичній радіофізиці (розділ 6) відзначалося, що стохастичність виникає внаслідок випадкової модуляції хвилі, статистичної неоднорідності середовища або ж через наявність розподілених джерел шуму. У цьому розділі будемо вважати відсутніми зазначені причини

[1] Див. : *Дмитриев А. С.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике / А. С. Дмитриев, В. Я. Кислов. – М. : Наука, 1989. – 280 с.

Виявляється, що хаос може виникнути в дуже простих детермінованих системах, але неодмінно нелінійних і динамічних. Тому такий хаос називається *детермінованим,* або *динамічним*. Термін «хаос» відображає *факт непередбачуваності* поведінки системи. Хаос призводить до *деградації* системи, що еволюціонує.

Детермінований хаос варто відрізняти від простого випадкового процесу, оскільки перший зумовлений внутрішніми взаємозв'язками, які є результатом нелінійності системи. Хаос описується за допомогою поняття *структури*. При детермінованому хаосі вони утворюються однаково часто. Структури детермінованого хаосу вражають дослідника *розмаїтістю* і *симетрією*. У динамічному хаосі є *гармонія*, він значно красивіший за звичайний випадковий процес. І хоча неможливо угадати, яка структура виникає з хаосу, вдається передбачити тип можливої структури.

Геометричним образом хаосу є *дивні атрактори* – підмножини, на яких траєкторії у фазовому просторі не мають властивості стійкості[2]. Перетин таких атракторів являє собою хаотичні фігури, які відносяться до так званих *фракталів*.

Термін «фрактал» походить від англійського fractional – *дробовий*. Його ввів у обіг математик зі США Б. Мандельброт. *Фракталом* називається об'єкт, що має дві основні властивості – *самоподібність* (достатньо локальної самоподібності) і *дробову розмірність*. Останнє є головним і вимагає додаткового пояснення [25].

7.1.2. Поняття про геометрію фракталів. Фрактали в математиці та природі

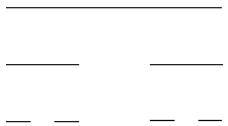
Геометрія фракталів вивчає математичні властивості геометричних об'єктів з дробовою розмірністю.

Цілочислову розмірність у математиці називають *топологічною*. Топологічна розмірність d_{T} точки, кривої й поверхні дорівнює відповідно 0, 1 і 2. Однак не всі геометричні об'єкти мають цілочислову розмірність.

Дробова розмірність d_H введена в 1918 р. Ф. Хаусдорфом і має його ім'я. Інколи її називають *розмірністю Хаусдорфа – Базековича*.

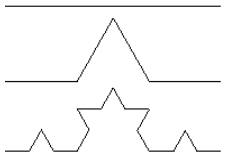
[2] Атрактором зветься підмножина фазового простору, до якого стягуються фазові траєкторії. На площині підмножина являє собою точку або граничний цикл.

Уперше фрактали з'явилися в математиці на межі XIX і XX ст. Їхніми прикладами є *канторова множина* (рис. 7.1), *крива Кох* (рис. 7.2), *килим Серпинського* (рис. 7.3) та ін. [10]. Алгоритм утворення множин зрозумілий з рисунків. У якості вихідної береться відрізок одиничної довжини.



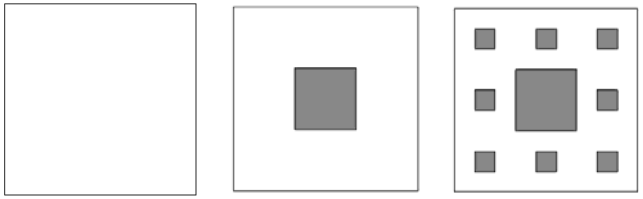
і т. д.

Рис. 7.1. Утворення канторової множини. Викидається середня частина відрізка, яка дорівнює 1/3 його довжини



і т. д.

Рис. 7.2. Утворення кривої Кох. Середній відрізок довжиною 1/3 заміняється двома такої ж довжини



і т. д.

Рис. 7.3. Утворення килима Серпинського. Заштриховані квадрати викидаються

Хаусдорфову розмірність множини обчислюють так. Нехай досліджувана множина занурена в простір розмірності d_{T}. Покриємо цю множину d_T-мірними «кубиками» зі стороною r. Нехай «об'єм» кубика – r^{d_H}. Тоді число кубиків в одиничному об'ємі ($V = 1$) дорівнює

$$N(r) = \frac{V}{r^{d_H}} = \frac{1}{r^{d_H}}.$$

Звідси

$$d_H = \frac{\ln N(r)}{\ln \frac{1}{r}}.$$

При $r \to 0$ (або числі повторень процедури алгоритму $n \to \infty$) потрібно обчислити границю

$$d_H = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln N(r_n)}{\ln \dfrac{1}{r_n}}.$$

Наведемо приклади обчислень d_H.

Розглянемо докладніше канторову множину. До поділу відрізка його довжини $r_0 = 1$, число відрізків $N = 1$, після першого поділу число відрізків, що залишилися $N = 2$, довжина $r_1 = 1/3$. Далі алгоритм повторюється. Для зручності результати запишемо так:

Номер кроку	Кількість відрізків, що викинуто	Кількість відрізків, що залишились	Довжина відрізка
$n = 0$	0	$N = 1$	$r_0 = 1$,
$n = 1$	2^0	$N = 2$	$r_1 = 1/3$,
$n = 2$	2^1	$N = 2^2$	$r_2 = (1/3)^2$,
...	...	...	...
$n = n$	2^{n-1}	$N = 2^n$	$r_n = (1/3)^n$.

Тоді

$$d_{\text{H}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln N(r_n)}{\ln \dfrac{1}{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}63.$$

Очевидно, що $0 < d_H < 1$. Таким чином, канторова множина – це вже не лінія ($d_T = 1$), але і не сукупність точок ($d_T = 0$). Можна сказати, що це *«густа» множина точок*.

Обчислимо довжину викинутих відрізків

$$l = \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + 2^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n + ...$$

Розглядаючи цю суму як суму членів нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом $a_1 = 1/3$ і знаменником $q = 2/3$, одержимо

$$l = \frac{a_1}{1-q} = 1.$$

Таким чином, довжина частини, що залишилася $l_0 = 1 - l = 0$.

Для кривої Кох маємо:

$n = 0$	$N = 1$	$r_0 = 1$,
$n = 1$	$N = 4$	$r_1 = 1/3$,
$n = 2$	$N = 4^2$	$r_2 = (1/3)^2$,
...	...	...
$n = n$	$N = 4^n$	$r_n = (1/3)^n$.

Звідси

$$d_{\text{H}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln N(r_n)}{\ln \dfrac{1}{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}26.$$

Очевидно, що $1 < d_H < 2$, в той час як $d_T = 1$. Крива Кох – це вже не лінія ($d_{\text{H}} = 1$), але ще і не поверхня ($d_H = 2$). Можна сказати, що це *«товста» лінія*. Цікаво, що її довжина $l = \infty$. Покажемо це:

$$l = \lim_{n\to\infty} N(r_n) r_n = \lim_{n\to\infty} 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty.$$

Ц випадку килима Серпинського маємо:

$n = 0$	$N = 1$	$r_0 = 1$	$S_0 = 1$,
$n = 1$	$N = 8$	$r_1 = 1/3$	$S_1 = (1/3)^2$,
$n = 2$	$N = 8^2$	$r_2 = (1/3)^2$	$S_2 = (1/3)^4$,
...	...	...	...
$n = n$	$N = 8^n$	$r_n = (1/3)^n$	$S_n = (1/3)^{2n}$.

Тут S_1, S_2 ... – площі відповідних квадратів, що викидаються, N – число квадратів, що залишилися. Тоді

$$d_H = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln N(r_n)}{\ln \dfrac{1}{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1{,}89.$$

Видно, що $1 < d_H < 2$, $d_H < d_T = 2$. Таким чином, килим Серпинського – це вже не поверхня ($d_H = 2$), але і не лінія ($d_H = 1$). Можна сказати, що це *«дірява» поверхня*.

Обчислимо площу викинутих квадратів:

$$S = S_1 + 8S_2 + 8^2 S_3 + ... + 8^{n-1} S_n + ... = \frac{a_1}{1-q},$$

де $a_1 = S_1 = (1/3)^2$, $q = 8S_2 / S_1 = 8S_3 / S_2 = ... = 8/9$. Видно, що $S = 1$, площа поверхні, що залишилася $S_0 = 1 - S = 0$.

Розглянуті приклади показують, що фрактали задають *математичними алгоритмами*.

Описані вище фрактали належать до *регулярних* фракталів.

Фрактали можуть бути *стохастичними*. До них належать, зокрема, траєкторія броунівської частинки, для якої $d_{\text{Т}} = 1$, $d_{\text{Н}} = 2$ або 3 відповідно, при рухах на площині або в просторі.

На практиці з фракталами вперше зіштовхнулися, мабуть, у середині XX ст. при вимірюванні довжині берегової лінії Великої Британії. Виявилось, що її довжина l залежить від довжини вимірника. Така залежність зникла, коли припустили, що $N(r_n) = \left(\frac{l}{r_n}\right)^{d_{\text{н}}}$, де d_H – дробове число.

Після цієї події число відкритих у природі фракталів почало швидко збільшуватися. Виявилося, що за допомогою фракталів можна описати хмари, нерівності ландшафту, дерева, розряд блискавки, тріщини після землетрусів, поверхню хромосфери Сонця, зіркові об'єкти і т. д.

Наявність фракталів можна знайти в музиці як класичній, так і більш сучасній (наприклад, у піснях ансамблю «Бітлз»).

Абстрактне мистецтво часто буває фрактальним.

Таким чином, світ, що оточує *адекватно* описується лише фрактальною геометрією. Евклідова, а а також сферична геометрія є лише *грубими ідеалізаціями* або *«карикатурами»* на фрактальну геометрію.

Так що ж таке фрактал? *Фрактал – це «густа» множина точок, «товста» лінія, «спінена» поверхня і навіть «спінений» простір – час.*

Фрактал – це мова нової геометрії.

Фрактал – це новий опис дійсності.

Фрактал – це новий («дробово-розмірний») світогляд.

7.1.3. Формування ідеї динамічного хаосу. Модель Лоренца

Математичні основи опису хаосу в нелінійних динамічних систем беруть свій початок від робіт А. Пуанкаре, виконаних на межі XIX–XX ст.

Очевидно, стохастичність у нелінійній радіофізиці спостерігали ще в 1920–1930-ті рр., однак пов'язували її з *шумами*. Навіть у 1960-ті рр. С. Рейс, Дж. Зеленс, знайшовши суцільний спектр коливань у системі електронний пучок – біжуча хвиля, пояснили його посиленням внутрішніх шумів.

Тим часом, наприкінці 1950-х рр. Б. В. Чириков звернув увагу на те, що коливання нелінійного осцилятора, що знаходиться під дією зовнішніх багаточастотних сил, а також системи нелінійних осциляторів можуть бути не періодичними, а значно більш складними, мати *суцільний спектр*. Остання обставина є *ознакою хаосу*.

Перша математична модель, що описує динамічний хаос, була числово досліджена американським метеорологом Е. Лоренцом у 1963 р.

Модель Лоренца мала вигляд:

$$\dot{x} = -a(x+y),\ a > 0,$$

$$\dot{y} = -y + bx - xz,\ b > 0,$$

$$\dot{z} = -cz + xy,\ c > 0.$$

Е. Лоренц уперше знайшов незвичайний вигляд фазових траєкторій, названих у 1971 р. Д. Рюелем і Ф. Такенсом *дивними атракторами* (атракторами Лоренца).

Лоренц показав, що *невеликі зміни в початкових умовах* системи нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку призводили до переходу від порядку (тобто стійкості фазових траєкторій) до хаосу (до їх нестійкості). Це явище потім було назване *«батерфляй»-ефектом* (*ефектом «метелика»*). Малося на увазі те, що змах крил метелика може призвести до непередбачуваних високоенергетичних метеоефектів.

Справжній сплеск інтересу до детермінованого хаосу спостерігається з початку 1970-х рр., коли було виявлено, що в найпростіших генераторах можуть виникати хаотичні коливання.

Такі коливання в низці випадків також описуються моделлю Е. Лоренца. Вона дозволяє вивчати часовий детермінований хаос.

Урахування просторової довжини динамічної системи може призвести до появи хаосу навіть тоді, коли це неможливо у випадку необмеженої системи. Динаміка такої системи описується нелінійними диференціальними рівняннями в частинних похідних. Хаос у цьому випадку іменується *просторово-часовим*. Його стали вивчати наприкінці минулого століття.

Великий внесок у розвиток робіт з детермінованого хаосу в радіофізиці й електроніці внесли Б. С. Анищенко, А. В. Гапонов-Грєхов, А. С. Дмитрієв,

В. Я. Кислов, П. С. Ланда, Ю. І. Неймарк, М. Н. Рабинович, Д. І. Трубецков та ін. [9, 26].

З'явилася відповідна школа і в ХНУ імені В. Н. Каразіна (О. О. Третьяков, Д. М. Ваврів і їхні учні).

Математичні основи детермінованого хаосу й методів його опису закладені в роботах О. М. Ляпунова, А. Н. Колмогорова, Б. Мандельброта, В. І. Арнольда, Я. Г. Синая, М. Фейгенбаума та ін. [25].

Розвиток детермінованого хаосу в різних фізичних системах описали Г. М. Заславський і Р. З. Сагдєєв у своїй знаменитій книзі «Нелинейная физика. От маятника до турбулентности и хаоса» [10].

7.1.4. Причини виникнення хаосу

Розглянемо нелінійний осцилятор у пульсуючій потенційній ямі. Його рух описується рівнянням [31]

$$\ddot{x} + x - x^3 = \mu \sin t,$$

де $\mu = \text{const}$, t – безрозмірний час. При $\mu = 0$ фазовий портрет системи показано на рис. 7.4.

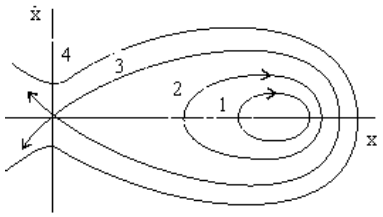


Рис. 7.4. Фазовий портрет нелінійного осцилятора:
1 – гармонійні коливання;
2 – квазігармонійні коливання;
3 – сепаратриса;
4 – інфінітивний рух

Рух осцилятора якісно не зміниться і при $\mu \neq 0$, якщо тільки в різні моменти часу точки фазової траєкторії попадають по той самий бік від сепаратриси, що розділяє фінітний і інфінітний рухи.

Якщо ж протягом періоду коливань точки фазової траєкторії попадають у *різні* області простору, що розділені сепаратрисою, то рух стає хаотичним.

Відомо, що фазові траєкторії перетинатися не можуть. Як же вони опиняються по різні боки від сепаратриси? Для цього потрібно вийти в тривимірний фазовий простір, тобто розглянути систему з *півтора степенями свободи*. Приклад повертальною нестійкості траєкторії показаний на рис. 7.5.

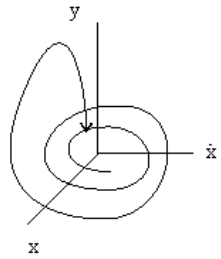


Рис. 7.5. Фазова траєкторія в системі з півтора степенями свободи, тобто в тримірному фазовому просторі

Таким чином, причиною виникнення хаосу слугує *нестійкість фазових траєкторій*. При цьому відстань між ними

$$d \sim e^{\lambda t},$$

де λ – показник нестійкості.

7.1.5. Умови та сценарії виникнення хаосу

Для того, щоб у системі виник хаос, вона повинна задовольняти таким умовам [1, 9, 16, 19, 31, 33, 39]:

- бути нелінійною;
- бути неврівноваженою або відкритою системою, тобто має бути приплив енергії, речовини або інформації ззовні;
- мати $n \geq 1{,}5$ степеней вільності;
- допускати виникнення колективних (кооперативних) процесів.

Найбільш універсальним шляхом виникнення хаосу є *біфуркація*[3] *подвоєного періоду*. Він детально вивчений М. Фейгенбаумом. Перехід до хаосу може здійснитися поступово (м'який режим) і стрибком (жорсткий режим). Останній реалізується, зокрема, у моделі Лоренца. Періодичні коливання можуть *перемежовуватися* з хаотичними (рис. 7.6).

7.1.6. Приклади хаотичних радіофізичних систем

Для появи хаотичних режимів у радіофізичних системах у класичний коливальний контур необхідно додати *зовнішній вплив*, або змінити *вид нелінійності*, або ж *збільшити розмірність* фазового простору (число степенів вільності) [1, 9].

[3] Біфуркація – якісні зміни розв'язків і траєкторій у фазовому просторі при зміні параметрів системи.

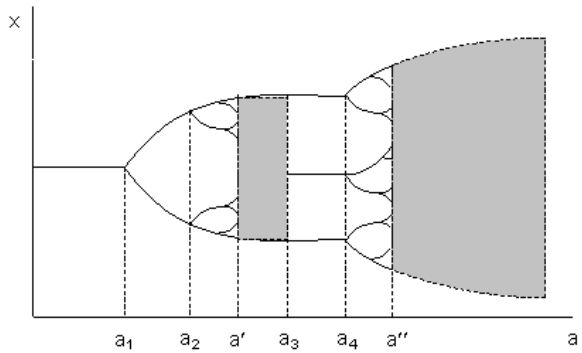


Рис. 7.6. Біфуркаційна діаграма: $0 < a < a_1$ *– одне стійке коливання з періодом* T_1*;* $a_1 < a < a_2$ *– дві області стійких періодичних коливань з* $T_2 = 2T_1$ *(у залежності від початкових умов встановлюється одне з них;* $a_2 < a < a'$ *– інтервали подальших подвоєнь періоду:* $T_4 = 4T_1$*,* $T_8 = 8T_1$*,...,* $T_{2^n} = 2^n T_1$*...;* $a' < a < a_3$ *– хаотичні коливання);* $a_3 < a < a_4$ *– стійкі коливання с* $T_3 = 3T_1$*;* $a_4 < a < a''$ *– інтервали подвоєнь періоду:* $T_6 = 6T_1$*,* $T_{12} = 12T_1$*,...,* $T_{3\cdot 2^n} = 3 \cdot 2^n T_1$*...;* $a'' < a$ *– хаотичні коливання*

Найпростіший генератор хаотичних коливань являє собою пристрій з безінерційного нелінійного елемента, лінійного фільтра й елемента часової затримки. Модель такого пристрою описується рівнянням

$$\dot{x} + x = F\big(x(t-\tau)\big),$$

де $F(x)$ – характеристика нелінійного елемента, τ – час затримки.

Іншим прикладом може бути генератор Ван-дер-Поля з нелінійним реактивним елементом. Він описується співвідношенням:

$$\ddot{x} + \varepsilon\left(\dot{x} - \dot{F}(x)\right) + R(x) = \beta\cos\omega t,$$

де $R(x)$ – характеристика реактивного елемента.

У якості прикладів принципових схем наведемо схеми генераторів шума на основі тунельного діода (нелінійного елемента) (рис. 7.7) і нелінійного резистора (рис. 7.8).

У цей час розроблені генератори шума в широкому діапазоні частот ($\sim$ 1 кГц – 10 ГГц), які використовують ідеї детермінованого хаосу.

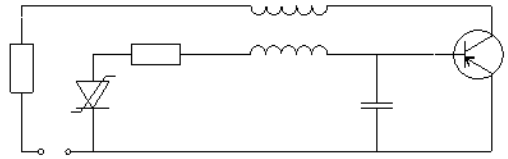


Рис. 7.7. Схема генератора хаотичних коливань на основі нелінійного діода

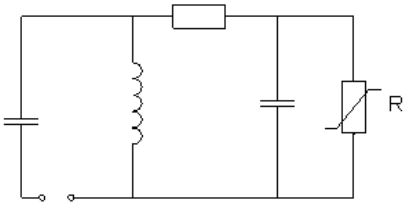


Рис. 7.8. Схема генератора хаотичних коливань на основі нелінійного резистора R

Мабуть, найпростішим пристроєм, у якому можливі хаотичні коливання, є коло, схема якого показана на рис. 7.9.

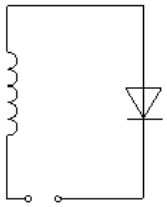


Рис. 7.9. Схема найпростішого пристрою з хаотичними коливаннями. Нелінійним елементом слугує діод

У цілому ж проблема детермінованого хаосу виходить далеко за межі радіофізики й електроніки та є *міждисциплінарною*. Наприклад, ідеї детермінованого хаосу виявилися плідними для опису сценарію переходу від ламінарної течії до *турбулентної*.

Цікаво й повчально, що ламінарна течія, у якій незмінно є присутнім тепловий рух молекул речовини, є більш хаотичною, ніж турбулентна. Звичайно ж, остання є більш складною, ніж ламінарна. *Не слід тому ототожнювати більш складне і більш хаотичне.*

Питання для самоконтролю

1. Що таке хаос?

2. Що таке динамічний (детермінований) хаос? Чим він відрізняється від хаосу?

3. Що таке дивний атрактор? Чим він відрізняється від атрактора?

4. Що таке фрактал?

5. Наведіть приклади фракталів у математиці.

6. Наведіть приклади фракталів у природі.

7. Що таке топологічна розмірність?

8. Що таке хаусдорфова розмірність?

9. Обчисліть фрактальну розмірність канторової множини. Порівняйте її з топологічною розмірністю вихідного об'єкта.

10. Обчисліть фрактальну розмірність кривої Кох. Порівняйте її з топологічною розмірністю вихідного об'єкта.

11. Обчисліть фрактальну розмірність килима Серпинського. Порівняйте її з топологічною розмірністю вихідного об'єкта.

12. Опишіть особливості фрактальної геометрії.

13. Якою геометрією точніше описується фізичний світ? Чому?

14. Опишіть формування ідеї детермінованого хаосу.

15. У чому головна заслуга Е. Лоренца?

16. У чому суть «батерфляй-ефекту»?

17. У чому причина виникнення детермінованого хаосу?

18. Що таке біфуркація?

19. Опишіть умови й сценарії виникнення детермінованого хаосу

20. Наведіть приклади радіофізичних пристроїв і систем, в яких виникає детермінований хаос.

21. Чи можна ототожнювати складне й хаотичне? Чому?

7.2. Явище самоорганізації в радіофізиці

У цьому підрозділі розглядається явище виникнення *порядку з хаосу*, наводяться приклади з різних наук [15, 30].

7.2.1. Поняття самоорганізації. Синергетика

Відповідно до класичної фізики, система прагне до зростання ентропії, а значить, і зростання безпорядку. Чому ж у природі (згадаємо, наприклад, теорію Дарвіна) може виникнути порядок з безпорядку? Це відноситься до зародження й еволюції флори і фауни. Чому зрештою з'явилася мисляча істота – homo sapiens?

Сучасна фізика і природознавство допускають можливість виникнення порядку з хаосу. Для цього система повинна бути *нелінійною, відкритою,*

з багатьма степенями вільності, а також вона повинна допускати виникнення *кооперативних* процесів. У такому випадку можлива *самоорганізація*.

Цими проблемами займається міждисциплінарна наука *синергетика* [15, 35]. Її назва введена в 1972 р. Г. Хакеном. Об'єктом дослідження синергетики є структури *(автоструктури)*, тобто упорядковані утворення.

Явище *самоорганізації* пов'язане с *припливом* енергії (речовини й т. д.) і *«забуванням»* початкових умов. Так, наприклад, рівняння дифузії для концентрації частинок N вигляду:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = F(N) + D\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}, \qquad (7.2.1)$$

де $F(N)$ – функція балансу частинок, що народжуються і гинуть, D – коефіцієнт дифузії, традиційно описує дисипативний процес, тобто знищення упорядкованості.

Однак, як показали в 1937 р. А. Н. Колмогоров, І. Г. Петровський і Н. С. Пискунов, воно допускає розв'язок у вигляді стаціонарних хвиль $N(t,x) = N(x - ut)$, де u – швидкість руху фронту хвилі. При $t \to \infty$

$$u = 2\sqrt{D(N_0)F'(N_0)}\,,$$

де N_0 – незбурене значення концентрації частинок. Важливо, що вигляд $N = N(\xi)$ визначається не початковими й граничними умовами, а властивостями середовища, тобто виглядом нелінійної функції $F(N)$.

Помітимо, що перехід від двовимірного рівняння (7.2.1) до одновимірного для $N(\xi)$, де $\xi = x - ut$, також є прикладом самоорганізації.

Процеси самоорганізації можуть мати *коливальний* характер і супроводжуватися поширенням хвиль, що одержали назву *автохвиль*. Нижче опишемо їх докладніше, але спочатку простежимо формування ідеї самоорганізації (синергетичної ідеї).

7.2.2. Формування синергетичної ідеї

До середини XX ст. йшло нагромадження даних спостережень. Сюди можна віднести комірки Бенара – упорядковані структури, що виникають на сковороді при нагріванні в ній олії, описані Г. Бенаром ще в 1900 р.; їх атмосферних «родичів» – хмари – майже правильної форми (прямокутної або шестикутної). І ті, й інші виникають за рахунок припливу тепла й подальшої конвекції рідини або газу.

Природно, давно були відкриті кільця Сатурна і 11-річний цикл сонячної активності й описані багато інших фактів самоорганізації. Нікому, однак, не спадало на думку зв'язати ці результати воєдино.

Усе почалося з дослідів хіміка Б. П. Білоусова. У 1950 р. він знайшов, що при протіканні хімічної реакції колір розчину *періодично* мінявся (червоний – синій – червоний). Редакція одного з хімічних журналів відмовилася опублікувати результати спостережень через те, що хімічні реакції незворотні. Це, звичайно, вірно, але тільки для замкнутих систем і поблизу положення рівноваги. Вдалині від нього процеси можуть бути не тільки оборотними, але й періодичними.

Однак така нетривіальна ідея затвердилася лише в 1960-ті рр., коли досліди Б. П. Білоусова були продовжені А. М. Жаботинським і повторені за кордоном.

Реакція Білоусова – Жаботинського давно стала класичною.

Виявилося, що у відкритих нелінійних системах можуть генеруватися хвилі з незвичайними властивостями. Р. В. Хохлов на початку 1960-х рр., за аналогією з автоколиваннями, назвав їх *автохвилями* (як відомо, автоколиваннями називається незгасаюче коливання в нелінійній відкритій системі, вигляд якого не залежить від початкових умов, а визначається властивостями системи).

Автохвилями називаються хвилі, що поширюються в *активних середовищах* (тобто відкритих системах) без згасання, що зберігають свої характеристики постійними за рахунок безперервного *підведення* енергії (речовини й т. д.) ззовні. Приклад таких автохвиль – рух фронту горіння, протікання хімічних реакцій, які можуть каталізуватися і т. д.

На початку 1970-х рр. були виявлені автохвилі спіральної форми (коротко – *спіральні хвилі*).

Пізніше автохвилі були вивчені в біофізиці, у фізиці твердого тіла і твердотільній електроніці тощо.

Значний внесок у дослідження автохвиль у твердотільній електроніці внесли Ю. В. Гуляєв, Ю. І. Балкарей, М. І. Елінсон та ін.

Справжнє місце автохвиль у науці, як і інших проявів самоорганізації, не було б усвідомлене, якби в 1960–1970-ті рр. не була створена *нерівноважна (нелінійна) термодинаміка*. Основна заслуга в її створенні належала бельгійській школі, очолюваній І. Пригожиним.

У 1970-ті рр. проблема самоорганізації стає міждисциплінарною, а міждисциплінарну науку стали називати *синергетикою* (від грецького слова συνεργοζ – «сумісний»).

У 1980-х рр. введено поняття *автосолітона*, що являє собою відокремлену автохвилю. Параметри автосолітона повністю визначаються властивостями системи. Низка стійких утворень у природе (полярні сяйва, кульова блискавка, деякі аномальні атмосферні явища і навіть так звані НЛО), очевидно, є автосолітонами.

7.2.3. Властивості автохвиль

Автохвилі мають незвичайні властивості. Для їхнього розуміння можна представляти таку модель автохвилі, як горіння сухої трави з подальшим підростанням нової, молодої. Цей приклад дозволяє наочно простежити всі основні властивості автохвилі (табл. 7.1).

Таблиця 7.1. Властивості автохвиль

Властивість	Хвилі	Автохвилі	Солітони
Збереження енергії	+	–	–
Збереження амплітуди й форми	–	+	+
Інтерференція	+	–	–
Анігіляція	–	+	–
Відбиття	+	–	–
Дифракція	+	+	?
Залежність від початкових умов	+	–	+

(Плюс означає наявність властивості, мінус – її відсутність).

З таблиці видно, зо майже всі властивості автохвиль *протилежні* властивостям звичайних хвиль. Виняток складає лише дифракція. Істотно розрізняються властивості хвиль і солітонів.

Додамо, що автохвилі описуються рівнянням типу (7.2.1) або системою подібних рівнянь. Важливо, що ці рівняння *нелінійні* і з *джерелами.*

7.2.4. Застосування автохвиль у радіоелектроніці

Як тільки у фізиці (або інших науках) відкривають нові типи хвиль, завжди починаються спроби їхнього застосування для передачі інформації,

побудови логічних схем, пристроїв запису інформації й т. п. Прикладами є волоконо-оптичні солітони (пункт 2.6.11), домени Ганна (пункт 2.6.5) та ін.

У зазначених напрямках ведуться роботи із застосування автохвиль. Уже сьогодні досягнута частота автоколивань $\sim 10^{10}$ Гц. Границею, мабуть, є $f \sim 10^{12} - 10^{13}$ Гц. Великі переваги автохвильових систем полягають у їхній *пластичності* й *багатофункційності*.

Під пластичністю розуміють множинність стаціонарних, коливальних і хвильових станів, а також різноманіття перехідних процесів при переключенні станів. Пластичність і широкі можливості реалізації твердотільних середовищ визначають шляхи практичного використання автохвильових процесів у радіоелектроніці.

7.2.5. Інші приклади самоорганізації

Самоорганізація – одна з фундаментальних властивостей природи, вона – всюдисуща. Ще Платон, угадавши цю властивість, писав, що час перетворює *хаос на космос* (тобто в буквальному перекладі *безпорядок на порядок*).

Класичними прикладами самоорганізації є комірки Бенара, а також реакція Білоусова – Жаботинського.

У біології такими прикладами можуть бути автохвильові режими руху серцевого м'яза, а також закони Менделя. І навіть те, що шкіра ягуара плямиста, а хвіст смугастий, як виявилося, відбиває властивості нелінійних відкритих систем.

Багата прикладами самоорганізації астрономія: кільця Сатурна, 11-річний цикл сонячної активності, білі карлики, нейтронні зірки, галактичні структури, великомасштабна структура Метагалактики і т. п.

Можна навести безліч прикладів виникнення порядку з хаосу у фізиці: формування солітона й автосолітона, ударної хвилі, явище Фермі – Пасти – Улама і т. д.

До систем, що самоорганізовуються, в радіофізиці належать: лазер на основі середовища, що самопросвітлюється, пристрій для обернення хвильового фронту й ін.

Явище самоорганізації часто спостерігається в природі: впорядковані хмари, хвильовий рельєф піску або снігу, явище квазіперіодичного профілю сходинок у гірських ріках або штучних потоках та ін.

Перехід від сприйняття до думки являє собою самоорганізацію, а думка – це когерентна структура, що породжується мозком.

Питання для самоконтролю

1. Що таке самоорганізація?
2. Що таке синергетика?
3. Порівняйте поняття «детермінований хаос» і «самоорганізація».
4. Опишіть формування синергетичної ідеї.
5. Що таке автохвиля?
6. Що таке автосолітон?
7. Подайте порівняльний аналіз хвиль і автохвиль.
8. Опишіть застосування автохвиль у радіофізиці та радіоелектроніці.
9. Наведіть приклади самоорганізації.

Задачі

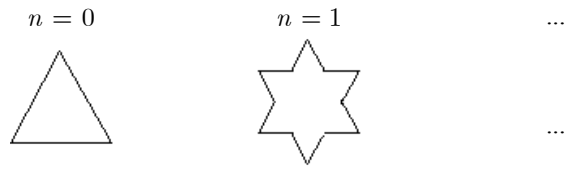
1. Обчислити хаусдорфову розмірність множини, що утворилась внаслідок послідовного ділення одиничного відрізка на m рівних частин і викиданням двох частин

а) другої і третьої, $m = 4$;

б) другої і четвертої, $m = 4$;

2. Обчислити хаусдорфову розмірність

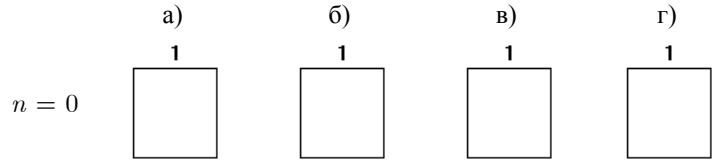
а) трикутника Кох:



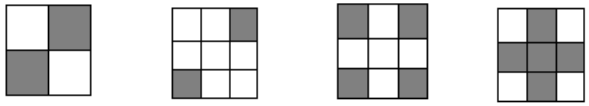
б) квадрата Кох (множини, побудованої аналогічно до трикутника Кох, але на основі одиничного квадрата);

3. Обчислити хаусдорфову розмірність множини, утвореної послідовним діленням одиничного відрізка на m рівних частин і викиданням k частин.

4. Обчислити хаусдорфову і топологічну розмірності таких множин:



$n = 1$



... ...

5. Обчислити хаусдорфову і топологічну розмірності «дірявого» куба, утвореного викиданням середнього кубика після ділення сторін куба на три рівні частини.

6. Узагальнити результат задачі 5 на випадок m-мірного куба з діленням сторін на k рівних частин.

7. Для відображення $x_{n+1} = \lambda\left(1 - x_n\right)x_n$ знайти нерухомі точки і вияснити стійкість траєкторій при:

а) $\lambda = 0{,}5$, б) $\lambda = 1$.

8. Для нелінійного рівняння теплопровідності вигляду

$$\frac{\partial T}{\partial t} = F\left(T\right) + \chi\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \chi = \mathrm{const}.$$

знайти амплітуду стаціонарного розв'язку й швидкість руху фронту хвилі. Прийняти

а) $F\left(T\right) = \alpha T - \beta T^2$, б) $F\left(T\right) = \alpha T^2 - \beta T$.

У чому тут полягає самоорганізація?

7.3. Основні результати

1. Детермінований (динамічний) хаос може виникати в простих нелінійних системах із числом степенів вільності більшим за півтора. Хаос призводить до деградації системи.

2. Детермінований хаос відрізняється від випадкової поведінки системи, у першому є гармонія.

3. Деградація і самоорганізація – фундаментальні поняття фізики відкритих систем.

Деградація і самоорганізація – дві реалізації того самого процесу, два можливих шляхи еволюції.

Хаос і порядок еквівалентні нестійкості і стійкості системи.

Не буває абсолютного хаосу і абсолютного порядку. Реальна система завжди знаходиться в деякому проміжному стані.

4. Процеси самоорганізації – всюдисущі. Вони мають місце в мікросвіті, макросвіті й мегасвіті.

Процесами самоорганізації займається міждисциплінарна наука – синергетика.

5. Автохвилі – яскравий приклад самоорганізації. Їхні властивості (за винятком дифракції) прямо протилежні властивостям звичайних хвиль.

Автохвилі виникають у нелінійних відкритих системах. Вони відіграють значну роль у функціонуванні живої матерії.

В останні десятиліття автохвилі знаходять застосування в радіоелектроніці.

6. Багато процесів у природі мають властивості автосолітонів.

ВИСНОВКИ

З кожним роком усе більше зростає цікавість до дуже несподіваної і «мальовничої» картини явищ нелінійної фізики[4].

1. *Нелінійні явища* в сучасній науці не виключення, а *закономірність*. Навколишній світ – нелінійний, він описується нелінійними рівняннями. Нелінійна фізика набагато «об'ємніша» за лінійну фізику явищами, оскільки остання являє собою граничний випадок нелінійної фізики.

Нелінійність – заперечення категорії лінійності. Нелінійність відкидає фундаментальний принцип суперпозиції, нічого не пропонуючи замість. У цьому розумінні вона не має конструктивізму.

Сьогодні ми ще дуже мало знаємо про багато дивних явищ нелінійного світу, ще менше вміємо їх використовувати.

2. У класичній науці нелінійність являє собою особливу окрему характеристику об'єктів.

У сучасній науці нелінійність – універсальна фундаментальна і головна властивість світу.

Уявлення про нелінійність світу визрівали поступово.

В *античний* і *середньовічний* періоди елементи нелінійності з'являлися в математиці й були відсутніми в природознавстві.

Протягом *натурфілософського* періоду (XVII–XVIII ст.) натуралісти вперше зіштовхнулися з нелінійністю. Для них це була окрема складність у розв'язанні задач.

У XIX ст. (*класичний* період) були усвідомлені окремі незвичайні властивості нелінійних явищ, були проведені перші спостереження, отримані перші точні розв'язки, розроблені наближені методи аналізу певних нелінійних задач у фізиці.

[4] Кернер Б. С. Автосолитоны / Б. С. Кернер, В. В. Осипов. – М. : Наука, 1991. – С. 9.

У першій половині XX ст. (*новий* період) відбувається нагромадження даних про нелінійні явища в різних науках. Розробляються наближені методи їхнього опису. Формується «нелінійна мова».

Нелінійність представляється *окремою характеристикою* об'єктів.

У другій половині XX – на початку XXI ст. (*сучасний* період) інтенсивно досліджуються нелінійні явища в різних природничих науках, відбуваються революційні зміни в уяві про нелінійність світу. Формується *нелінійне мислення* і *нелінійний світогляд*. Обґрунтована *нелінійна парадигма*.

Стає зрозумілим, що *нелінійність – універсальна фундаментальна* й *головна властивість світу*. Нелінійність керує еволюцією світу.

3. Усе різноманіття причин виникнення нелінійності можна спробувати звести до двох випадків. У першому з них нелінійність є «вродженою», тобто є наслідком внутрішніх причин, які відображаються нелінійними рівняннями, що описують стан системи.

У другому випадку нелінійність є «привнесеною». Сюди відносяться нерівноваги або відкриті системи, системи зі значним енерговмістом або енерговиділенням, коливання зі значною амплітудою, сильні хвилі й т. п.

4. У радіофізиці найбільший інтерес представляє нелінійність *електродинамічного типу*, пов'язана з поширенням сильних електромагнітних хвиль у середовищах або ж з описом коливальних процесів з великою амплітудою.

5. *Солітон* – фундаментальне поняття в нелінійній фізиці, він відіграє таку ж всеосяжну роль, як осцилятор у лінійній фізиці.

6. Одним з найважливіших досягнень нелінійної фізики є вивчення *можливості виникнення хаосу* в простих нелінійних динамічних системах.

Не менш дивним фактом є *можливість самоорганізації*, виникнення порядку з хаосу.

Хаос і порядок – два граничних стани нелінійної динамічної системи. При зміні її параметрів вони можуть безупинно трансформуються один в одного. *Не буває ні абсолютного хаосу, ні абсолютного порядку*. Усяка реальна система перебуває в деякому проміжному стані. Деградація і самоорганізація – два можливих шляхи еволюції відкритої системи.

7. Низка нелінійних явищ широко використовується на практиці. В радіофізиці й електроніці їх застосовують для генерації й підсилення коливань і хвиль, для оброблення й зберігання інформації, а також при розробці нових каналів телекомунікацій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Анісімов І. О. Коливання та хвилі : підручник / І. О. Анісімов. – К. : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2009. – 399 с.

2. Антипов О. И. Детерминированный хаос и фракталы в дискретно-нелинейных системах / О. И. Антипов, В. А. Неганов, А. А. Потапов ; под ред. и с предисловием акад. Ю. В. Гуляева и чл.-корр. РАН С. А. Никитова. – М. : Радиотехника, 2009. – 235 с.

3. Ахмедиев Н. Н. Солитоны / Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.

4. Басс Ф. Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда / Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич. – М. : Наука, 1975. – 400 с.

5. Борисов Н. Д. Искусственная ионизированная область в атмосфере / Н. Д. Борисов, А. В. Гуревич, Г. М. Милих. – М. : ИЗМИРАН, 1986. – 184 с.

6. Виноградова М. Б. Теория волн / М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков. – М. : Наука, 1979. – 384 с.; 1990. – 432 с.

7. Гурбатов С. Н. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике / С. Н. Гурбатов, О. В. Руденко, А. И. Самичев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 496 с.

8. Гуревич А. В. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере / А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург. – М. : Наука, 1973. – 272 с.

9. Дмитриев А. С. Стохастические колебания в радиофизике и электронике / А. С. Дмитриев, В. Я. Кислов. – М.: Наука, 1989. – 280 с.

10. Заславский Г. М. Введение в нелинейную физику / Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев. – М. : Наука, 1988. – 368 с.

11. Коротеев Н. И. Физика мощного лазерного излучения / Н. И. Коротеев, И. Л. Шульга. – М. : Наука, 1991. – 312 с.

12. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах / Р. М. Кроновер. – М. : Постмаркет. 2000. – 352 с.; М. : Техносфера, 2006. – 488 с.

13. Лазоренко О. В. Нелинейные явления в радиофизике: Сборник задач / О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2015. – 164 с.

14. Лазоренко О. В. Сверхширокополосные сигналы и процессы / О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2009. – 576 с.

15. Лоскутов А. Ю. Введение в синергетику / А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов. – М. : Наука, 1990. – 272 с.

16. Малинецкий Г. Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов. – М. : Эфекториал УРСС, 2000. – 336 с.

17. Милославский В. К. Нелинейная оптика : учеб. пособ. / В. К. Милославский. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина. 2008. – 312 с.

18. Митяков Н. А. Возмущение ионосферы мощными радиоволнами. / Н. А. Митяков, С. М. Грач, С. Н. Митяков // Итоги науки и техники. Серия «Геомагнетизм и высокие слои атмосферы». – М. : ВИНИТИ, 1989. – Т. 9. –С. 1–140.

19. Мун Ф. Хаотические колебания / Ф. Мун. – М. : Мир, 1990. – 312 с.

20. Наугольных К. А. Нелинейные волновые процессы в акустике / К. А. Наугольных, Л. А. Островский. – М. : Наука, 1990. – 237 с.

21. Нелинейные волны / под ред. С. Лейбовича, А. Сибасса ; перевод с англ. – М. : Мир, 1977. – 320 с.

22. Островский Л. А. Введение в теорию модулированных волн / Л. А. Островский, А. И. Потапов. – М. : ФИЗМАТЛИТ. 2003. – 400 с.

23. Полянин А. Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 432 с.

24. Полянин А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. – М. : ФИЗМАТЛИТ. 2005. – 256 с.

25. Потапов А. А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки / А. А. Потапов. – 2-е изд., доп. и перераб. – М. : Университетская книга, 2005. – 848 с.

26. Рабинович М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М. : Наука, 1984. – 432 с.

27. Солитоны / под ред. Р. Буллефа, Ф. Кодри ; пер. с англ. – М. : Мир, 1983. – 408 с.

28. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор; пер. с англ. – М. : Эдиториал УРСС. – 2001. – 320 с.

29. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем ; пер. с англ. – М. : Мир, 1977. – 622 с.

30. Хакен Г. Синергетика / Г. Хакен. – М. : Мир, 1980. – 404 с.

31. Черногор Л. Ф. О нелинейности в природе и науке / Л. Ф. Черногор. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2008. – 528 с.

32. Черногор Л. Ф. Радиофизические и геомагнитные эффекты стартов ракет / Л. Ф. Черногор. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2009. – 386 с.

33. Черногор Л. Ф. Физика и экология катастроф / Л. Ф. Черногор. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2012. – 556 с.

34. Черногор Л. Ф. Физика мощного радиоизлучения в геокосмосе / Л. Ф. Черногор. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014. – 544 с.

35. Шен И. Р. Принципы нелинейной оптики / И. Р. Шен. – М. : Наука, 1989.– 560 с.

36. Шустер Г. Детерминированный хаос / Г. Шустер. – М.: Мир, 1988. – 240 с.

37. Яновский В. В. Лекции о нелинейных явлениях / В. В. Яновский. – Х. : Институт монокристаллов. – 2006. – Т. 1. – 456 с.; 2007. – Т. 2. – 448 с.

38. Baker G. L. Chaotic Dynamics / G. L. Baker, J. P. Gollub – Cambridge: University Press, 1996.– 258 p.

39. Enciclopedia of Nonlinear Sciences. – N. Y. – London, 2005. – 1125 p.

40. Chernogor L. F. Radiophysical and Geomagnetic Effects of Rocket Burn and Launch in the Near-the-Earth Environment / L. F. Chernogor, N. Blaunstein. – Boca Raton, London, New York : CRC Press. Taylor & Francis Group, 2013. – 542 p.

41. Gurevich A. V. Nonlinear Phenomena in the Ionosphere / A. V. Gurevich. – N. Y. : Springer-Verlag, 1978. – 372 p.

42. Visions of nonlinear science in the 21st century / ed. by J. X. Huettas, W.-K. Chen, R. N. Madan. – Singapore: Word Scientific, 1999. – 872 p.

Навчальне видання

Чорногор Леонід Феоктистович

НЕЛІНІЙНА РАДІОФІЗИКА

Підручник

Видання третє, доповнене та перероблене

Коректор *А. І. Сєдих*
Комп'ютерне верстання *С. В. Кацко*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 39,7, вкл. Тираж 300 пр.
Зам. №

61022, м. Харків, майдан Свободи, 4
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна